BELİRLİ İNTEGRAL

Belirli integral matematik analizin temel konularından biridir. Birçok bilim dalında uygulama alanı vardır. Eğrilerin sınırladığı alan, hacim, eğri uzunluğu, iş, hız, eylemsizlik momenti gibi hesaplamalar belirli integral yardımıyla hesaplanır.

A. Belirli İntegral

$\int f(x)dx = F(x) + c$ olmak üzere, $\int_a^b f(x)dx$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun a dan b ye belirli integrali denir.

Belirli integralin eşitini $F(x)\Big|_a^b$ ya da $\Big[F(x)\Big]_a^b$ gösterimlerinden biriyle yapacağız.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ dır.}$$

Örnek:

$\int_0^3 x^2dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 \text{ olur.}$$

Uyarı

Daima sadeleşeceği için, integral sabiti olan c belirli integralde yazılmaz.

B. Belirli İntegralin Özellikleri

Örnek:

$\int_2^2 x^2dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int_2^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 0 \text{ olur.}$$

Sonuç

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

$\int_3^0 x^2dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int_3^0 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_3^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{3^3}{3} = -9 \text{ olur.}$$

Sonuç

Belirli integralde sınırların yerleri değiştirildiğinde sonucun işareti değişir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ tir.}$$

Örnek:

$\int_0^1 x^2dx + \int_1^3 x^2dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int_0^1 x^2dx + \int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 \text{ olur.}$$

Sonuç

$a < c < b$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ tir.

Örnek:

$$\int_1^3 \left|x^2 - 2x\right| dx$$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

Mutlak değer fonksiyonunu, tablosunu yaparak ya da grafiğini çizerek, ya da kritik noktalarını belirleyerek mutlak değerden kurtarıp sonuçlandırabiliriz.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\left\|x^2-2x\right\|$		x^2-2x	0	$-x^2+2x$	0	x^2-2x	

$$\left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} -x^2 + 2x\ , & 1 < x < 2 \\ x^2 + 2x\ , & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

$$\int_1^3 \left|x^2 - 2x\right| dx = \int_1^2 (-x^2 + 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + x^2 \Bigg|_1^2 + \frac{x^3}{3} - x^2 \Bigg|_2^3 \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$$

$$= (-\frac{2^3}{3} + 2^2) - (-\frac{1^3}{3} + 1^2) + (\frac{3^3}{3} - 3^2) - (\frac{2^3}{3} - 2^2) = 2$$

bulunur.

Sonuç

Mutlak değer, işaret ve tam değer fonksiyonlarının integralleri, fonksiyonun işaret değiştirdiği noktalar göz önüne alınarak sonuçlandırılır.

Örnek:

$$\int_{-1}^2 x.\mathrm{sgn}(x-1)\,dx$$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\mathrm{sgn}(x-1) = \begin{cases} -1\ , & x < 1 \\ +1, & x > 1 \end{cases}$$ olduğundan,

$$\int_{-1}^2 x.\mathrm{sgn}(x-1)\,dx = \int_{-1}^1 -x\,dx + \int_1^2 x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^1 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = -\frac{1^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$$ dir.

Örnek:

$$\int_1^8 \left\|\frac{x+1}{3}\right\| dx$$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$1 < x < 2 \Rightarrow \left\|\frac{x+1}{3}\right\| = 0$$ dır.

$$2 \le x < 5 \Rightarrow \left\|\frac{x+1}{3}\right\| = 1$$ dir.

$$5 \le x < 8 \Rightarrow \left\|\frac{x+1}{3}\right\| = 2$$ dir.

$$\int_1^8 \left\|\frac{x+1}{3}\right\| dx = \int_1^2 \left\|\frac{x+1}{3}\right\| dx + \int_2^5 \left\|\frac{x+1}{3}\right\| dx + \int_5^8 \left\|\frac{x+1}{3}\right\| dx$$

$$= \int_1^2 0dx + \int_2^5 1dx + \int_5^8 2\,dx$$

$$= 0 + x\Big|_2^5 + 2x\Big|_5^8 = (5-2) + 2.(8-5) = 9$$ olur.

Sonuç

$f(x)$ fonksiyonu sürekli ve çift ise,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \text{ tir.}$$

Örnek:

$\int_{-2}^{2} x^2\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$f(x) = x^2$ fonksiyonu çift fonksiyondur. Buna göre,

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2.\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = 2.\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ olur}$$

Sonuç

$f(x)$ fonksiyonu sürekli ve tek ise,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

$\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$f(x) = x^3$ fonksiyonu tek fonksiyondur. Buna göre,

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^3}{4} = 0 \text{ olur.}$$

Kural

$$\int_{a}^{b} \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx \text{ tir.}$$

Örnek:

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 x\,dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

Toplamı oluşturan integrallerin sınırları eşit olduğundan, toplamın integrali olarak yazabiliriz.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 x\,dx + \cos^2 x)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1dx = x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

Kural

$$\int_{a}^{b} \left[k.f(x)\right]dx = k.\int_{a}^{b} f(x)dx \quad \text{tir.}$$

Sonuç

Belirli integrali buraya kadar verilen bilgilerle sınırlayamayız. Ancak, integral alma ve fonksiyonlar konusuyla birlikte düşünülürse verilen bilgiler yeterli olur.

C. İntegral-Türev İlişkisi

Kural

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\} = f(x) \text{ tir.}$$

$f(x)$ in integralinin türevi kendisidir.

Örnek:

$\int f(x)dx = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ olduğuna göre $f(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$\int f(x)dx = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ ise,

$$\frac{d}{x}\left\{\int f(x)dx\right\} = \frac{d}{x}\left\{x^3 + 4x^2 - 3x + 1\right\}$$

$f(x) = 3x^2 + 8x - 3$ olur.

Kural

$$\int \left\{\frac{df(x)}{dx}\right\}dx = f(x) + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int \frac{df(x)}{dx}dx = \int \left(6x^2 - 4x + 1\right)dx$ olduğuna göre $f(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$\frac{df(x)}{dx} = 6x^2 - 4x + 1$ ise,

$$\int \frac{df(x)}{dx}dx = \int \left(6x^2 - 4x + 1\right)dx$$

$f(x) = 6x^2 - 4x + 1$ olur.

Kural

Diğer iki kuralı daha önce vermiştik. Tekrarlamamızın sebebi, aşağıdaki kurala hazırlık yapmaktır.

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)dx$ ise,

$$F'(x) = v'(x).f\left[v(x)\right] - u'.f\left[u(x)\right]$$

Örnek:

$F(x) = \int_{2x}^{x^3-1} t^2\,dt$ olduğuna göre $F'(-1)$ kaçtır?

Çözüm:

$$F'(x) = (x^3-1)'.(x^3-1)^2 - (2x)'.(2x)^2$$

$$= 3x^2.(x^3-1)^2 - 2.(2x)^2$$

$F(-1) = 3.(-1)^2.((-1)^3 - 1)^2 - 2.(2.(-1))^2 = 4$ tür.

Örnek:

$\frac{d}{x}\left\{\int_1^8 (x^2 + x + 1)\,dx\right\}$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\int_1^8 (x^2 + x + 1)\,dx$ integralinin sonucu bir reel sayıdır.

Bir reel sayının türevi sıfır olduğundan,

$\frac{d}{x}\left\{\int_1^8 (x^2 + x + 1)\,dx\right\} = 0$ dır.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $\int_a^{\frac{\pi}{4}} -2(\sin^4 x - \cos^4 x)dx = \frac{1}{2}$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x).(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$= 1.(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ tir.

$\int_a^{\frac{\pi}{4}} -2.(\sin^4 x - \cos^4 x)dx = \frac{1}{2}$ ise,

$\Rightarrow \int_a^{\frac{\pi}{4}} -2.(-\cos 2x)dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_a^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2x\Big|_a^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) - \sin 2a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow a = \frac{\pi}{12}$ olur.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\, dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x.\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x).\cos x dx$

Son integralde, $\sin x = t$ alınırsa, $\cos x\, dx = dt$ olur . değişken değiştirirken x e verilen sınırların t ye göre alacağı değerler bulunup, yerine yazılmalıdır.

Buna göre,

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x).\cos x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)dt$

$= t - \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{11}{24}$ tür.

3. $\int_0^2 |x|.|x-1|\, dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$|x|.|x-1| = |x.(x-1)| = |x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & x \le 0 \text{ veya } x \ge 1 \\ -x^2 + x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

olduğu için,

$\int_0^2 |x|.|x-1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx$

$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$

$= (-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}) - (-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2}) + (\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}) - (\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}) = 1$

4. $\int_a^b (2x - 3)\, dx = 50$ ve a + b = 13 olduğuna göre a.b çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$\int_a^b (2x-3)\, dx = 50 \Rightarrow x^2 - 3x\Big|_a^b = 50$

$\Rightarrow b^2 - 3b - a^2 + 3a = 50 \Rightarrow (b^2 - a^2) - 3(b - a) = 50$

$\Rightarrow 13.(b-a) - 3(b-a) = 50 \Rightarrow 10.(b-a) = 50$

$\Rightarrow b - a = 5$ olur.

$\left.\begin{array}{l} b-a=5 \\ a+b=13 \end{array}\right\}$ ise $a=4$ ve $b=9 \Rightarrow a.b=36$ olur.

5. $d\left\{\int e^{8x}dx\right\}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$d\left\{\int e^{8x}dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int e^{8x}dx\right\}dx = e^{8x}dx \text{ bulunur.}$$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{16}} 8\cos 8x\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\int_0^{\frac{\pi}{16}} 8\cos 8x\,dx = \sin 8x\Big|_0^{\frac{\pi}{16}} = \sin(8.\frac{\pi}{16}) - \sin 0 = 1 \text{ bulunur.}$$

7. $\int_0^1 \frac{(x^2+1).2x}{(x^2+1)^2+1}dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + c \text{ olduğu için,}$$

$$\int_0^1 \frac{(x^2+1).2x}{(x^2+1)^2+1}dx = \frac{1}{2}.\ln[(x^2+1)^2+1]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}.(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2}.\ln\frac{5}{2}$$

$$= \ln\sqrt{\frac{5}{2}} = \ln\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ olur.}$$

8. $0 < a < \frac{\pi}{3}$ olmak üzere, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4 x + \tan^2 x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$u = \tan x$ alınırsa $du = (1+\tan^2 x)dx$ olur. Buna göre,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4 x + \tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.(\tan^2 x + \tan x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du = \frac{u^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan^3\frac{\pi}{4}}{3} - \frac{\tan^3 0}{3} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

9. $\int_1^2 \left\lVert x^2 \right\rVert.\mathrm{sgn}(2x+3)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$1 < x < 2$ ise $2x+3 > 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}(2x+3) = 1$ dir.

$1 < x < \sqrt{2}$ ise $\left\lVert x^2 \right\rVert = 1$ dir.

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ ise $\left\lVert x^2 \right\rVert = 2$ dir.

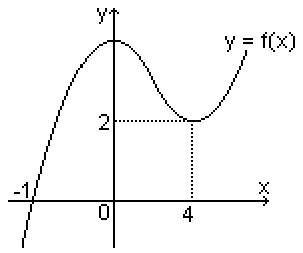
$\sqrt{3} < x < 2$ ise $\left\lVert x^2 \right\rVert = 3$ tür.

Buna göre,

$$\int_1^2 \left\lVert x^2 \right\rVert.\mathrm{sgn}(2x+3)dx = \int_1^{\sqrt{2}} 1dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2dx + \int_{\sqrt{3}}^2 3dx$$

$$= x\Big|_1^{\sqrt{2}} + 2x\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + 3x\Big|_{\sqrt{3}}^2 = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

10.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre

$$\int_{-1}^{4} f'(x).f(x)dx$$

integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Grafikte verilenlere göre,
$f(-1) = 0$ ve $f(4) = 2$ dir. Buna göre,

$$\int_{-1}^{4} f'(x).f(x)dx = \left.\frac{[f(x)]^2}{2}\right|_{-1}^{4} = \frac{[f(4)]^2}{2} - \frac{[f(-1)]^2}{2}$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2 \text{ olur.}$$

11. $f(x-1) = \begin{cases} 3.(x-1)^2 & , x \geq 3 \\ 4x & , x < 3 \end{cases}$ olduğuna göre,

$\int_{1}^{4} f(x-1)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x - 1 = t$ olsun. Bu durumda $dx = dt$ olur.

$x = 1$ için $t = 0$

$x = 4$ için $t = 3$ olur.

Değişken değiştirirken, sınırların da buna göre değişeceğine dikkat ediniz.

$$f(t) = \begin{cases} 3.t^2 & , t \geq 2 \\ 4.(t+1) & , t < 2 \end{cases}$$ olduğuna göre,

$$\int_{1}^{4} f(x-1)dx = \int_{0}^{3} f(t)dt = \int_{0}^{2} 3t^2dt + \int_{2}^{3} (4t+4)dt$$

$$= t^3\Big|_0^2 + (2t^2 + 4t)\Big|_2^3 = 22 \text{ dir.}$$

12. $a \neq 0$ olmak üzere, $\left(\int_0^a x\,dx\right)^3 = \int_0^a x^3dx$ olduğuna göre a^2 kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\int_0^a x\,dx\right)^3 = \int_0^a x^3dx \text{ ise,}$$

$$\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a\right)^3 = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^a \Rightarrow \left(\frac{a^2}{2}\right)^3 = \frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^6}{8} = \frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{8}{4} = 2 \text{ dir.}$$

13. $f(x) = \int_0^{\ln x} e^t dt$ olduğuna göre $f'(x)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)dx \text{ ise,}$$

$F'(x) = v'(x).f[v(x)] - u'.f[u(x)]$ olduğundan,

$$f(x) = \int_0^{\ln x} e^t dt = (\ln x)'.e^{\ln x} - (0)'.e^0 = \frac{1}{x}.x - 0 = 1 \text{ dir.}$$

Logaritma konusundan, $e^{\ln x} = x$ olduğunu hatırlayınız.

14. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ olduğuna göre, $\int_1^3 d\left[f^{-1}(x)\right]$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

Verilen fonksiyonun tersini bulup, integralin sonucundaki değerler hesaplanıp yerine yazılarak, sonuca gidilir.

$f(x) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x}{x-2}$ dir.

$\int_1^3 d\left[f^{-1}(x)\right] = f^{-1}(x)\Big|_1^3 = f^{-1}(3) - f^{-1}(1) = -4$ bulunur.

15. $f'(x) = 3x^2 + 2x$ ve $f(1) = 4$ olduğuna göre $f(-1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow \int f'(x)dx = \int (3x^2 + 2x)dx$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c = x^3 + x^2 + c$

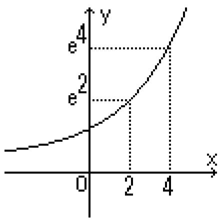
$f(1) = 4$ olduğuna göre,

$f(1) = 1^3 + 1^2 + c = 4 \Rightarrow c = 2$ dir.

Buna göre,

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 2 = 2$ bulunur.

16.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

Buna göre

$\int_2^4 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

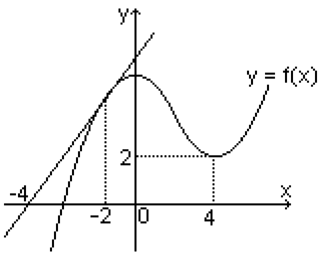
Grafikte verilenlere göre,

$f(2) = e^2$ ve $f(4) = e^4$ tür. Buna göre,

$\int_2^4 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|\Big|_2^4 = \ln|f(4)| - \ln|f(2)|$

$= \ln e^4 - \ln e^2 = 4.1 - 2.1 = 2$ dir.

17.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre

$\int_{-2}^4 f''(x).f'(x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x = -2$ deki teğetin eğimi 1 olduğu için $f'(-2) = 1$ dir.

$x = 4$ noktası yerel minimum olduğuna göre, $f'(4) = 0$ dır.

Buna göre,

$\int_{-2}^4 f''(x).f'(x)dx = \frac{f'(x)^2}{2}\Big|_{-2}^4 = \frac{f'(4)^2}{2} - \frac{f'(-2)^2}{2} = -\frac{1}{2}$ dir.

KONU BİTMİŞTİR.