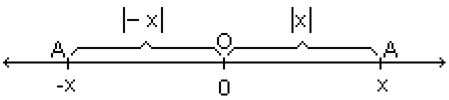
## MUTLAK DEĞER

Sayı doğrusunda, bir sayının belirttiği noktanın başlangıç noktasına ( 0 ın belirttiği noktaya) olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir.

$x$ in mutlak değeri $|x|$ şeklinde gösterilir ve x in mutlak değeri şeklinde okunur.




$|OA'| = |-x|$ ve $|OA| = |x|$

Buna göre $|x| = \begin{cases} -x \ , & x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ x \ , & x > 0 \end{cases}$ şeklinde ifade edilebilir.

**Örnek:**

$6 > 0$ olduğundan $|6| = 6$ dır.

$-4 < 0$ olduğundan $|-4| = -(-4) = 4$ tür.

$\frac{2}{3} > 0$ olduğundan $\left|\frac{2}{3}\right| = 3$ tür.

$|0| = 0$ dır.

**Uyarı**

Uzaklık negatif olamayacağına göre, bir sayının mutlak değeri, negatif değer alamaz. Mutlak değerli bir ifadenin en küçük değeri sıfır olabilir.

$a \in R$ olmak üzere $|a| \geq 0$ dır.

**Örnek:**

$a$ ve $b$ reel sayılar olmak üzere,

$|3a - 5b|$ ifadesi en küçük değerini aldığında $\frac{a}{b}$ nin kaç olacağını bulalım.

**Çözüm:**

$|3a - 5b| \geq 0$ olmak üzere,

$|3a - 5b| = 0$ en küçük değerdir.

$|3a - 5b| = 0 \Rightarrow 3a - 5b = 0 \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ tür.

**Örnek:**

$x = -3$ için,

$|2x + 1| + |x - 2| - x + 1$ ifadesinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$x = -3$ değerini yerine yazalım;

$$|2.(-3) + 1| + |(-3) - 2| - (-3) + 1 = |-5| + |-5| + 3 + 1$$
$$= 5 + 5 + 3 + 1 = 14 \text{ tür.}$$

**Örnek:**

$m < 0 < n$ olmak üzere,

$|m| + |n| + |n - m|$ ifadesinin eşitini bulalım.

**Çözüm:**

$m < 0$ ise $|m| = -m$ dir.

$n > 0$ ise $|n| = n$ dir.

$m < n$ ise $n - m > 0$ olup $|n - m| = n - m$ dir.

O halde,

$|m| + |n| + |n - m| = -m + n + n - m = 2.(n - m)$ olur.

**Örnek:**

$|x - 2| + |y + 2| + |z - 4| = 0$ olduğuna göre $x + y + z$ kaçtır?

**Çözüm:**

Üç tane mutlak değerin toplamınının sıfır olması için her bir mutlak değerin sıfır olması gerekir.

O halde,

$|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$|y+2| = 0 \Rightarrow y = -2$ dir.

$|z-4| = 0 \Rightarrow z = 4$ tür.

O halde,

$x + y + z = 2 + (-2) + 4 = 4$ bulunur.

**Mutlak Değerin Özellikleri**

**1.** $|x| = |-x|$ tir.

**2.** $|x.y| = |x|.|y|$ dir.

**3.** $|y| \neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ dir.

**4.** $\left|x^n\right| = |x|^n$ dir.

**5.** $|x+y| \leq |x| + |y|$ dir. (Üçgen eşitsizliği)

**Örnek:**

$\left||a-2| - 7 - |2-a|\right|$ ifadesinin eşitini bulalım.

**Çözüm:**

$|a-2| = |2-a|$ olduğundan

$\left||a-2| - 7 - |2-a|\right| = \left||a-2| - 7 - |a-2|\right| = |-7| = 7$ dir.

**Not**

**1.** Her x reel sayısı için $-|x| \leq x \leq |x|$ tir.

**2.** $|x| > x$ ise $x < 0$ dır.

**Örnek:**

$\frac{|x| + |-x|}{\left|2 + |x|\right|} = 4$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|x| = |-x|$ ve $2 + |x| > 0$ olduğundan,

$\frac{|x| + |-x|}{\left|2 + |x|\right|} = 4 \Rightarrow \frac{2.|x|}{2 + |x|} = 4 \Rightarrow 8 + 4.|x| = 2.|x|$

$\Rightarrow 2.|x| = -8 \Rightarrow |x| = -4$ bulunur.

$|x| \geq 0$ olması gerektiğinden $Ç.K. = \phi$ olur.

**Örnek:**

$|2x-2| + |3-3x| = 10$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|2x-2| = 2.|x-1|$ ve $|3-3x| = 3.|x-1|$ olduğundan,

$|2x-2| + |3-3x| = 10 \Rightarrow 2.|x-1| + 3.|x-1| = 10$

$\Rightarrow 5.|x-1| = 10$

$\Rightarrow |x-1| = 2$

$\Rightarrow x-1 = -2$ veya $x - 1 = 2$

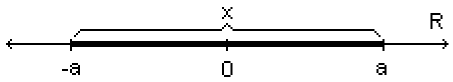
$\Rightarrow x = -1$ veya $x = 3$

$Ç.K. = \{-1, 3\}$ bulunur.

**Mutlak Değerli Basit Eşitsizlikler**

**1.** $a \geq 0$ olmak üzere,

$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ dır.




**Örnek:**

$|2x-1| < 9$ eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerlerini bulalım.

**Çözüm:**

$|2x-1| < 9 \Rightarrow -9 < 2x-1 < 9$

$\Rightarrow -8 < 2x < 10$

$\Rightarrow -4 < x < 5$ bulunur.

Buna göre, x in tamsayı değerleri;

-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 olur.

**Örnek:**

$|2x-3| \leq x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|2x-3| \leq x \Rightarrow -x \leq 2x-3 \leq x$

$\Rightarrow -x \leq 2x-3$ ve $2x-3 \leq x$

$\Rightarrow -3x \leq -3$ ve $x-3 \leq 0$

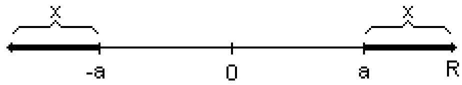
$\Rightarrow x \geq 1$ ve $x \leq 3$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow$ Ç.K. $= [1,3]$ bulunur.

**2.** $a \geq 0$ olmak üzere,

$|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ veya $x \geq a$ dır.




**Örnek:**

$|3x-2| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|3x-2| \geq 5 \Rightarrow 3x-2 \leq -5$ veya $3x-2 \geq 5$

$\Rightarrow 3x \leq -3$ veya $3x \geq 7$

$\Rightarrow x \leq -1$ veya $x \geq \frac{7}{3}$ olur.

Buna göre, Ç.K. $= (-\infty,-1] \cup \left[\frac{7}{3},+\infty\right)$ bulunur.

**Mutlak Değerli Denklemler**

**1.** $|f(x)| = 0$ ise $f(x) = 0$ dır.

**2.** $a > 0$ olmak üzere,

$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = a$ veya $f(x) = -a$ dır.

**3.** $|f(x)| = |g(x)|$ olmak üzere,

$f(x) = g(x)$ veya $f(x) = -g(x)$ tir.

**4.** $|f(x)| = |g(x)|$ ve $g(x) \geq 0$ olmak üzere,

$f(x) = g(x)$ veya $f(x) = -g(x)$ tir.

Ancak bu denklemin çözüm kümesi yazılırken $g(x) \geq 0$ şartı dikkate alınmalıdır.

**Örnek:**

$|2x-3| = |x+1|$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|2x-3| = |x+1| \Rightarrow 2x-3 = x+1$ veya $2x - 3 = - x - 1$

$\Rightarrow x = 4$ veya $x = \frac{2}{3}$ tür.

Buna göre, Ç.K. $= \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$ bulunur.

**Örnek:**

$|x-2| = 2x+1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|x-2| = 2x+1 \Rightarrow x-2 = 2x+1$ veya $x - 2 = -2x - 1$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = \frac{1}{3}$ tür.

Burada, $x = \frac{1}{3}$ için $2.x+1 = 2.\frac{1}{3}+1 = \frac{5}{3} > 0$

$x = -3$ için $2.x+1 = 2.(-3)+1 = -5 < 0$

olduğundan $x = -3$ olamaz.

O halde, Ç.K. $= \left\{\frac{1}{3}\right\}$ bulunur.

**Örnek:**

$|2x-3| = |x|$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

Her iki tarafın karesi alındığında mutlak değer yok olur.

$|2x-3| = |x| \Rightarrow (2x-3)^2 = x^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = x^2$

$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x-3).(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = 1$ dir.

Buna göre, Ç.K. $= \{1,3\}$ bulunur.

**2.Yol**

$|2x-3| = |x| \Rightarrow 2x-3 = x$ veya $2x - 3 = -x$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = 1$ dir.

Buna göre, Ç.K. $= \{1,3\}$ bulunur.

**Örnek:**

$|2x+5| + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

$|2x+5| + 4 = 0 \Rightarrow |2x+5| = -4$

Mutlak değerin sonucu hiçbir zaman negatif olamayacağından,

Ç.K. $= \phi$ bulunur.

**Örnek:**

$a + |a| = 0$ ve $|b| = -b$ olduğuna göre $a+b$ toplamının alabileceği değerlerin en geniş aralığını bulalım.

**Çözüm:**

$a + |a| = 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow a \le 0$ dır.

$|b| = -b \Rightarrow b \le 0$ dır.

Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$a + b \le 0$ bulunur.

**Örnek:**

$|2x-1|+|x-3|$ ifadesinin en küçük değerini bulalım.

**Çözüm:**

Mutlak değerin en küçük değeri sıfırdır.

Buna göre,

$|2x-1|=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$|x-3|=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

bulduğumuz bu değerler için ifadenin alacağı değerleri bulalım.

$x=3 \Rightarrow |2x-1|+|x-3|=|2.3-1|+|3-3|=5$

$x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow |2x-1|+|x-3|=\left|2.\dfrac{1}{2}-1\right|+\left|\dfrac{1}{2}-3\right|=\dfrac{5}{2}$ olur.

O halde, $5 \geq |2x-1|+|x-3| \geq \dfrac{5}{2}$ olur.

Buna göre, bu ifadenin alabileceği en küçük değer $\dfrac{5}{2}$ dir.

**ÇÖZÜMLÜ SORULAR**

**1.** $x<0$ olmak üzere $\dfrac{|8x|+|2x|}{-|-2x|}$ işleminin sonucu kaçtır?

**Çözüm:**

$x<0$ olduğundan $|x|=|-x|$ tir. Buna göre,

$\dfrac{|8x|+|2x|}{-|-2x|}=\dfrac{-8.|x|-2.|x|}{2.|x|}=-\dfrac{10.|x|}{2.|x|}=-5$ olur.

**2.** $2<x<3$ olmak üzere $|x-2|-|3-x|-|x|$ ifadesinin eşitini bulunuz.

**Çözüm:**

$2<x<3 \Rightarrow 0<|x-2|<1 \Rightarrow |x-2|=x-2$

$2<x<3 \Rightarrow -3<-x<-2 \Rightarrow 0<3-x<1$

$\Rightarrow |3-x|=3-x$

$2<x<3 \Rightarrow |x|=x$

Buna göre,

$|x-2|-|3-x|-|x|=x-2-(3-x)-x=x-5$ olur.

**3.** $a<b<0<c$ olmak üzere $|a+b|+|c-b|-|a-c|$ ifadesinin eşitini bulunuz.

**Çözüm:**

$a<0$ ve $b<0 \Rightarrow a+b<0 \Rightarrow |a+b|=-a-b$ dir.

$b<c \Rightarrow c-b>0 \Rightarrow |c-b|=c-b$ dir.

$a<c \Rightarrow a-c<0 \Rightarrow |a-c|=-a+c$ dir.

Buna göre,

$|a+b|+|c-b|-|a-c|=-a-b+c-b-(-a+c)$

$=-a-b+c-b+a-c)$

$=-2b$ bulunur.

**4.** $x<0$ ve $|x|\leq 2$ eşitsizlik sisteminin sağlayan x tamsayılarının çarpımı kaçtır?

**Çözüm:**

$|x|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$ dir.

$x<0$ ve $-2\leq x\leq 2$ ise $|x|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x<0$ olur.

Buna göre x in alabileceği tamsayılar -1 ve -2 olup çarpımları 2 dir.

**5.** $|a-b|+|2b+4|=0$ olduğuna göre $a^b$ kaçtır?

**Çözüm:**

$|a-b|+|2b+4|=0 \Rightarrow |a-b|=0$ ve $|2b+4|=0$

$\Rightarrow a-b=0$ ve $2b+4=0$

$\Rightarrow a=b$ ve $b=-2$

$\Rightarrow a=-2$ ve $b=-2$ olur.

O halde $a^b=(-2)^{-2}=\frac{1}{4}$ bulunur.

**6.** $a<b<0$ ve $|a|>b$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerinden hangisi kesinlikle negatiftir?

a) $a+b$ b) $a+2b$ c) $\frac{a^2-b^2}{b}$

d) $\frac{a+3b}{a-b}$ e) $\frac{a-b}{a}$

**Çözüm:**

$|a|>b \Rightarrow a>b$ veya $a<-b$ dir.

$a<0$ olduğu için $a<-b$ dir. ( $a>b$ olamaz.)

$a<-b \Rightarrow a+b<0$ dır.

**7.** $||2x-3|-4|=7$ olduğuna göre, x in alabileceği tamsayı değerlerin çarpımı kaçtır?

**Çözüm:**

$||2x-3|-4|=7 \Rightarrow |2x-3|-4=7$ veya $|2x-3|-4=-7$

$|2x-3|-4=7 \Rightarrow |2x-3|=11$

$\Rightarrow 2x-3=11$ veya $2x-3=-11$

$\Rightarrow x=7$ veya $x=-4$ tür.

$|2x-3|-4=-7 \Rightarrow |2x-3|=-3$

Mutlak değerin sonucu negatif olamayacağından bu son ifadenin çözümü yoktur.

O halde $Ç.K.=\{-4,7\}$ bulunur.

Buradan x değerlerinin çarpımı -28 olarak bulunur.

**8.** $|x|-8=3x$ eşitliğini sağlayan x kaçtır?

**Çözüm:**

$|x|-8=3x \Rightarrow |x|=3x+8$

$\Rightarrow x=3x+8$ veya $x=-3x-8$

$\Rightarrow -2x=8$ veya $4x=-8$

$\Rightarrow x=-4$ veya $x=-2$ olur.

Ancak $x=-4$ değeri verilen ifadeyi sağlamaz.

O halde $x=-2$ dir.

**9.** $||x|-2|>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

Her $a\in R$ için $|a|\geq 0$ olduğundan $||x|-2|\geq 0$ dır.

Ancak $x=\pm 2$ için $||x|-2|=0$ olduğundan,

$x\neq \pm 2$ için $||x|-2|>0$ olur.

Buna göre, $Ç.K.=R-\{-2,+2\}$ bulunur.

**10.** $|a^2|=|a|+6$ olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

**Çözüm:**

$|a^2|=|a|+6 \Rightarrow |a^2|-|a|-6=0 \Rightarrow (|a|-3).(|a|+2)=0$

$\Rightarrow |a| - 3 = 0$ veya $|a| + 2 = 0$

$\Rightarrow |a| = 3$ veya $|a| = -2$ ( Mutlak değer negatif olamaz.)

$\Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = -3$ veya $a = 3$ bulunur.

O halde a nın alabileceği değerlerin çarpımı -9 dur.

**11.** $\left|x^2 - 4\right| = |2 - x|$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$\left|x^2 - 4\right| = |2 - x| \Rightarrow |x - 2|.|x + 2| = |x - 2|$

$\Rightarrow |x - 2|(|x + 2| - 1) = 0$

$\Rightarrow |x - 2| = 0$ veya $|x + 2| - 1 = 0$

$\Rightarrow |x - 2| = 0$ veya $|x + 2| - 1 = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$ veya $|x + 2| = 1$

$\Rightarrow x = 2$ veya $x + 2 = 1$ veya $x + 2 = -1$

$\Rightarrow x = 2$ veya $x = -1$ veya $x = -3$ olur.

Buna göre, $Ç.K. = \{-3, -1, +2\}$ bulunur.

**12.** $|x - 1|.|x - 3| = 1 - x$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$|x - 1|.|x - 3| = 1 - x$ eşitliğinin iki yanı da $x = 1$ için sıfır olduğundan, $x_1 = 1$ bu denklemi sağlayan değerlerden birisidir.

Ayrıca $x \neq 1$ için $|x - 3| = 1$ denkleminin kökleri,

$x - 3 = 1 \Rightarrow x_2 = 4$ veya $x - 3 = -1 \Rightarrow x_3 = 2$ olur.

Ancak bu değerler için, verilen eşitliğin sağ tarafı ( 1 – x ) negatif olur. Mutlak değerin sonucu negatif olmayacağından $x = 4$ ve $x = 2$ değerleri denklemi sağlamaz.

Buna göre, $Ç.K. = \{1\}$ bulunur.

**13.** $|x - 1| = 1 - x$ olduğuna göre $|3 - x| - |x - 5|$ işleminin sonucu kaçtır?

**Çözüm:**

$|x - 1| = 1 - x \Rightarrow x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$ dir.

$x \leq 1 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow 3 - x \geq 2 \Rightarrow |3 - x| = 3 - x$ olur.

$x \leq 1 \Rightarrow x - 5 \leq -4 \Rightarrow |x - 5| = 5 - x$ olur.

Buna göre,

$|3 - x| - |x - 5| = 3 - x - (5 - x) = 3 - x - 5 + x = -2$ dir.

**14.** $|x - 2y| + |y - 3|$ ifadesi en küçük değerini aldığında $x + y$ toplamının alacağı değer kaç olur?

**Çözüm:**

$|x - 2y| + |y - 3|$ ifadesi en küçük değer alması için;

$x - 2y = 0$ ve $y - 3 = 0$ olmalıdır.

O halde, $y = 3$ ve $x = 6$ ise $x + y = 9$ bulunur.

**15.** $\left|\frac{2x - 1}{3}\right| \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

**Çözüm:**

$\left|\frac{2x - 1}{3}\right| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq \frac{2x - 1}{3} \leq 5 \Rightarrow -15 \leq 2x - 1 \leq 15$

$\Rightarrow -14 \leq 2x \leq 16 \Rightarrow -7 \leq x \leq 8$ olur.

Buna göre x in tamsayı değerlerinin toplamı 8 dir.

**16.** $|x| + |x-2| = 4$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

**Çözüm:**

$x$ ve $x-2$ ifadesi ters işaretli olduğunda, verilen eşitliğin sol tarafı 2 ye , yada – 2 ye eşit olur. Bu durumda bu denklemi sağlayan bir x değeri yoktur.

$x$ ve $x-2$ ifadesi aynı işaretli olduğunda;

$|x| + |x-2| = 4 \Rightarrow x + x - 2 = 4 \Rightarrow x_1 = 3$ ya da

$|x| + |x-2| = 4 \Rightarrow -x - x + 2 = 4 \Rightarrow x_2 = -1$ dir.

Buna göre, $x_1 + x_2 = 3 - 1 = 2$ dir.

**17.** $|x-1| \leq 3$ olduğuna göre, $2x - y - 5 = 0$ koşulunu sağlayan kaç tane y tamsayısı vardır?

**Çözüm:**

$|x-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$ tür.

$2x - y - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{y+5}{2}$ yazılırsa,

$-2 \leq x \leq 4 \Rightarrow -2 \leq \frac{y+5}{2} \leq 4 \Rightarrow -4 \leq y + 5 \leq 8$

$\Rightarrow -9 \leq y \leq 3$ olur.

Bu koşula uyan 13 tane y tamsayısı vardır.

**18.** $\left|\frac{3-x}{2}\right| > 2$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

**Çözüm:**

$\left|\frac{3-x}{2}\right| > 2 \Rightarrow \frac{3-x}{2} > 2$ veya $\frac{3-x}{2} < -2$ dir.

$\Rightarrow 3 - x > 4$ veya $3 - x < -4$

$\Rightarrow -x > 1$ veya $-x < -7$

$\Rightarrow x < -1$ veya $x > 7$ bulunur.

**19.** $\left|\frac{3-x}{x+1}\right| \geq -2$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$\left|\frac{3-x}{x+1}\right| \geq -2$

$x$ in -1 dışındaki bütün reel sayı değerleri için;

$\left|\frac{3-x}{x+1}\right| \geq 0$ dır.

$x = -1$ için payda 0 olduğundan;

$Ç.K. = R - \{-1\}$ olur.

**KONU BİTMİŞTİR...**

| | |
|---|---|