SIRALAMA

A. Tanım

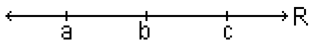
a sayısı, b ye eşit değilse, $a \neq b$ biçiminde yazılır.

$a \neq b$ ise bu durumda;

$a > b$, “ a büyüktür b den ” ya da

$a < b$, “ a küçüktür b den ” olur.

Gerçel (reel) sayı ekseninde herhangi bir sayının sağında bulunan sayılar daima o sayıdan büyük, solunda bulunan sayılar da o sayıdan küçüktür.



Yukarıdaki sayı doğrusuna göre; $a < b < c$ dir.

$x > y$, $x \geq y$, $x < y$ ve $x \leq y$ şeklindeki ifadelere eşitsizlik denir.

B. Sıralamanın Özellikleri

x, y, a, b reel (gerçel) sayılar olmak üzere,

1. Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir veya çıkarılabilir.

   - $a < b$ ise $a + c < b + c$ dir.
   - $a < b$ ise $a - c < b - c$ dir.

2. Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir reel sayıyla çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü aynı kalır.

   - $a < b$ ve $c > 0$ ise $a.c < b.c$ dir.
   - $a < b$ ve $c > 0$ ise $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ dir.

3. Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir reel sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

   - $a < b$ ve $c < 0$ ise $a.c > b.c$ dir.
   - $a < b$ ve $c < 0$ ise $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ dir.

4.
   - $a.b < 0$ ise a ile b ters işaretlidirler.
   - $a.b > 0$ ise a ile b aynı işaretlidirler.

5. Eşitsizliklerde geçişme özelliği vardır.

   $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.

6. Aynı yönlü eşitsizlikler, taraf tarafa toplanabilir; fakat çıkarılamaz.

   $x < y$ ve $a < b$ ise, $x + a < y + b$ dir.

   $x > y$ ve $a > b$ ise, $x + a > y + b$ dir.

7. x ile y aynı işaretli olmak üzere,

   $x < y$ ise $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ dir.

8. n pozitif bir doğal sayı ve $0 < a < b$ ise

   $a^n < b^n$ dir.

9. n pozitif bir doğal sayı ve $a < b < 0$ olsun.

   - n çift sayma sayısı ise $a^n > b^n$ dir.
   - n tek sayma sayısı ise $a^n < b^n$ dir.

10. $n \in Z^+ - \{1\}$ olmak üzere

    - $a > 1$ ise $a^n > a$ dır.
    - $0 < a < 1$ ise $a^n < a$ dır.
    - $-1 < a < 0$ ise $a^n > a$ dır.
    - $a < -1$ ise $\begin{cases} a^{2.n} > a \\ a^{2.n-1} < a \end{cases}$ dır.

Örnek:

$3x+1>x-7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$3x+1>x-7$ ise $3x+1-1>x-7-1$

ise $3x>x-8$

ise $3x-x>x-8-x$

ise $2x>-8$

ise $\frac{2x}{2}>\frac{-8}{2}$

ise $x>-4$ olur.

Örnek:

$2x-3<5x+6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$2x-3<5x+6$ ise $2x-3+3<5x+6+3$

ise $2x<5x+9$

ise $2x-5x<5x+9-5x$

ise $-3x<9$

ise $\frac{-3x}{-3}>\frac{9}{-3}$

ise $x>-3$ olur.

Örnek:

$\frac{70}{m}>9\frac{1}{3}$ eşitsizliğini sağlayan en büyük m pozitif tam sayısını bulalım.

Çözüm:

$\frac{70}{m}>9\frac{1}{3}$

$\frac{70}{m}>9+\frac{1}{3}$

$\frac{70}{m}>\frac{28}{3}$

m pozitif tam sayı olduğu için, verilen eşitsizliğin her iki tarafı m sayısı ile çarpılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

$\frac{70}{m}>\frac{28}{3}$ ise $m.\frac{70}{m}>m.\frac{28}{3}$

ise $70>\frac{28m}{3}$

ise $3.70>3.\frac{28}{3}$

ise $210>28m$

ise $\frac{210}{28}>\frac{28.m}{28}$

ise $7,5>m$

ise $m<7,5$ olur.

Buna göre, m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 7 dir.

Örnek:

$-2<\frac{2x+1}{3}<1$ olduğuna göre, x in en geniş aralığını bulalım.

Çözüm:

$$-2<\frac{2x+1}{3}<1$$

$$3.(-2)<3.\frac{2x+1}{3}<3.1$$

$$-6<2x+1<3$$

$$-6-1<2x+1-1<3-1$$

$$-7<2x<2$$

$$-\frac{7}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{2}{2}$$

$$-\frac{7}{2} < x < 1$$

Örnek:

$3x - 21 < 10x \leq 3x + 14$ olduğuna göre, x in en geniş aralığını bulalım.

Çözüm:

$$3x - 21 < 10x \leq 3x + 14$$

$$3x - 21 - 3x < 10x - 3x \leq 3x + 14 - 3x$$

$$-21 < 10x \leq 14$$

$$\frac{-21}{7} < \frac{7x}{7} \leq \frac{14}{7}$$

$$-3 < x \leq 2$$

Örnek:

$2x - 1 < 13 \leq 3x + 1$ olduğuna göre, x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$2x - 1 < 13 \leq 3x + 1$ ise, $2x - 1 < 13$ ve $13 < 3x + 1$ olur

Bu eşitsizliklerin ikisini de sağlayan x in değerleri sistemin çözüm kümesini oluşturur.

Buna göre,

$2x - 1 < 13$ ise $2x < 13 + 1$

ise $2x < 14$

ise $x < 7$ dir. ...(I)

$13 < 3x + 1$ ise $13 - 1 < 3x$

ise $12 < 3x$

ise $4 < x$ tir. ... (II)

(I) ve (II) daki eşitsizlikleri birlikte sağlayan tam sayılar 5 ile 6 dır. Buna göre, x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı, 5 + 6 = 11 olur.

Örnek:

$a.b^2 < 0$

$a.c > 0$

$\frac{b^3}{c^5} < 0$

olduğuna göre, sırasıyla a, b, c sayılarının işaretlerini bulalım.

Çözüm:

$a.b^2 < 0$ ise a ile b^2 ters işaretlidir.

$b^2 > 0$ olduğuna göre, $a < 0$ dır.

$a.c > 0$ ise a ile c aynı işaretlidir.

$a < 0$ olduğuna göre, $c < 0$ dır.

$\frac{b^3}{c^5} < 0$ ise b^3 ile c^5 ters işaretlidir.

$c < 0$ olduğundan $c^5 < 0$ olacağından $b^3 > 0$ olmalıdır.

$b^3 > 0$ olduğuna göre, $b > 0$ dır.

Bu durumda,

a, b, c sayılarının işaretleri sırasıyla $-,+,-$ dir.

Örnek:

$-1 < a \leq 3$

$1 \leq b \leq 6$

olduğuna göre, $a + b$ nin alabileceği; en büyük tam sayı değeri, en küçük tam sayı değerinden kaç fazla olacağını bulalım.

Çözüm:

Verilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{array}{r} -1 < a \leq 3 \\ +\ \ 1 \leq b \leq 6 \\ \hline 0 < a + b \leq 9 \end{array}$$

olur. Buna göre, $a + b$ nin alabileceği; en büyük tam sayı değeri 9, en küçük tam sayı değeri 1 olur.

Bu durumda, $a + b$ nin alabileceği; en büyük tam sayı değeri, en küçük tam sayı değerinden 9 – 1 = 8 fazla olur.

Örnek:

a ile b birer tam sayı olmak üzere,

$-2 < a \leq 5$

$3 \leq b < 10$

olduğuna göre, $a + b$ nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$a + b$ toplamının en büyük değerini alması için a ile b en büyük seçilmelidir.

$-2 < a \leq 5$ ise a nın alabileceği en büyük değer 5 tir.

$3 \leq b < 10$ ise b nin alabileceği en büyük değer 9 dur.

Buna göre, $a + b$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 5 + 9 = 14 olur.

Örnek:

$2 < a < 8$

$-8 < b < 2$

olduğuna göre, $3.a - 2.b$ nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulalım.

Çözüm:

Pozitif bir sayı ile çarpıldığında eşitsizliğin yön değiştirmeyeceğini de göz önüne alarak, $2 < a < 8$ sisteminin her üç yanını 3 ile çarpalım:

$$2 < a < 8$$

$$3.2 < 3.a < 3.8$$

$$6 < 3a < 24 \ \ldots (\text{I})$$

Negatif bir sayı ile çarpıldığında eşitsizliğin yön değiştireceğini de göz önüne alarak, $-8 < b < 2$ sisteminin her üç yanını -2 ile çarpalım:

$$-8 < b < 2$$

$$-8.(-2) > (-2).b > (-2).2$$

$$16 > -2.b < -4$$

$$-4 < -2.b < 16 \ \ldots (\text{II})$$

(I) ve (II) de verilen eşitsizlikleri alt alta yazıp taraf tarafa toplayabiliriz.

$$\begin{array}{r} 6 < 3.a < 24 \\ +\ -4 < -2.b < 16 \\ \hline \end{array}$$

$$6 + (-4) < 3a - 2.b < 24 + 16$$

$$2 < 3a - 2.b < 40$$

Buna göre, $3.a - 2.b$ ifadesi; 3, 4, 5, … ,38, 39 tam sayı değerlerini alabilir. Yani, 37 tam sayı değeri vardır.

Örnek:

m ve n reel sayılardır.

$-4 < m \leq 3$

$-6 \leq n < -3$

olduğuna göre, $m^2 + n^2$ nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$-4 < m \leq 3$ ise $0 \leq m^2 < 16 \ \ldots (\text{I})$

$-6 \leq n < -3$ ise $9 \leq n^2 \leq 36 \ \ldots (\text{II})$

(I) ve (II) de verilen eşitsizlikleri alt alta yazıp taraf tarafa toplayabiliriz.

$$\begin{array}{r} 0 \le m^2 < 16 \\ + \; 9 \le n^2 \le 36 \\ \hline 9 < m^2 + n^2 < 52 \end{array}$$

Buna göre, $m^2 + n^2$ nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 10 dur.

Örnek:

$-3 < c \le 2$

$7 \le d < 10$

olduğuna göre, c.d çarpımının alabileceği değerlerden oluşan en geniş aralığı bulalım.

Çözüm:

$-3 < c$ ve $d < 10$ ise $-30 < c.d$ …(I)

$c \le 2$ ve $d < 10$ ise $c.d < 20$ … (II)

$-30 < c.d$ ve $c.d < 20$ ise,

$-30 < c.d < 20$ olur.

Örnek:

m , n ve p birer reel sayıdır.

$m.n = 0$

$m^7.p^8 < 0$

$m.p^3 < 0$

olduğuna göre, m, n, p sayılarını sıralayalım.

Çözüm:

$m^7.p^8 < 0$ ifadesinde, p^8 her p reel sayısı için pozitif olduğundan $m^7 < 0$ ve dolayısıyla $m < 0$ dır.

$m < 0$ ve $m.n = 0$ olduğundan $n = 0$ dır.

$m < 0$ ve $m.p^3 < 0$ olduğundan $p^3 > 0$ ve dolayısıyla $p > 0$ dır.

$m < 0$, $n = 0$ ve $p > 0$ olduğundan, $m < n < p$ olur.

Örnek:

m , n ve p birer reel sayıdır.

$n + p < m + n < m + p$

olduğuna göre, m, n ve p sayılarını sıralayalım.

Çözüm:

$n + p < m + n < m + p$ ise,

$n + p < m + n$ ve $m + n < m + p$ yazılabilir.

$n + p < m + n$ ise $n + p - n < m + n - n$

ise $p < m$ dir. … (I)

$m + n < m + p$ ise $m + n - m < m + p - m$

ise $n < p$ dir. … (II)

(I) ve (II) den, $n < p < m$ olur.

Örnek:

m , n ve p birer pozitif tam sayıdır.

$\dfrac{2m + 3n}{n} > 5$

$\dfrac{3n + 4p}{p} < 6$

olduğuna göre, $m + n + p$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm:

$\dfrac{2m + 3n}{n} > 5$ ise $\dfrac{2m}{n} + 3 > 5 \Rightarrow \dfrac{2m}{n} > 2$

$\Rightarrow \frac{m}{n} > 1 \Rightarrow m > n$ olur. ... (I)

$\frac{3n+4p}{p} < 6$ ise $\frac{3n}{p} + 4 < 6 \Rightarrow \frac{3n}{p} < 2$

$\Rightarrow \frac{n}{p} < \frac{2}{3}$ olur. ... (II)

$m+n+p$ toplamının en küçük olması için, m, n ve p en küçük seçilmelidir.

$n = 1$ seçilirse, $m = 2$ ve $p = 2$ alınabilir.

Buna göre, $m+n+p$ toplamının alabileceği en küçük değer,

$m+n+p = 2+1+2 = 5$ olur.

Örnek:

$a - 3b = 4$

$-1 < a < 9$

olduğuna göre, b nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm:

$a - 3b = 4$ ise $a = 3b + 4$ tür.

Bu değer $-1 < a < 9$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$a - 3b = 4$ ise $-1 < 3b + 4 < 9$

ise $-1 - 4 < 3b + 4 - 4 < 9 - 4$

ise $-5 < 3b < 5$

ise $-\frac{5}{3} < \frac{3b}{3} < \frac{5}{3}$

ise $-\frac{5}{3} < b < \frac{5}{3}$ olur.

Bu sistemi sağlayan b nin alabileceği tam sayı değerleri, -1, 0 ve 1 olup bu sayıların toplamı, -1 + 0 + 1 = 0 dır.

Örnek:

$a + 2.b + 3.c = 4$

$-2 < a < 3$

$-3 < b < 1$

olduğuna göre, c nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulalım.

Çözüm:

$-2 < a < 3$ ... (I)

$-3 < b < 1 \Rightarrow 2.(-3) < 2.b < 2.1 \Rightarrow -6 < 2b < 2$ ... (II)

(I) ve (II) deki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{array}{l} \; -2 < a < 3 \\ +\; -6 < 2b < 2 \\ \hline -8 < a + 2b < 5 \end{array}$$

$-8 < a + 2b < 5$ olur. ...(III)

$a + 2.b + 3.c = 4$ $a + 2b = 4 - 3c$ dir.

Bulunan bu değeri (III) eşitsizliğinde yazarsak,

$-8 < a + 2b < 5 \Rightarrow -8 < 4 - 3c < 5$

$\Rightarrow -8 - 4 < 4 - 3c - 4 < 5 - 4$

$\Rightarrow -12 < -3c < 1$

$\Rightarrow \frac{-12}{-3} > \frac{-3c}{-3} > \frac{1}{-3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} < c < 4$ olur.

Bu sistemi sağlayan c nin alabileceği tam sayı değerleri 3, 2,1 ve 0 olup 4 tanedir.

Örnek:

$m + n > 20$

$n < p + 7$

$m + p + 2t = 27$

olduğuna göre, t nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$m + n > 20 \ldots$ (I)

$n < p + 7$ ise $-(n) > -(p + 7) \Rightarrow -n > -p - 7$

$\Rightarrow p - n > -7 \ \ldots$ (II)

(I) ve (II) deki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{array}{r} m + n > 20 \\ + \ p - n > -7 \\ \hline m + p > 13 \end{array}$$

$m + p > 13$ olur. ...(III)

$m + p + 2t = 27$ ise $m + p = 27 - 2t$ dir. ... (IV)

(IV) daki $m + p$ nin değeri (III) de yerine yazılırsa,

$m + p > 13 \Rightarrow 27 - 2t > 13 \Rightarrow -2t > 13 - 27$

$\Rightarrow -2t > -14$

$\Rightarrow \frac{-2t}{-2} < \frac{-14}{-2}$

$\Rightarrow t < 7$ olur.

Buna göre, t nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 6 olur.

Örnek:

A şehrinden B şehrine iki farklı yolla gidilebilmektedir.

1. yol: $8a - 29$ km.

2. yol: $5a + 17$ km.

2.yol, 1. yoldan daha kısa olduğuna göre, a nın alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

2.yol, 1. yoldan daha kısa olduğuna göre,

$5a + 17 < 8a - 29$ olur.

$5a + 17 < 8a - 29 \Rightarrow 5a - 8a < -29 - 17$

$\Rightarrow -3a < -46$

$\Rightarrow \frac{-3a}{-3} > \frac{-46}{-3}$

$\Rightarrow a > \frac{46}{3} = 15{,}333\ldots$ olur.

Buna göre, a nın alabileceği en küçük tam sayı değeri 16 dır.

Örnek:

x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere, üretilen bir malın maliyeti x YTL ve satış fiyatı y YTL dir. Bu malın satış fiyatının hesaplanması için:

a) $y = x + 130$

b) $y = 3x - 250$

biçimindeki iki bağıntı önerilmiştir.

Üretilen malın tümü satılabildiğine ve satış fiyatının hesaplanmasında b) de verilen bağıntıyı kullanmak daha karlı olduğuna göre, x maliyetinin en az kaç YTL olabileceğini bulalım.

Çözüm:

$y = 3x - 250$ bağıntısını kullanmak, $y = x + 130$ bağıntısını kullanmaktan daha karlı olduğuna göre,

$3x - 250 > x + 130$ dur.

$3x - 250 > x + 130 \Rightarrow 3x - x > 130 + 250$

$\Rightarrow 2x > 380$

$\Rightarrow \frac{2x}{2} > \frac{380}{2}$

$\Rightarrow x > 190$ olur.

Buna göre, x (maliyet) pozitif tam sayı olduğuna göre en az 191 YTL olabilir.

C. Aralıklar

1. Kapalı Aralık

a ve b reel sayılar ve $a < b$ olsun.

a ve b sayıları ile bu sayıların arasındaki tüm reel sayıları içine alan küme $[a, b]$ veya $a \leq x \leq b$, $x \in R$ şeklinde gösterilir ve bu şekilde tanımlanan aralıklara kapalı aralık denir.

2. Açık Aralık

a ve b reel sayılar ve $a < b$ olsun.

$[a, b]$ kapalı aralığının uç noktalarının ikisi de bu aralıktan çıkarılırsa elde edilen yeni aralığa açık aralık denir. Açık aralık (a, b) veya $a < x < b$, $x \in R$ şeklinde gösterilir.

3. Yarı Açık Aralık

a ve b reel sayılar ve $a < b$ olsun.

$[a, b]$ kapalı aralığının uç noktalarından birisi bu aralıktan çıkarılırsa elde edilen yeni aralığa açık aralık denir.

$[a, b]$ kapalı aralığından b noktası çıkarılırsa $[a, b)$ veya $a \leq x < b$, $x \in R$ yarı açık aralığı elde edilir.

$[a, b]$ kapalı aralığından a noktası çıkarılırsa $(a, b]$ veya $a < x \leq b$, $x \in R$ yarı açık aralığı elde edilir.

Örnek:

x pozitif reel (gerçel) sayı olmak üzere,

$$-3 \leq \frac{2x+1}{3} < -1$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini (aralığını) bulalım.

Çözüm:

$$-3 \leq \frac{2x+1}{3} < -1$$

$$-3.3 \leq \frac{2x+1}{3}.3 < -1.3$$

$$-9 \leq 2x+1 < -3$$

$$-9-1 \leq 2x+1-1 < -3-1$$

$$-10 \leq 2x < -4$$

$$\frac{-10}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{-4}{2}$$

$$-5 \leq x < -2$$

Bu kümeyi (aralığı) $[-5,-2)$ biçiminde de gösteririz.

Örnek:

$3x + 4 < 19$

$3 < 2x + 7$

koşullarına uygun olan x reel sayılarının kümesini (aralığını) bulalım.

Çözüm:

$$3x+4 < 19 \Rightarrow 3x < 19-4$$

$$\Rightarrow 3x < 15$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$$

$$\Rightarrow x < 5 \text{ olur. ...(I)}$$

$3 < 2x + 7 \Rightarrow 3 - 7 < 2x$

$\Rightarrow -4 < 2x$

$\Rightarrow \frac{-4}{2} < \frac{2x}{2}$

$\Rightarrow -2 < x$ olur. ...(II)

(I) ve (II) koşulunun birlikte sağlandığı aralık istenen koşulları sağlar.

$-2 < x$ ve $x < 5$ ise $-2 < x < 5$ olur.

Bu aralığı $(-2,5)$ biçiminde de gösterebiliriz.

Çözümlü Sorular

1. a, b, c birer pozitif gerçel sayı ve

$2a = 3b$

$3b = c$

olduğuna göre, a, b, c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

a, b, c birer pozitif gerçel sayı ve $2a = 3b$, $3b = c$ olduğuna göre $a = 3$ seçebiliriz.

Bu durumda, $b = 2$ ve $c = 6$ olur.

Buna göre, $b < a < c$ dir.

2. $b > b^2$ ve $b.c < c$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $-1 < c < 1$ B) $c > 0$ C) $c > 1$

D) $c < 1$ E) $c < 0$

Çözüm:

$b > b^2$ ise $0 < b < 1$ dir.

$b.c < c$ ise $b.c - c < c - c \Rightarrow b.c - c < 0$

$\Rightarrow c.(b-1) < 0$ dır.

$0 < b < 1$ olduğuna göre, $b - 1 < 0$ dır. Buna göre,

$b - 1 < 0$ ve $c.(b-1) < 0$ eşitsizliklerinden $c > 0$ olur.

3. $x > y > z$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisinin sonucu sıfır olamaz?

A) $x + y + z$ B) $x + y + z + 3$ C) $x + y - 5$

D) $x^3 + y^3 + 4$ E) $2x - y - z$

Çözüm:

$x > y$ olduğuna göre $x - y > 0$ dır. ...(I)

$x > z$ olduğuna göre $x - z > 0$ dır. ...(II)

Aynı yönlü eşitsizliklerde taraf tarafa toplama yapılabileceği için (I) ve (II) daki eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım. Buna göre,

$x - y + x - z > 0 + 0 \Rightarrow 2x - y - z > 0$ dır.

Bu durumda E seçeneğinde verilen $2x - y - z$ ifadesinin sıfırdan büyük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu ifade sıfıra eşit olamaz.

Diğer seçeneklerde x, y, z yerine uygun sayı değerleri verilirse sonucun sıfır olacağı görülür.

4. $-4 < a < 3$ olduğuna göre, a^2 nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Çözüm:

$-4 < a < 3$ ise $0 \leq a^2 < 16$ dır.

a^2 nin alabileceği tam sayı değerleri, 0, 1, 2, 3, ..., 15 tir.

Buna göre a^2 nin alabileceği farklı tam sayı değerleri sayısı 16 tanedir.

5. $\frac{1}{2} < \frac{3x+1}{20} < \frac{4}{5}$ olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Çözüm:

$$\frac{1}{2} < \frac{3x+1}{20} < \frac{4}{5} \Rightarrow 20.\frac{1}{2} < 20.\frac{3x+1}{20} < 20.\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 10 < 3x+1 < 16$$

$$\Rightarrow 10-1 < 3x+1-1 < 16-1$$

$$\Rightarrow 9 < 3x < 15$$

$$\Rightarrow \frac{9}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$$

$$\Rightarrow 3 < x < 5$$

Buna göre, x yerine yalnızca 4 gelebilir.

6. $4 < \frac{60}{2x+1} < 12$ olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Çözüm:

4 ile 12 aynı işaretli olduğu için,

$$4 < \frac{60}{2x+1} < 12 \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{2x+1}{60} > \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 60.\frac{1}{4} > 60.\frac{2x+1}{60} > 60.\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 15 > 2x+1 > 5$$

$$\Rightarrow 15-1 > 2x+1-1 > 5-1$$

$$\Rightarrow \frac{14}{2} > \frac{2x}{2} > \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow 7 > x > 2$$

$$\Rightarrow 2 < x < 7 \text{ olur.}$$

Buna göre x in alabileceği tam sayı değerleri 3, 4, 5, 6 olup 4 tanedir.

7. $2x - 7 < x + 4$

$3y - 5 < -y - 33$

olduğuna göre $x + y$ nin alabileceği doğal sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$2x - 7 < x + 4$ ise $2x - x < 4 + 7 \Rightarrow x < 11$ dir.

$3y - 5 < -y - 33$ ise $3y + y < 5 - 33 \Rightarrow 4y < -28$

$\Rightarrow y < -7$ dir.

Aynı yönlü eşitsizliklerde taraf tarafa toplama yapılabilir. Buna göre, $x < 11$ ve $y < -7$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$x + y < 11 - 7 \Rightarrow x + y < 4$ tür.

Bu eşitsizliği sağlayan $x + y$ nin alabileceği doğal sayı değerlerinin toplamı,

$0 + 1 + 2 + 3 = 6$ olur.

8. $a < 8$

$b < a - 5$

$2c < b + 17$

olduğuna göre, c nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

Verilen eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$a + b + 2c < 8 + a - 5 + b + 17$$

$$a + b + 2c < a + b + 20$$

$$a + b + 2c - a - b < 20$$

$$2c < 20$$

$$c < 10 \text{ olur.}$$

Buna göre c nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 9 dur.

9. $\dfrac{10}{3x+5} < -\dfrac{3}{2}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\dfrac{10}{3x+5} < -\dfrac{3}{2}$ ise $\dfrac{10}{3x+5} < 0$ dır. Buna göre,

$\dfrac{10}{3x+5} < -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{3x+5}{10} < -\dfrac{2}{3}$ olur.

$\dfrac{3x+5}{10} < -\dfrac{2}{3} \Rightarrow 10.\dfrac{3x+5}{10} < -\dfrac{2}{3}.10$

$$\Rightarrow 3x+5 < -\frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow 3x < -\frac{20}{3} - 5$$

$$\Rightarrow 3x < -\frac{35}{3}$$

$$\Rightarrow x < -\frac{35}{9}$$

10. x, y, z birer reel sayı olmak üzere,

$x > \dfrac{1}{3}$, $y > -\dfrac{1}{4}$, $z < \dfrac{1}{2}$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $x+y-z > -\dfrac{1}{2}$ B) $x+y-z > -\dfrac{5}{12}$

C) $x+y-z < -\dfrac{1}{12}$ D) $x+y-z > -\dfrac{1}{12}$

E) $x+y-z < \dfrac{7}{12}$

Çözüm:

Verilen 3. eşitsizliğin her iki tarafını (- 1) ile çarparak diğer iki eşitsizlik ile taraf tarafa toplayalım. Buna göre,

$z < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -z > -\dfrac{1}{2}$ dir.

$$\begin{array}{l} x > \frac{1}{3} \\ y > -\frac{1}{4} \\ + \quad -z > -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$x+y-z > \underset{(4)}{\frac{1}{3}} - \underset{(3)}{\frac{1}{4}} - \underset{(6)}{\frac{1}{2}} = \frac{4-3-6}{12}$$

$x+y-z > -\dfrac{5}{12}$ olur.

11. $a > b > 0$

$c = \dfrac{a+2b}{b}$

olduğuna göre, c aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\dfrac{10}{3}$ B) 3 C) $\dfrac{14}{5}$ D) $\dfrac{8}{3}$ E) $\dfrac{5}{2}$

Çözüm:

$c = \dfrac{a+2b}{b} = \dfrac{a}{b} + 2$ dir. ...(I)

$a > b > 0$ olduğu için $\dfrac{a}{b} > 1$ dir.

Buna göre; $c = \dfrac{a}{b} + 2$ ise $c > 3$ olur.

Seçeneklerde bu koşula uyan $\dfrac{10}{3}$ tür.

12. $\dfrac{1}{4} < x < 1 < y < \dfrac{3}{2}$ olduğuna göre, $x-y$ nin değeri aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $-\dfrac{3}{2}$ B) -1 C) $-\dfrac{3}{4}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $-\dfrac{1}{3}$

Çözüm:

$\frac{1}{4} < x < 1 < y < \frac{3}{2}$ ise $\frac{1}{4} < x < 1$ ve $1 < y < \frac{3}{2}$ dir.

$1 < y < \frac{3}{2}$ ise $-1 > -y > -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -y < -1$ dir.

$\frac{1}{4} < x < 1$ ve $-\frac{3}{2} < -y < -1$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} < x - y < 1 - 1 \Rightarrow -\frac{5}{4} < x - y < 0$ olur.

Buna göre, $x - y$ nin değeri $-\frac{3}{2}$ olamaz.

13. $a > 0$ ve $3.a.b - 12.a < 0$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $10 < b$ B) $5 < b$ C) $0 < b$

D) $b < 4$ E) $b < 0$

Çözüm:

$3.a.b - 12.a < 0$ ise $3.a.(b - 4) < 0$ olur.

$a > 0$ olarak verildiğine göre $3.a.(b - 4) < 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $b - 4 < 0$ olmalıdır.

Buna göre, $b - 4 < 0$ ise $b < 4$ olur.

14. $\frac{a}{0,05} = b$

$2 < a < 4$

olduğuna göre, b için aşağıdakilerden hangisi doğrudur

A) $4 < b < 8$ B) $8 < b < 16$ C) $10 < b < 20$

D) $20 < b < 40$ E) $40 < b < 80$

Çözüm:

$\frac{a}{0,05} = b$ ise $0,05.\frac{a}{0,05} = 0,05.b \Rightarrow a = \frac{5b}{100} = \frac{b}{20}$ dir.

$2 < a < 4$ ve $a = \frac{b}{20}$ olduğuna göre,

$2 < \frac{b}{20} < 4 \Rightarrow 40 < b < 80$ olur.

15. $-\frac{3}{4} < a < \frac{5}{6}$

$-\frac{5}{4} > b > -3$

olduğuna göre, $a^2 - 2b$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

$-\frac{3}{4} < a < \frac{5}{6} \Rightarrow 0 \le a^2 < (\frac{5}{6})^2$

$\Rightarrow 0 \le a^2 < \frac{25}{36}$ olur. ...(I)

$-\frac{5}{4} > b > -3 \Rightarrow -2.(-\frac{5}{4}) < -2.b < -2.(-3)$

$\Rightarrow \frac{5}{2} < -2b < 6$ olur. ... (II)

(I) ve (II) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$\frac{5}{2} < a^2 - 2b < \frac{25}{36} + 6$

$\frac{5}{2} < a^2 - 2b < 0,69\overline{4} + 6$

$\frac{5}{2} < a^2 - 2b < 6,69\overline{4}$

olduğundan $a^2 - 2b$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri 6 dır.

16. x , tam sayıdır.

Gönül'ün fındıkları sayısı: $5x+8$

Arzu'nun fındıkları sayısı: $3x+40$

Gönül'ün fındıkları sayısı, Arzu'nun fındıkları sayısından az olduğuna göre, Gönül'ün fındıkları sayısı en fazla kaç olabilir?

Çözüm:

Gönül'ün fındıkları sayısı, Arzu'nun fındıkları sayısından az olduğuna göre, $5x+8<3x+40$ tır.

$$5x+8<3x+40 \Rightarrow 5x-3x<40-8$$

$$\Rightarrow 2x<32$$

$$\Rightarrow x<16 \text{ dır.}$$

Bu durumda, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri 15 tir. Buna göre, Gönül'ün fındıkları sayısı en fazla,

$5x+8=5.15+8=75+8=83$ olur.

17. $0<x\le 5$ ise $x.y=10$ ifadesinde x artan değerler alırken y nasıl değişir?

A) Azalarak 2 olur. B) Artarak 2 olur.

C) Sabit kalır. D) Pozitif olarak azalır

E) Azalarak 0 olur.

Çözüm:

$0<x\le 5$ ve $x.y=10$ ise $y=\dfrac{10}{x}$ tir.

$x=\dfrac{1}{1000}$ ise $y=10000$ dir.

$x=\dfrac{1}{100}$ ise $y=1000$ dir.

$x=\dfrac{1}{10}$ ise $y=100$ dür.

$x=1$ ise $y=10$ dur.

…

$x=5$ ise $y=2$ dir.

Dikkat edilirse x artarak 5 olurken, y azalarak 2 olmaktadır.

18. m, n, p birer pozitif tam sayıdır.

$m<n<p$

$m.p=16.m-n$

olduğuna göre, $m+n+p$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$m.p=16.m-n$ ise $n=m.(16-p)$ dir.

$p=14$, $m=6$ seçilirse $n=12$ olur.

Buna göre $m+n+p$ toplamının alabileceği en büyük değer,

$m+n+p=6+12+14=32$ olur.

19. $\dfrac{1}{3}<\dfrac{a}{4}<\dfrac{9}{10}$

şartına uyan kaç tane a tam sayısı vardır?

Çözüm:

$\dfrac{1}{3}<\dfrac{a}{4}<\dfrac{9}{10}$ ise $4.\dfrac{1}{3}<4.\dfrac{a}{4}<4.\dfrac{9}{10}$

ise $\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{36}{10}$

ise $1{,}333...<a<3{,}6$ dır.

Buna göre a yerine yazılabilecek tam sayılar 2 ve 3 olmak üzere, 2 tanedir.

20. a, b, c reel sayılar olmak üzere,

$a.b>0$ ve $b.c<0$

ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $a > 0$ B) $c < 0$ C) $b + c < 0$

D) $a + c < 0$ E) $a.c < 0$

Çözüm:

$a.b$ pozitif ve $b.c$ negatiftir. Ters işaretli iki sayının çarpımı negatif olduğuna göre, $(a.b).(b.c) < 0$ dır.

$a.b^2.c < 0$ eşitsizliğinde $b^2 > 0$ olduğu için $a.c < 0$ dır.

21. a, b reel sayılardır.

$b^3 > b$ ve $a^2 < a$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

A) $a.b > b$ B) $a.b > a$ C) $a.b < 0$

D) $a + a.b < 0$ E) $-1 < a + b < 1$

Çözüm:

$b^3 > b$ ise $b > 1$ veya $-1 < b < 0$ dır.

$a^2 < a$ ise $0 < a < 1$ dir.

$b > -1$ ise $b + 1 > 0$ ve $a > 0$ olduğu için,

$a.(b + 1) > 0$ veya $ab + a > 0$ dır.

Buna göre, $a + a.b < 0$ ifadesi kesinlikle yanlıştır.

22. $x, y, z, t \in R$ olmak üzere,

$x + z = a$

$y + z = b$

$z + t = c$

$a < b$ ve $c > b$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $z < x < t$ B) $t < x < y$ C) $y < z < t$

D) $x < y < z$ E) $x < y < t$

Çözüm:

$a < b$ ise $x + z < y + z \Rightarrow x < y$ dir.

$c > b$ ise $z + t > y + z \Rightarrow t > y \Rightarrow y < t$ dir.

Buna göre, $x < y$ ve $y < t$ olduğu için (geçişme özelliğinden dolayı) $x < y < t$ dir.

23. $-5 \le x < 4$

$-6 \le y < 5$

olduğuna göre $x.y$ nin alabileceği değerlerin oluşturduğu en geniş aralığı bulunuz.

Çözüm:

$x = -5$ ve $y = -6$ iken $x.y$ en fazla $(-5).(-6) = 30$ olur.

$x = -5$ ve $y = 5$ iken $x.y$ en az $(-5).5 = -25$ olur.

Buna göre, $-25 \le x.y \le 30$ olur.

24. x ve y sıfırdan farklı birer reel sayıdır.

$x^4 < x^5$

$x.y < y$

olduğuna göre, y için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $y > 1$ B) $-1 < y < 1$ C) $0 < y < 1$

D) $y < 0$ E) $y > 0$

Çözüm:

x sıfırdan farklı reel sayı ise $x^4 > 0$ dır. Buna göre,

$$\frac{x^4}{x^4} < \frac{x^5}{x^4} \Rightarrow 1 < x \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \text{ dır.}$$

$x.y < y \Rightarrow (x - 1).y < 0 \Rightarrow y < 0$ dır.

KONU BİTMİŞTİR.