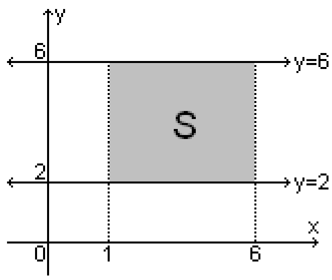
İNTEGRALİN UYGULAMALARI

A. İntegral İle Alan Arasındaki İlşki



$y = 6$ ve $y = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgeden $x = 1$ ve $x = 6$ ile sınırlanan kısmın alanını integralle ifade edelim:

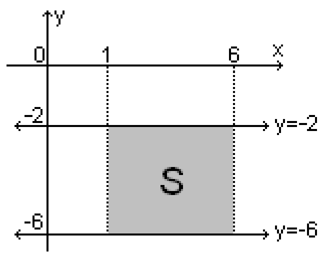
S bölgesinin alanının 20 birim kare olduğuna dikkat ediniz.

$$\int_1^6 (6-2)dx = \int_1^6 4dx = 4x\Big|_1^6 = 4.(6-1) = 20 \text{ dir.}$$

Yazdığımız integral S bölgesinin alanına eşittir. Buna göre

$$S = \int_1^6 (6-2)dx \text{ diyebiliriz.}$$

Acaba bu durum genellenebilir mi? Yani, yukarıdaki eğrinin denkleminden aşağıdakinin çıkarılmasıyla oluşan belirli integral ilgili alanı verir mi?



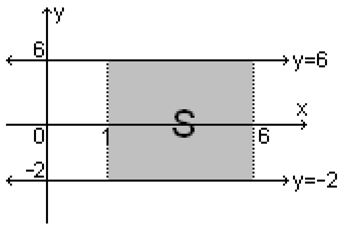
$y = -2$ ve $y = -6$ doğruları ile sınırlanan bölgeden $x = 1$ ve $x = 6$ ile sınırlanan kısmın alanını integralle ifade edelim:

S bölgesinin alanının 20 birim kare olduğuna dikkat ediniz.

$$\int_1^6 ((-2)-(-6))dx = \int_1^6 4dx = 4x\Big|_1^6 = 4.(6-1) = 20 \text{ dir.}$$

Yazdığımız integral S bölgesinin alanına eşittir. Buna göre

$$S = \int_1^6 ((-2)-(-6))dx \text{ diyebiliriz.}$$



$y = 6$ ve $y = -2$ doğruları ile sınırlanan bölgeden $x = 1$ ve $x = 6$ ile sınırlanan kısmın alanını integralle ifade edelim:

S bölgesinin alanının 40 birim kare olduğuna dikkat ediniz.

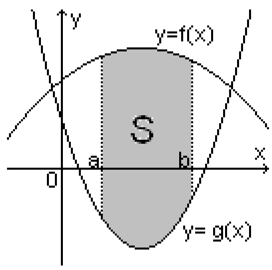
$$\int_1^6 (6-(-2))dx = \int_1^6 8dx = 8x\Big|_1^6 = 8.(6-1) = 40 \text{ tır.}$$

Yazdığımız integral S bölgesinin alanına eşittir. Buna göre

$$S = \int_1^6 (6-(-2))dx \text{ diyebiliriz.}$$

Sonuç

Ox eksenine göre, üç farklı konumda olan bölgelerin alanını integralle ilişkilendirmede ortaya çıkan sonuç şudur:



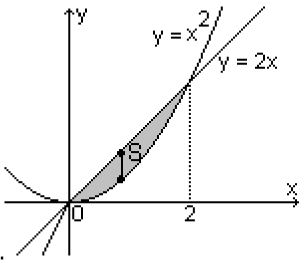
Bölge (ya da eğriler) hangi konumda olursa olsun, yukarıdaki eğrinin denkleminden aşağıdaki eğrinin denkleminin çıkarılmasıyla oluşan belirli integral bölgenin alanını ifade etmektedir.

$$S = \int_a^b (f(x)-g(x))dx \text{ tir.}$$

Örnek:

$y = x^2$ eğrisi ve $y = 2x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



İlk önce iki eğrinin kesim noktalarını bulalım.

$y = x^2$ ve $y = 2x$ ise, $x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$x.(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 2$ dir.

$x = 0$ veya $x = 2$ apsisli noktalarda bu eğri kesişir.

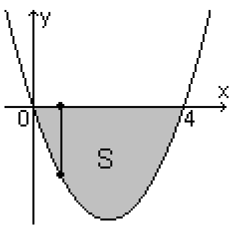
Dolayısıyla istenen alan:

$$S = \int_0^2 2x - x^2)dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$y = x^2 - 4x$ eğrisi ve Ox ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



Ox ekseni $y = 0$ doğrusudur. İlk önce eğrinin Ox eksenini hangi noktada kestiğini bulalım:

$x^2 - 4x \Rightarrow x.(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 4$ tür.

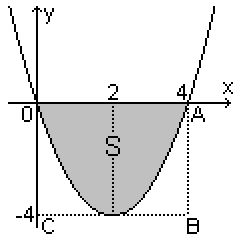
$x = 0$ veya $x = 4$ apsisli noktalarda eğri ile Ox ekseni kesişir. Dolayısıyla istenen alan:

$$S = \int_0^4 (0 - (x^2 - 4x))dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2\Bigg|_0^4$$

$$= -\frac{4^3}{3} + 2.4^2 = \frac{32}{3} \text{ birim kare bulunur.}$$

Sonuç

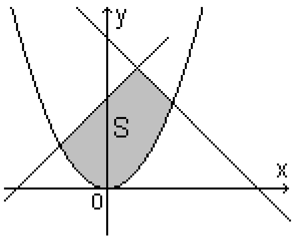
$y = x^2 - 4x$ parabolünün tepe noktasının apsisi 2 ordinatı -4 tür.



Şekildeki OABC dikdörtgeninin (her zaman kare oluşmayabilir) alanı 16 birim kare, S alanı $\frac{32}{3}$ birim karedir. Yani,

$S = \frac{2}{3}.A(OABC)$ dir.

Örnek:



Yandaki taralı alan $y = x^2$ $y = 2x + 3$ ve $y = -x + 6$ eğrileri ile sınırlanan bölgedir.

Buna göre taralı alan kaç birim karedir?

Çözüm:

$y = x^2$ parabolü ile $y = 2x + 3$ doğrusunun kesim noktasını bulalım:

$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x = -1$ dir.

($x = 3$ de kesim noktasıdır, fakat taralı alanla ilgili değildir.)

$y = x^2$ parabolü ile $y = -x + 6$ doğrusunun kesim noktasını bulalım:

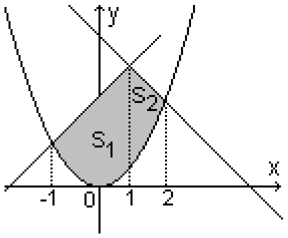
$x^2 = -x + 6 \Rightarrow x = 2$ dir.

($x = -3$ de kesim noktasıdır, fakat taralı alanla ilgili değildir)

$y = 2x + 3$ doğrusu ile $y = -x + 6$ doğrusunun kesim noktasını bulalım:

$2x + 3 = -x + 6 \Rightarrow x = 1$ dir.

Şekli bu üç noktaya göre düzenleyelim.



S alanını bir tek integral ile ifade edemeyiz.

$x = 1$ in sağında ve solunda yukarıdaki eğri farklıdır.

$$S_1 = \int_{-1}^{1} ((2x+3) - x^2)dx = x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= (1^1 + 3.1 - \frac{1^3}{3}) - ((-1)^2 + 3.(-1) - \frac{(-1)^2}{3}) = \frac{16}{3}$$

birim kare bulunur.

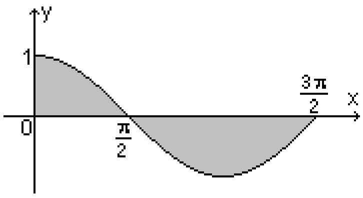
$$S_2 = \int_{1}^{2} ((-x+6) - x^2)dx = -\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{1}^{2}$$

$$= (-\frac{2^2}{2} + 6.2 - \frac{2^3}{3}) - (-\frac{1^2}{2} + 6.1 - \frac{1^3}{3}) = \frac{13}{6}$$

birim kare bulunur.

$$S = S_1 + S_2 = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2} \text{ birim karedir.}$$

Örnek:



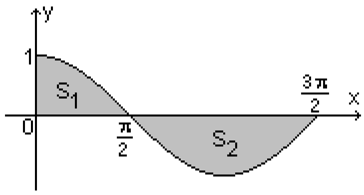
Yukarıdaki taralı olan $y = \cos x$ eğrisi ile Ox ekseni ve oy ekseni ile sınırlanan bölgedir.

Buna göre, taralı alan kaç birim karedir?

Çözüm:

Taralı alanı bir tek integral ile ifade edemeyiz.

$x = \frac{\pi}{2}$ nin sağında ve solunda yukarıdaki eğri farklıdır.



$$S_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 0)dx = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin = 1$$

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (0 - \cos x)dx = -\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2$$

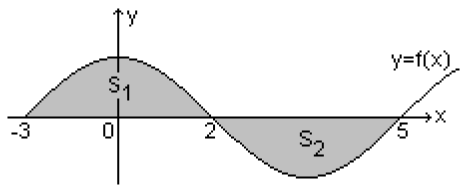
$$S = S_1 + S_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 0)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (0 - \cos x)dx$$

$$= 1 + 2 = 3 \text{ birim karedir.}$$

2.Yol

$\cos x$ fonksiyonu periyodiktir. Bunun için, S_1 alanını hesaplamak yeterli olur. Şekilden de anlaşılacağı gibi $S_2 = 2S_1$ dir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$S_1 = 10$ birim kare

$S_2 = 4$ birim kare

olduğuna göre $\int_{-3}^{5} f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

S_1 bölgesini yukarıdan $f(x)$, aşağıdan Ox (y = 0 doğrusu) sınırlandırmaktadır. Buna göre,

$$S_1 = \int_{-3}^{2} (f(x) - 0)dx = \int_{-3}^{2} f(x)dx = 10 \text{ olur.}$$

S_2 bölgesini yukarıdan Ox (y = 0 doğrusu) , aşağıdan $f(x)$ fonksiyonu sınırlandırmaktadır. Buna göre,

$$S_2 = \int_{2}^{5} (0 - f(x))dx = -\int_{2}^{5} f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_{2}^{5} f(x)dx = -4$$

olur.

$$\int_{-3}^{5} f(x)dx = \int_{-3}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx = 10 - 4 = 6 \text{ olur.}$$

Sonuç:

Yukarıdaki örnekten yola çıkarak, şunları söyleyebilir:

1. Hangi konumda olursa olsun, alan daima pozitif bir reel sayı ile ifade edilir.

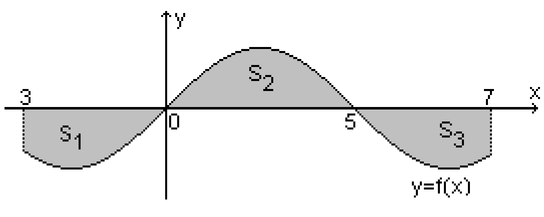
2. Belirli integralin değeri bir reel sayıdır. (Pozitif, negatif ya da sıfırdır.)

3. İntegral ile alan ilişkilendirilirken,

a) Alan Ox ekseninin üzerindeyse, alanı ifade eden sayı integrali de ifade eder.

b) Alan Ox ekseninin altındaysa, alanı ifade eden sayının toplama işlemine göre tersi integrali ifade eder.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde $S_1 = 6$ br^2 , $S_2 = 10$ br^2 ve $S_3 = 8$ br^2 olduğuna göre, $\int_{-3}^{7} f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

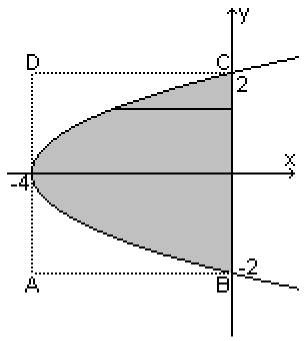
$$\int_{-3}^{7} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{7} f(x)dx$$

$$= -S_1 + S_2 - S_3 = -6 + 10 - 8 = -4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$x = y^2 - 4$ eğrisi ile y ekseninin sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



x, y ye bağlı ifade edildiği için y yi çekip x e göre integral almak yerine, y ye göre integral almak kolaylık sağlar.

$$S = \int_{-2}^{2} [0 - (y^2 - 4)]dy = -\int_{-2}^{2} (y^4 - 4)dy$$

$$= -2.\int_{0}^{2} (y^4 - 4)dy = -2.(\frac{y^3}{3} - 4y)\Big|_0^2$$

$$= -2.(\frac{2^3}{3} - 4.2) = \frac{32}{3} \text{ birim karedir.}$$

2.Yol

$$S = \frac{2}{3}.A(ABCD) = \frac{2}{3}.|AB|.|BC| = \frac{2}{3}.4.4 = \frac{32}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

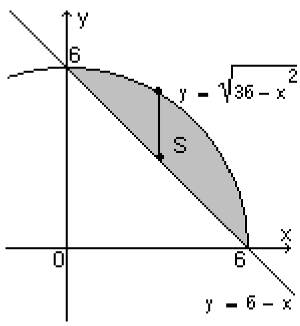
$\int_0^6 \left[\sqrt{36-x^2} - (6-x)\right]dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\int_0^6 \left[\sqrt{36-x^2} - (6-x)\right]dx$ integrali yukarıdan

$y = \sqrt{36-x^2}$ ile aşağıdan $y = 6 - x$ ile sınırlanan bölgenin $x = 0$ ile $x = 6$ tarafından sınırlanan kısmını ifade eder.

Bu koşullara uygun şekli oluşturalım:



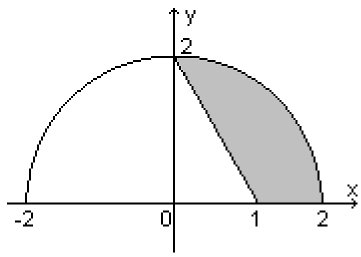
Şekildeki daire kesmesi, 90 derecelik merkez açıya karşılık gelen daire diliminden, kesmeyi gören ikizkenar dik üçgenin alanının çıkarılmasıyla bulunur.

$$\int_0^6 \left[\sqrt{36-x^2} - (6-x)\right]dx = S$$

$S = \frac{1}{4}.\pi.6^2 - \frac{1}{2}.6.6 = 9.(\pi - 2)$ olur. O halde,

$$\int_0^6 \left[\sqrt{36-x^2} - (6-x)\right]dx = 9.(\pi - 2) \text{ dir.}$$

Örnek:



Yukarıdaki şekilde, yarı çember, bir doğru parçası ve Ox ekseni ile sınırlanan taralı alan verilmiştir. Buna göre taralı bölgenin alanını veren integrali yazalım.

Çözüm:

Şekilde verilen yarım çemberin birinci bölgedeki (x > 0 ve y > 0) kısmı ile taralı alan oluşturulduğu için, ilgili kısmın denklemi:

$x^2 + y^2 = 4$ tür.

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4 - y^2}$ dir.

Verilen doğru parçasını üzerinde bulunduran doğrunun denklemi:

$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2-y}{2}$ olur.

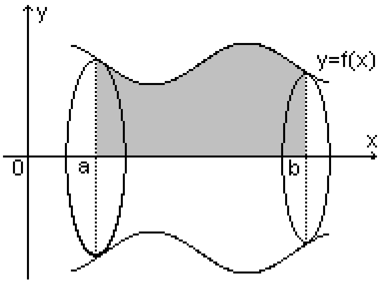
Taralı bölgenin alanını, Ox eksenine göre integral alarak hesaplamak iki belirli integral yamayı gerektirir. Çünkü $x = 1$ in sağında ve solunda aşağıdaki eğri farklıdır. Uygun olan taralı bölgenin alanını Oy eksenine göre integral alarak hesaplamaktır. Buna göre taralı alanı,

$S = \int_0^2 \left[\sqrt{4-y^2} - \left(\frac{2-y}{2}\right)\right]dy$ ifadesi belirtir.

B. İntegral İle Hacim Arasındaki İlşki

Belirli integral ile hacim hesabı arasında, alan ile belirli integral arasındaki gibi bir yaklaşımla ilişki kurulabilir. Ancak, doğrudan sonuçları vermekle konuyu ortaya koyacağız.

Kural



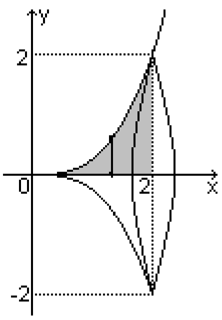
$y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox ekseni ile sınırlanan bölgenin (taralı bölge) x ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi:

$$V = \pi.\int_a^b [f(x)]^2\,dx \text{ birim küptür.}$$

Örnek:

$y = \dfrac{x^3}{4}$ eğrisi, $y = 0$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin x ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



$$V = \pi.\int_0^2 [\frac{x^3}{4}]^2\,dx$$

$$= \pi.\int_0^2 \frac{x^6}{16}\,dx$$

$$= \pi.\frac{x^7}{16.7}\Bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{7} \text{ birim küptür.}$$

Kural

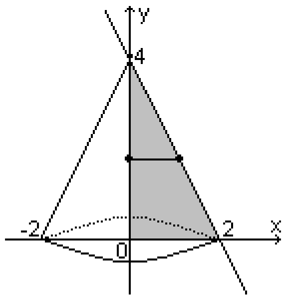
$x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy ekseni ile sınırlanan bölgenin y ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi:

$$V = \pi.\int_c^d [g(y)]^2\,dy \text{ birim küptür.}$$

Örnek:

$S = \{(x,y) : 2x + y \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ yüzeyinin y ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



S yüzeyi Oy ekseni etrafında döndürüleceği için $y = 0$ ile $y = 4$ aralığında,

$x = \dfrac{4-y}{2}$ ile y ye göre hacmi veren integral düzenlenir.

$$V = \pi.\int_0^4 \left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy = \pi.\int_0^4 \left(16 - 8y + y^2\right)dy$$

$$= \frac{\pi}{4}.\left[16y - 4y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^4$$

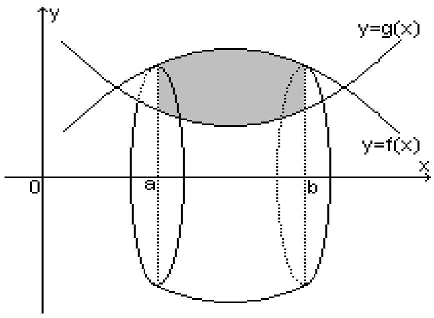
$$= \frac{16\pi}{3}\ br^3 \text{ olur.}$$

2.Yol

S yüzeyinin y ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan cisim, yarıçapı 2 birim ve yüksekliği 4 birim olan dik konidir. Buna göre oluşan koninin hacmi, koninin hacim formülü yardımıyla,

$$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h = \frac{1}{3}.\pi.2^2.4 = \frac{16\pi}{3}\ br^3 \text{ bulunur.}$$

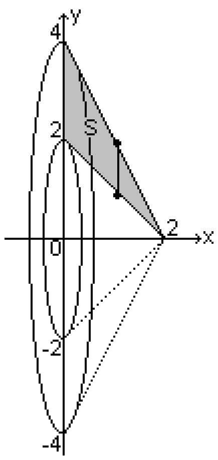
Kural



$y = g(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve $y = f(x)$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin (taralı bölge) Ox ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi:

$$V = \pi.\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}dx \text{ birim küptür.}$$

Örnek:



$y = -x + 2$

$y = -2x + 4$

doğruları ve Oy ekseni ile sınırlanan yüzeyin Ox ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:

$$V = \pi.\int_0^2 \left[(-2x+4)^2 - (-x+2)^2\right]dx$$

$$= \pi.\int_0^2 (3x^2 - 12x + 12)dx$$

$$= \pi.(x^3 - 6x^2 + 12x)\Big|_0^2 = 8\pi \text{ birim küptür.}$$

2.Yol

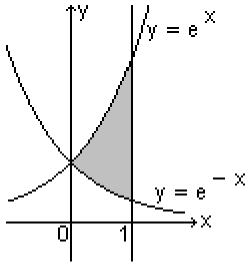
S yüzeyinin Ox ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan, cisim yarıçapı 4 birim ve 2 birim yüksekliği 2 birim olan iç içe iki dik konidir. Buna göre oluşan koninin hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 - r_2^2)h = \frac{1}{3}\pi(4^2 - 2^2).2 = 8\pi \text{ birim küptür.}$$

Örnek:

$y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ eğrileri ve $x = 1$ doğrusu arasında kalan alanın Ox ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



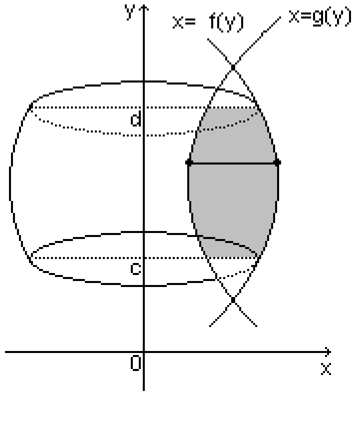
$y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ eğrileri ve $x = 1$ doğrusunun grafiği yandaki şekilde verilmiştir. Şekildeki taralı alanın Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmi,

$$V = \pi.\int_0^1 \left[(e^x)^2 - (e^{-x})^2\right]dx$$

$$= \pi.\int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x})dx$$

$$= \pi.\left[\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi.(e^2 + e^{-2} - 2)}{2} \text{ birim küptür.}$$

Kural



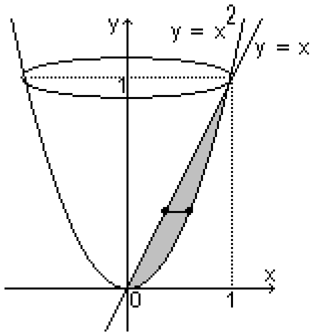
$x = f(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve $x = g(y)$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin Oy ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi:

$$V = \pi.\int_c^d \left\{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\right\}dy \text{ birim küptür.}$$

Örnek:

$y = x^2$ parabolüyle $y = x$ doğrusunun sınırladığı bölgenin y ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



$y = x^2$ ise $x = \sqrt{y}$ dir.

$y = x$ ise $x = y$ dir.

Buna göre,

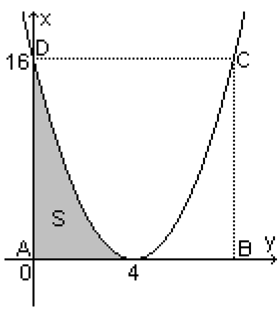
$$V = \pi.\int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - (y)^2\right]dy = \pi.\int_0^1 \left[y - y^2\right]dy$$

$$= \pi.\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \pi.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ birim küptür.}$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $y = x^2 - 8x + 16$ parabolünün eksenler ile sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



$$S = \int_0^4 (x^2 - 8x + 16)dx$$

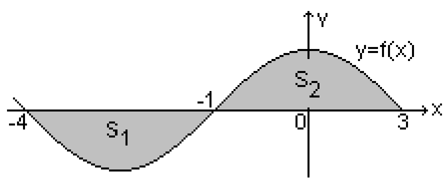
$$= \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{4^3}{3} - 4.4^2 + 16.4 = \frac{64}{3}$$

2.Yol

$$S = \frac{1}{3}.A(ABCD) = \frac{1}{3}.|AB|.|AD| = \frac{1}{3}.4.16 = \frac{64}{3} \text{ tür.}$$

2.



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ in grafiği verilmiştir. Şekilde, taralı alanların toplamı 18 birim karedir.

$\int_{-4}^{3} f(x)dx = 8$ olduğuna göre, $\int_{-4}^{-1} f(x)dx$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

Şekilde taralı alanların toplamı 18 birim kare ise,

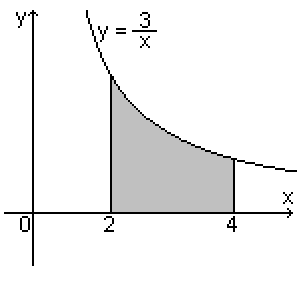
$S_1 + S_2 = 18$ dir.

$$\int_{-4}^{3} f(x)dx = \int_{-4}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{3} f(x)dx \Rightarrow -S_1 + S_2 = 8 \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 + S_2 &= 18 \\ -S_1 + S_2 &= 8 \end{aligned}\right\} S_1 = 5 \text{ ve } S_2 = 13 \text{ bulunur.}$$

$$\int_{-4}^{-1} f(x)dx = -S_1 = -5 \text{ bulunur.}$$

3.



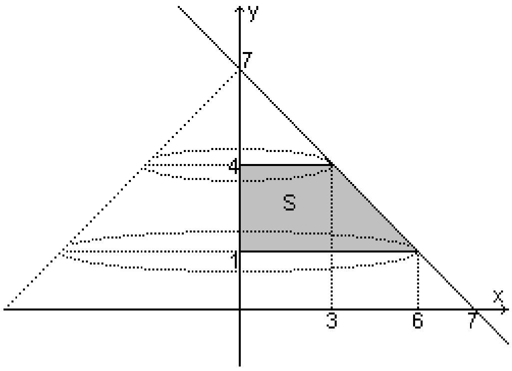
Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:

$$S=\int_2^4 \frac{3}{x}dx = 3.\ln x\Big|_2^4 = 3.(\ln 4-\ln 2)=3\ln\frac{4}{2}=3\ln 2 \text{ dir.}$$

4. $S=\{(x,y): x+y\le 7,\ x\ge 0,\ 1\le y\le 4\}$ yüzeyinin y ekseni etrafında 360^{o} döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



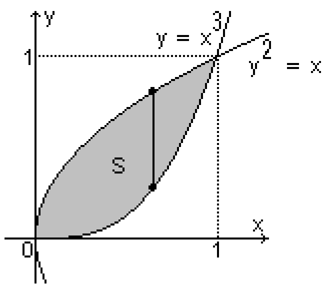
S yüzeyinin y ekseni etrafında döndürülmesiyle alt taban yarıçapı 6 birim, üst taban yarı çapı 3 birim olan kesik koni oluşur.

Buna göre, kesik koninin hacmi:

$$V=\frac{1}{3}.\pi.(6^2.6-3^2.3)=63\pi \text{ birim küptür.}$$

5. $y=x^3$ ve $y^2=x$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



$y=x^3$ ve $y^2=x$ eğrilerinin kesim noktaları (0,0) ve (1,1) dir.

$y^2=x \Rightarrow y=\sqrt{x}$ tir.

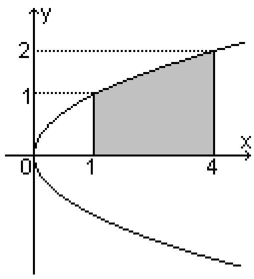
Buna göre,

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)dx=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^3)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12} \text{ birim karedir.}$$

6. $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$ ve $x=4$ ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

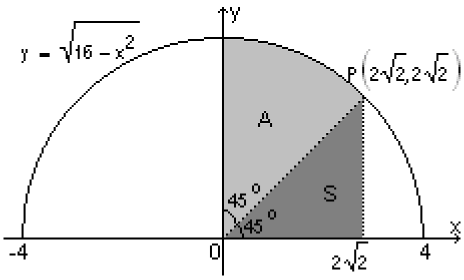
Çözüm:



$$S=\int_1^4\sqrt{x}dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Bigg|_1^4=\frac{14}{3} \text{ birim karedir.}$$

7. $\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:



Şekildeki taralı alanlar toplamını ifade eden reel sayı

$\int_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2}\,dx$ integralini de ifade eder. Çünkü taralı alanlar Ox ekseninin üzerindedir.

Buna göre, integrali hesaplamak, şekildeki taralı alanlar toplamını bulmak anlamına gelir.

$x = 2\sqrt{2}$ için,

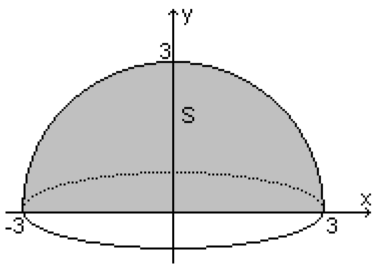
$y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ dir.

Buna göre,

$$\int_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2}\,dx = A + S = \frac{\pi.4^2}{8} + \frac{2\sqrt{2}.2\sqrt{2}}{2} = 2\pi + 4 \text{ tür.}$$

8. $S = \{(x, y) : y \leq \sqrt{9 - x^2},\ y \geq 0\}$ yüzeyinin y ekseni etrafında 180^o döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



S yüzeyinin y ekseni etrafında 180^o döndürülmesiyle oluşan cisim, yarıçapı 3 birim olan yarım küredir. Buna göre oluşan yarım kürenin hacmi:

$y = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{2}{3}.\pi.3^3 = 18\pi\ br^3$ olur.

KONU BİTMİŞTİR.