BELİRSİZ İNTEGRAL

Türev işleminin tersi integraldir. Diğer bir ifadeyle, $f(x)$ in türevi $g(x)$ ise, $g(x)$ in integrali $f(x)$ tir. Bir sabit sayı farkla, türev işleminin tersi türevdir.

A. Diferansiyel Kavramı

x in sonsuz küçük değişimi dx şeklinde gösterilir. Buna x değişkeninin diferansiyeli denir.

Fonksiyondaki değişim dy ile gösterilir.

$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$ tir.

$dy = f'(x)dx$ ifadesine $y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ fonksiyonunun diferansiyelini yazalım.

Çözüm:

$f(x) = x^2 + 3x - 1$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x - 1) \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 2x + 3$$

$\Rightarrow d(f(x)) = (2x + 3)dx$ tir.

Örnek:

$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun $x = 2$ için diferansiyelini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 1) \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 3x^2 \Rightarrow d(f(x)) = 3x^2dx$$

$\Rightarrow d(f(2) = 3.2^2 dx = 12dx$ tir.

Örnek:

$f(x) = \ln(\sin x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ için diferansiyelini bulalım.

Çözüm

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{\cos x}{\sin} = \cot x$$

$$\Rightarrow d(f(x)) = \cot x\, dx$$

$$\Rightarrow d(f(\frac{\pi}{4})) = \cot\frac{\pi}{4}dx$$

$\Rightarrow d(f(\frac{\pi}{4})) = 1.dx = dx$ tir.

B. Belirsiz İntegral

Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in belirsiz integrali denir ve

$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in R$ şeklinde gösterilir.

Buradaki $\int$ sembolüne integral işareti, $f(x)$ fonksiyonundan $F(x) + c$ fonksiyonunun bulunmasını sağlayan işleme integral alma işlemi, $F(x) + c$ fonksiyonuna da $f(x)$ in ilkel fonksiyonu denir.

Örnek:

$(x^3 + 5)$ in türevi $3x^2$ dir.

$(x^3 + 2)$ nin türevi $3x^2$ dir.

$(x^3 - 5)$ in türevi $3x^2$ dir.

Türev işleminin tersi integral olduğuna göre, $3x^2$ nin integralinin $(x^3 + 5)$ ya da $(x^3 + 2)$ ya da $(x^3 - 5)$ olduğunu söyleyebiliriz.

Görüldüğü gibi, sabit sayı farklı olabilmektedir. Bunun nedeni, bütün sabit sayıların türevinin sıfır oluşudur.

$3x^2$ nin integralinin $(x^3 + 5)$, $(x^3 + 2)$, $(x^3 - 5)$ ifadelerinin hepsi olabileceği için, c bir reel sayı olmak üzere

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c \text{ olur.}$$

Örnek:

$\int 4x^3 dx$ belirsiz integralini araştıralım.

Çözüm:

$\int 4x^3 dx$ belirsiz integrali, türevi $4x^3$ olan fonksiyondur.

x^4 ün türevi $4x^3$ olduğuna göre $\int 4x^3 dx = x^4$ olabilir.

$x^4 + 10$ un türevi olduğuna göre $\int 4x^3 dx = x^4 + 10$ olabilir.

$x^4 - 10$ un türevi olduğuna göre $\int 4x^3 dx = x^4 - 10$ olabilir.

Görüldüğü gibi türevi $4x^3$ olan pek çok fonksiyon vardır, c bir reel sayısının türevi sıfır olduğuna göre,

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c \text{ olur.}$$

Sonuç

$f(x)$ in integralini bulmak, türevi $f(x)$ 'e eşit olan fonksiyonu bulmaktır.

C. İntegral Alma Kuralları

Kural

$n = -1$ olmak üzere,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int x^3 dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c \text{ olur.}$$

Uyarı

$\frac{x^4}{4} + c$ ifadesinin türevinin x^3 olduğuna dikkat ediniz.

Örnek:

$\int \sqrt[3]{x^2} dx$ belirsiz integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3.\sqrt[3]{x^5}}{5} + c$$

Kural

$a \in R$ olmak üzere,

$$\int a dx = ax + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int 10 dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int 10 dx = 10x + c$$

Örnek:

$\int dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\int dx = \int 1dx = x + c$ olur.

Özellik

$a \in R$ olmak üzere,

$\int a.f(x)dx = a.\int f(x)dx$ dir.

Örnek:

$\int 6x^2dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int 6x^2dx = 6.\int x^2dx = 6.\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 2x^3 + c \text{ olur.}$$

Özellik

$a \in R$ olmak üzere,

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ dir.

Örnek:

$\int (x^4 - 10x + 2)dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int (x^4 - 10x + 2)dx = \int x^4dx - 10.\int x\,dx + \int 2dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} - 10.\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2.x + c$$

$$= \frac{x^5}{5} - 5x^2 + 2x + c$$

Örnek:

$\int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}dx = \int (x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$$

$$= \int \sqrt{x}dx + \int dx + \int x^{-1/2}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + x + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x + 2\sqrt{x} + c$$

Kural

$c \in R$ olmak üzere,

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ dir.

Örnek:

$\int \frac{x^4 - 10x^3 + x + 2}{x^2}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int \frac{x^4 - 10x^3 + x + 2}{x^2}dx = \int (x^2 - 10x + \frac{1}{x} + 2x^{-2})dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 10.\frac{x^2}{2} + \ln|x| + 2.\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5x^2 + \ln|x| - \frac{2}{x} + c \text{ olur.}$$

Kural

$c \in R$ olmak üzere,

$\int e^xdx = e^x + c$ dir.

Kural

$a \in R$ ve $a > 0$ olmak üzere,

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ dir.

Örnek:

$\int (2^x - e^x)dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\int (2^x - e^x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} - e^x + c$ olur.

Kural

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ dir.

Kural

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$ dir.

Örnek:

$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x.\cos x} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x.\cos x} = \frac{(\sin x + \cos x).(\sin^2 x - \sin x.\cos x + \cos^2 x)}{1 - \sin x.\cos x}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x).(1 - \sin x.\cos x)}{1 - \sin x.\cos x}$$

$$= \sin x + \cos x$$

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x.\cos x} dx = \int (\sin x + \cos x)dx$$

$$= \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c \text{ olur.}$$

Kural

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$ dir.

Örnek:

$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 2dx$$

$$= -\cot x\, dx - 2x + c$$

Kural

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$ dir.

Örnek:

$\int \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= 2x + \tan x + c \text{ bulunur.}$$

Kural

$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c = -\text{arc}\cot x + c$ dir.

Örnek:

$\int (5\sin x + \frac{2}{1+x^2})dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int (5\sin x + \frac{2}{1+x^2})dx = 5\int \sin x\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -5\cos x + 2\arctan x + c$$

Kural

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$ dir.

Uyarı

Verdiğimiz 13 tane integral kuralını, türevle ilişkilendirerek ve anlayarak öğrenmeliyiz. Ancak bu 13 kural, pek çok integrali almak için yeterli değildir. Örneğin,

$\int (2x-1)^2 dx$

$\int \frac{dx}{2x+7}$

$\int \sin\frac{x}{6}dx$

$\int x.e^x dx$

$\int \ln x\,dx$

$\int \arctan x\,dx$

integralleri verdiğimiz kurallarla hesaplanamaz.

Bu integralleri alabilmek için, integral alma yöntemlerini vereceğiz.

D. İntegral Alma Yöntemleri

b. Değişken Değiştirme Yöntemi

İntegrali alınan fonksiyon $f(u)du$ gibi daha basit bir ifadeye dönüştürülerek integral alınır.

Örnek:

$\int (2x-5)^{10}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$2x-5=u$ olsun. Bu durumda,

$2dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$ olur. Buna göre,

$$\int (2x-5)^{10}dx = \int u^{10}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{10}du$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{u^{11}}{11} + c = \frac{(2x+5)^{11}}{22} + c \text{ olur.}$$

Örnek:

$\int 3x^2.(x^3-8)dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x^3-8=u$ olsun. Bu durumda,

$3x^2dx = du$ olur. Buna göre,

$$\int 3x^2.(x^3-8)dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(x^3-8)^2}{2} + c \text{ olur.}$$

Örnek:

$\int x\sqrt{x+2}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x+2=u^2$ olsun. Bu durumda,

$dx = 2udu$ olur. Bu durumda,

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \int (u^2-2).\sqrt{u^2}.2udu = \int (2u^4-4u^2)du$$

$$= \frac{2u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{(x+5)^5}}{5} - \frac{4\sqrt{(x+2)^3}}{3} + c \text{ olur.}$$

Örnek:

$\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\ln x = u$ olsun. Bu durumda,

$\frac{1}{x}dx = du$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(\ln x)^6}{6} + c \text{ olur.}$$

Sonuç

$n \neq -1$ olmak üzere,

$$\int f'(x).[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int \frac{dx}{ax+b}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$ax + b = u$ olsun. Bu durumda,

$adx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$ olur.

Buna göre,

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{du}{a.u} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}.\ln|u| + c$$

$$= \frac{\ln|ax+b|}{a} + c \text{ olur.}$$

Örnek:

$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+10}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x^2 - x + 10 = u$ olsun. Bu durumda,

$(2x-1)dx = du$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+10} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|x^2-x+10\right| + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int \tan x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \text{ tir.}$$

$\cos x = u$ olsun. Bu durumda,

$-\sin x dx = du$ olur. Buna göre,

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c \text{ olur.}$$

Sonuç

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\sqrt{x} = u$ olsun. Bu durumda,

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$ olur. Buradan,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2e^{u} du = 2\int e^{u} du = 2e^{u} + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

bulunur.

Örnek:

$\int 2x e^{x^2+1} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x^2 + 1 = u$ olsun. Bu durumda,

$2x dx = du$ olur. Buradan,

$$\int 2x e^{x^2+1} dx = \int e^{u} du = e^{u} + c = e^{x^2+1} + c \quad \text{olur.}$$

Sonuç

$\int f'(x).e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$ dir.

Örnek:

$\int (\cos^2 4x - \sin^2 4x) dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\int (\cos^2 4x - \sin^2 4x) dx = \int \cos 8x \, dx$ tir.

$8x = u$ olsun. Bu durumda,

$8dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{8}$ olur. Buradan,

$$\int (\cos^2 4x - \sin^2 4x) dx = \int \cos 8x \, dx = \frac{1}{8}\int \cos u du$$

$$= \frac{1}{8}.\sin u + c = \frac{1}{8}.\sin 8x + c \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$\int \sin\frac{x}{6} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\frac{x}{6} = u$ olsun. Bu durumda,

$\frac{1}{6} dx = du \Rightarrow dx = 6du$ olur. Buradan,

$$\int \sin\frac{x}{6} dx = 6\int \sin u dx = -6.\cos u + c = -6.\cos\frac{x}{6} + c \quad \text{olur.}$$

Sonuç

$\int f'(x).\sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$ dir.

Örnek:

$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ olduğundan,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} \quad \text{tir.}$$

$x+1=u$ olsun. Bu durumda,

$dx=du$ olur. Buradan,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$=\arctan u+c=\arctan(x+1)+c \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x=2u$ olsun. Bu durumda,

$dx=2du$ olur. Buradan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{2du}{\sqrt{4-4u^2}}=\int \frac{2du}{2.\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\arcsin u+c=\arcsin\frac{x}{2}+c \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$\int \frac{9-x^2}{9+x^2}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\frac{9-x^2}{9+x^2}=\frac{9+9-9-x^2}{9+x^2}=\frac{18}{9+x^2}-1 \text{ dir.}$$

$$\int \frac{9-x^2}{9+x^2}dx=\int \left(\frac{18}{9+x^2}-1\right)dx=18\int \frac{dx}{9+x^2}-\int dx$$

Ortaya çıkan integrallerden birincisini değişken değiştirme yöntemiyle sonuçlandırıp yerine yazalım:

$$\int \frac{dx}{9+x^2}=\int \frac{dx}{9(1+\frac{x^2}{9})}=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{3})^2}$$

Bu son ifade de, $\frac{x}{3}=t$ olsun. Bu durumda,

$\frac{1}{3}dx=dt \Rightarrow dx=3dt$ olur. Buradan,

$$\int \frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{9}\int \frac{3dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}\arctan t+c$$

$$=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c \text{ dir.}$$

O halde

$$\int \frac{9-x^2}{9+x^2}dx=18\int \frac{dx}{9+x^2}-\int dx$$

$$=18.\arctan\frac{x}{3}-x+c \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$3x=u$ olsun. Bu durumda,

$dx=\frac{du}{3}$ olur. Buradan,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sin^2 u}=-\frac{1}{3}\cot u+c$$

$$=-\frac{1}{3}\cot 3x+c$$

Sonuç

Yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı gibi, her bir integrale ayrı bir değişken değiştirmesi uygulanmaktadır.

Fakat bazı özel tipte integraller vardır ki bunlara uygulanacak değişken değiştirmeleri bellidir. Şimdi bunlardan dört tanesini verelim.

Kural

$\sqrt{a^2 - x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için,

$x = a.\sin t$ değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek:

$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x = 3.\sin t$ olsun, Bu durumda, $t = \arcsin\frac{x}{3}$ ve

$dx = 3.\cos t dt$ olur. Buna göre,

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \int \sqrt{9 - (3.\sin t)^2}.3.\cos t dt$$

$$= \int \sqrt{9(1 - \sin^2 t)}.3.\cos t dt$$

$$= \int \sqrt{9.\cos^2 t}.3.\cos t dt$$

$$= \int 3.\cos t.3.\cos t dt$$

$$= 9\int \cos^2 t dt$$

$$= 9\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= 9\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}.\frac{\sin 2t}{2} + c$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}.\frac{\sin 2t}{2} + c$$

$$= \frac{9}{2}.\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{2}.\frac{\sin(2\arcsin\frac{x}{3})}{2} + c \text{ bulunur.}$$

Kural

$\sqrt{x^2 - a^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için,

$x = \frac{a}{\cos t}$ değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek:

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 4}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x = \frac{2}{\cos t}$ olsun, Bu durumda, $t = \arccos\frac{2}{x}$ ve

$dx = \frac{2\sin t dt}{\cos^2 t}$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{\frac{2\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{4}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}}$$

$$= \int \frac{\sin t dt}{2.2.\sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}}}$$

$$= \int \frac{\sin t dt}{4.\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{1}{4}\int \cos t dt$$

$$= \frac{1}{4}.\sin t + c = \frac{1}{4}.\sin(\arccos\frac{2}{x}) + c \text{ olur.}$$

Kural

$\sqrt{x^2+a^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için,

$x = a.\tan t$ değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek:

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x = \tan t$ olsun, Bu durumda, $t = \arctan x$ ve

$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\tan^2 t.\sqrt{\tan^2 t+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}.\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1}}$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t dt} \quad \text{olur.}$$

$\sin t = u$ alınırsa, $\cos t dt = du$ olur. Buna göre,

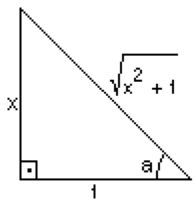
$$\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t dt} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{u} + c$$

$$= -\frac{1}{\sin t} + c = -\frac{1}{\sin(\arctan x)} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$$ bulunur. (Dipnot bkz.)

Dipnot

$\sin(\underbrace{\arctan x}_{a}) = ? \Rightarrow \sin a = ?$



$\arctan x = a \Rightarrow \tan a = x$

$\sin a = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ olur

Kural

$\sqrt[m]{ax+b}$ ve $\sqrt[n]{ax+b}$ köklü ifadelerini içeren fonksiyonların integrallerini hesaplamak için,

$E.K.O.K.(m,n) = p$ olmak üzere $ax+b = t^p$ değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek:

$\int \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

Kök dereceleri 2 ve 3 tür.

$E.K.O.K.(2,3) = 6$ olduğu için, $2x+1 = t^6$ dönüşümü yapılır. Bu durumda $2dx = 6t^5dt \Rightarrow dx = 3t^5dt$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx = \int \frac{\sqrt{t^6}-1}{\sqrt[3]{t^6}}.3t^5dt = \int \frac{t^3-1}{t^2}.3t^5dt$$

$$= \int (t^3-1).3t^3dt = \int 3.(t^6-t^3)dt$$

$$= \frac{3}{7}.(2x+1)^7 - \frac{3}{4}(2x+1)^4 + c \quad \text{olur.}$$

Sonuç

Değişken değiştirme yöntemiyle sonuç alamayacağımız integraller de vardır.

Çarpım biçimindeki fonksiyonlar
Logaritmik fonksiyonlar
Ters trigonometrik fonksiyonlar

Bu integralleri kısmi integral alam yöntemiyle sonuçlandırabiliriz.

2. Kısmi İntegrasyon Yöntemi

$u = f(x)$ ve $v = g(x)$ olsun. $u.v$ nin diferansiyeli,

$d(u.v) = du.v + dv.u$ olur. Buradan,

$u.dv = d(u.v) - v.du$ olur. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ olur.

Uyarı

Kısmi integrasyonda u' nun ve dv' nin doğru seçilmesi çok önemlidir. Seçim doğru yapılmazsa, çözüme yaklaşmak yerine, çözümden uzaklaşılır.

Türev ve integral alma bilgileri ışığında, seçim sezgisel olarak yapılabilir. Ancak kolaylık sağlamak amacıyla aşağıdaki kural göz önüne alınabilir.

u' nun seçiminde aşağıdaki sıralamaya uyulur.

L: Logaritmik fonksiyon,
A: Arc(ters trigonometrik) fonksiyon
P: Polinom fonksiyon
T: Trigonometrik fonksiyon
Ü: Üstel fonksiyon

u' nun seçimi yapıldıktan sonra integrali alınacak ifadede geriye kalan kısım dv olarak alınır.

Örnek:

$\int x e^x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$x.e^x dx$ ifadesinde x polinom fonksiyon, e^x üstel fonksiyondur. L.A.P.T.Ü. sıralamasında polinom fonksiyon, üstel fonksiyondan önce yer aldığından,

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$ olur. Bu durumda,

$\int x e^x dx = x.e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$ bulunur.

Sonuç

$f(x)$ bir polinom fonksiyon olmak üzere,

$\int f(x).e^x dx = \left[f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots\right]e^x + c$ olur.

Örnek:

$\int (x^3 - 1).e^x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\int (x^3 - 1).e^x dx$

$= \left[(x^3 - 1) - (x^3 - 1)' + (x^3 - 1)'' - (x^3 - 1)'''\right]e^x + c$

$= \left[(x^3 - 1) - 3x^2 + 6x - 6\right]e^x + c$

$= \left[(x^3 - 3x^2 + 6x - 7\right]e^x + c$

Polinom 3.dereceden olduğu için, 3. mertebeden türevinden sonrası alınan türevler sıfır olur. Bunun için 4., 5., … türevlere bakılmadı.

Örnek:

$\int \ln x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$ olur. Bu durumda,

$$\int \ln x\,dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln x - x + c$$ bulunur.

Örnek:

$\int x\cos x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$ olur. Bu durumda,

$$\int x\cos x\,dx = x.\sin x - \int \sin x\,dx = x.\sin x + \cos x + c$$ olur.

Örnek:

$\int x.\ln x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$ olur. Bu durumda,

$$\int x.\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}.\int \frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Örnek:

$\int \arctan x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$ olur. Bu durumda,

$$\int \arctan x\,dx = x.(\arctan x) - \int x.\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x.(\arctan x) - \frac{1}{2}.\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= x.\arctan x - \frac{1}{2}.\ln(1+x^2) + c$$

Örnek:

$\int e^x \cos x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$\int e^x \cos x\,dx = i$ diyelim.

$u_1 = \cos x \Rightarrow du_1 = -\sin x\,dx$

$dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x$ olur. Bu durumda,

$i = \int e^x \cos x\,dx = e^x.\cos x + \int e^x \sin x\,dx$ olur.

$\int e^x \cos x\,dx = i_2$ diyelim.

$u_2 = \sin x \Rightarrow du_2 = \cos x\,dx$

$dv_2 = e^x dx \Rightarrow v_2 = e^x$ olur. Bu durumda,

$i_2 = \int e^x \cos x\,dx = e^x.\sin x - \int e^x \cos x\,dx$ olur. Böylece,

$$i = \int e^x \cos x\,dx = e^x.\cos x + e^x.\sin x - \int e^x.\cos x\,dx$$

$$\Rightarrow 2.\int e^x \cos x\,dx = e^x.\cos x + e^x.\sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}.(\cos x + \sin x)$$ bulunur.

Sonuç

İntegral alma kuralları
Değişken değiştirme yöntemi
Kısmi integrasyon yöntemi

Sırasıyla yukarıdaki yöntemlerden biriyle sonuca gitmeye çalışırız. Ancak bunlar da yeterli olmayabilir. Örneğin,

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ gibi bir rasyonel integrali alabilmek için, ifadeyi basit kesirlere ayırmak gerekebilir.

3. Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ ortak çarpanı olmayan iki polinom olsun.

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ integrali, vereceğimiz iki yöntemden biriyle sonuçlandırılır.

a. P(x) in Derecesi Q(x) in Derecesinden Büyük ya da Eşit İse

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ integrali hesaplanırken P(x) in derecesi Q(x) in derecesinden büyük ya da eşit ise P(x), Q(x) ' e bölünür.

Örnek:

$\int \frac{x+1}{x-1}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\int \frac{x+2}{x-1}dx = \int (1+\frac{3}{x-1})dx = \int dx + \int \frac{3}{x-1}dx$$

$$= \int dx + 3.\int \frac{1}{x-1}dx = x + 3.\ln|x-1| + c$$

Örnek:

$\int \frac{x^3-8x^2+2}{x+2}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$\frac{x^3-8x^2+2}{x+2} = x^2 - 10x + 20 - \frac{38}{x+2}$ olduğundan,

$$\int \frac{x^3-8x^2+2}{x+2}dx = \int (x^2 - 10x + 20 - \frac{38}{x+2})dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 20x - 38.\ln|x+2| + c$$

b. P(x) in Derecesi Q(x) in Derecesinden Küçük İse

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ integrali hesaplanırken P(x) in derecesi Q(x) in derecesinden küçük ise ifade basit kesirlere ayrılır.

Örnek:

$\int \frac{dx}{x^2-3x}dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{x.(x-3)} = \underset{(x-3)}{\frac{A}{x}} + \underset{(x)}{\frac{B}{x-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x.(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A}{x.(x-3)} \Rightarrow (A+B)x - 3A = 1$$

$$\Rightarrow A+B=0 \text{ ve } -3A=1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \text{ ve } B = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$\frac{1}{x.(x-3)} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3.(x-3)}$ olacağından,

$$\int \frac{dx}{x^2-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -\frac{1}{3}.\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + c \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\int \dfrac{(x-1)dx}{x^2-4}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2).(x+2)}=\underset{(x+2)}{\frac{A}{x-2}}+\underset{(x-2)}{\frac{B}{x+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2.(A-B)}{(x-2).(x+2)}$$

$$\Rightarrow (A+B)x+2.(A-B)=x-1$$

$\Rightarrow A+B=1$ ve $A-B=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=\dfrac{1}{4}$ ve $B=\dfrac{3}{4}$ olur.

$\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4.(x-2)}+\dfrac{3}{4.(x+2)}$ olacağından,

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{4}.\ln|x-2|+\frac{3}{4}\ln|x+2|+c$$

$$=\frac{1}{4}.\left(\ln|x-2|+\ln|x+2|^3\right)$$

$= \ln\sqrt[4]{\left|(x-2).(x+2)^3\right|}+c$ bulunur.

Örnek:

$\int \dfrac{x\,dx}{x^2+2x-3}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\frac{x}{x^2+2x-3}=\frac{x}{(x-1).(x+3)}=\underset{(x+3)}{\frac{A}{x-1}}+\underset{(x-1)}{\frac{B}{x+3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1).(x+3)}$$

$$\Rightarrow (A+B)x+3A-B=x$$

$\Rightarrow A+B=1$ ve $3A-B=0\Rightarrow A=\dfrac{1}{4}$ ve $B=\dfrac{3}{4}$ olur.

$\dfrac{x}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{1}{4.(x-1)}+\dfrac{3}{4.(x+3)}$ olacağından,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=\frac{1}{4}.\ln|x-2|+\frac{3}{4}.\ln|x+3|+c$$

$$=\frac{1}{4}.\left(\ln|x-2|+3.\ln|x+3|\right)+c$$

$= \ln\sqrt[4]{\left|(x-1).(x+3)^3\right|}+c$ bulunur.

Örnek:

$\int \dfrac{dx}{x^3+x}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x.(x^2+1)}=\underset{(x^2+1)}{\frac{A}{x}}+\underset{(x)}{\frac{Bx+C}{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x.(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2+Cx+A=1$$

$\Rightarrow A+B=0$, $C=0$ ve $A=1\Rightarrow B=-1$ olur.

$\dfrac{x}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ olacağından,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x-3}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$= \ln|x-2|-\dfrac{1}{2}.\ln\left|x^2+1\right|+c$ olur.

Örnek:

$\int \dfrac{dx}{x^3+x^2}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2.(x+1)}=\underset{(x.(x+1))}{\frac{A}{x}}+\underset{(x+1)}{\frac{B}{x^2}}+\underset{(x^2)}{\frac{C}{x+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$$

$$\Rightarrow (A+C)x^2+(A+B)x+B=1$$

$$\Rightarrow A+C=0\ ,\ A+B=0\ \text{ ve }\ B=1 \Rightarrow A=-1\ \text{ ve }\ C=1$$

olur.

$\dfrac{1}{x^2.(x+1)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}$ olacağından,

$$\int \frac{dx}{x^3+x}=-\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{x+1}$$

$$=-\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+\ln|x+1|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+c \text{ olur.}$$

4. Trigonometrik Özdeşliklerden Yararlanarak İntegral Alma Yöntemi

Örnek:

$\int \sin^3 x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\int \sin^3 x\,dx=\int \sin^2 x.\sin x\,dx=\int (1-\cos^2 x).\sin x\,dx$$

$$=\int \sin x\,dx-\int \cos^2 x.\sin x\,dx$$

$$=-\cos x-\int \cos^2 x.\sin x\,dx \text{ olur.}$$

Bu son integralde $\cos x=t$ dönüşümü yapılırsa,

$\sin x\,dx=dt$ olur. Buna göre,

$$\int \cos^2 x.\sin x\,dx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{\cos^3 x}{3}+c \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$\int \sin^3 x\,dx=-\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}+c \text{ bulunur.}$$

Uyarı

$\sin x$ ve $\cos x$ in çift kuvvetlerinin çarpımı biçimindeki integrallerde şu iki özellik kullanılır:

$\cos 2x=2.\cos^2 x-1$ ise,

$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ dir.

$\cos 2x=1-2.\sin^2 x$ ise,

$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ dir.

Örnek:

$\int \cos^2 x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\int \cos^2 x\,dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

Örnek:

$\int \cos^4 x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\cos^4 x=\cos^2 x.\cos^2 x=(1-\sin^2 x).\cos^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x.\cos^2 x = \cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$= \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{3+4\cos 2x4\cos 4x}{8}x\,dx$$

$$= \frac{1}{8}.\left(3\int dx + 4\int \cos 2x\,dx + \int \cos 4x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}.\left(3x + 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c \text{ olur.}$$

Uyarı

$\int \sin ax.\cos bx\,dx$

$\int \cos ax.\cos bx\,dx$

$\int \sin ax.\sin bx\,dx$

biçimindeki integralleri aşağıdaki özdeşlikler yardımıyla sonuçlandırırız.

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}.\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}.\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = -\frac{1}{2}.\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$

Örnek:

$\int \sin 5x.\cos 3x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm

$$\sin 5x.\cos 3x = \frac{1}{2}.\left[\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\sin 8x + \sin 2x\right]$$

$$\int \sin 5x.\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}.\int \sin 8x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}.\left(-\frac{\cos 8x}{8}\right) - \frac{1}{2}.\frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$= \frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + c$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $\int \sqrt{x}.(x-1)dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\int \sqrt{x}.(x-1)dx = \int x^{\frac{1}{2}}.(x-1)dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c \text{ olur.}$$

2. $\int \frac{(e^{3x}-1)dx}{e^{2x}+e^x+1}$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\int \frac{(e^{3x}-1)dx}{e^{2x}+e^x+1} = \int \frac{(e^x-1).(e^{2x}+e^x+1)dx}{e^{2x}+e^x+1}$$

$$= \int (e^x - 1)dx = e^x - x + c \text{ bulunur.}$$

3. $\int \frac{dx}{x.\ln x}$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$\ln x = u$ olsun. Bu durumda,

$\frac{1}{x}dx = du$ olur. Buradan,

$$\int \frac{dx}{x.\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c \quad \text{olur.}$$

4. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x.\cos x}$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x.\cos x} = \int \frac{2.(\cos 2x)dx}{2.(1+\sin x.\cos x)}$$

$$= \int \frac{2.\cos 2x\,dx}{2+2.\sin x.\cos x}$$

$$= \int \frac{2.\cos 2x\,dx}{2+\sin 2x} \quad \text{tir.}$$

$2+\sin 2x = u$ alınırsa,

$2.\cos 2x\,dx = du$ olur. Bu durumda,

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x.\cos x} = \int \frac{2.\cos 2x\,dx}{2+\sin 2x} = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + c = \ln|2+\sin 2x| + c \quad \text{olur.}$$

5. $\int \frac{f(x)}{x}dx = x^2 - 8x + c$ olduğuna göre $f(x)$ i bulunuz.

Çözüm

$\int \frac{f(x)}{x}dx = x^2 - 8x + c$ ise,

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{f(x)}{x}dx\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 - 8x + c\right)$$

$$\frac{f(x)}{x} = 2x - 8 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 8x \quad \text{olur.}$$

6. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x + \cos x}dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$1+\sin x+\cos x = t$ olsun. Bu durumda,

$(\cos x - \sin x)dx = dt$ olur. Buradan,

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x+\cos x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$$

$$= \ln|1+\sin x+\cos x| + c \quad \text{olur.}$$

7. $\int \frac{x}{\cos^2(x^2-4)}dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$x^2 - 4 = t$ olsun. Bu durumda,

$2x\,dx = dt$ olur. Buradan,

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2-4)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\tan t + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan(x^2-4) + c \quad \text{olur.}$$

8. $\int \sin^6 x.\sin 2x\,dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\int \sin^6 x.\sin 2x\,dx = \int \sin^6 x.2.\sin x.\cos x\,dx$$

$$= 2.\int \sin^7 x.\cos x\,dx \quad \text{olur.}$$

$\sin x = t$ olsun. Bu durumda,

$\cos x\,dx = dt$ olur. Buradan,

$$\int \sin^6 x.\sin 2x\,dx = 2.\int t^7 dt = 2.\frac{t^8}{8} + c$$

$$= 4.\sin^8 x + c \quad \text{bulunur.}$$

9. $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^3 + 1}$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$e^x + e^3 + 1 = t$ olsun. Bu durumda,

$e^x dx = dt$ olur. Buradan,

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + e^3 + 1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|e^x + e^3 + 1\right| + c \text{ dir.}$$

10. $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{3x+5} + 2} dx$ integralinde $t^6 = 3x + 5$ dönüşümü yapıldığında elde edilecek yeni integrali bulunuz.

Çözüm

$t^6 = 3x + 5 \Rightarrow 6t^5 dt = 3dx \Rightarrow dx = 2t^5 dt$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{3x+5} + 2} dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6} + 2}.2t^5 dt$$

$$= \int \frac{t^3}{t^2 + 2}.2t^5 dt = \int \frac{2t^8}{t^2 + 2} dt \text{ olur.}$$

11. $\int \cos 3x.\cos x\, dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\int \cos 3x.\cos x\, dx = \int \frac{\cos(3x + x) + \cos(3x - x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}.\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{2}.\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sin 4x}{4} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$= \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + c \text{ olur.}$$

12. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 9}$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$x^4 = t$ olsun. Bu durumda,

$4x^3 dx = dt \Rightarrow x^3 dx = \frac{dt}{4}$ olur. Buradan,

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 9} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + 3^2} = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3} + c$$

$$= \frac{1}{12}\arctan\frac{x^4}{3} + c \text{ olur.}$$

13. $\int \frac{x+2}{x^2 + x} dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\frac{x+2}{x^2 + x} = \frac{1}{x.(x+1)} = \underset{(x+1)}{\frac{A}{x}} + \underset{(x)}{\frac{B}{x+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x.(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x.(x+1)}$$

$$\Rightarrow (A+B)x + A = x + 2$$

$$\Rightarrow A + B = 1 \text{ ve } A = 2 \Rightarrow B = -1 \text{ olur.}$$

$\frac{x+2}{x.(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$ olacağından,

$$\int \frac{x+2}{x^2 + x} dx = 2.\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 2.\ln|x| - \ln|x+1| + c$$

$$= \ln x^2 - \ln|x+1| + c$$

$$= \ln\frac{x^2}{|x+1|} + c \text{ olur.}$$

14. $\int f'(x).f''(x)dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$f'(x) = t$ olsun. Bu durumda,

$f''(x)dx = dt$ olur. Buradan,

$$\int f'(x).f''(x)dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\left[f'(x)\right]^2}{2} + c$$ olur

15. $\int 3x^2 \ln x\, dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

Sorulan integrali kısmi integrasyon metoduyla alalım.

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = 3x^2 dx \Rightarrow v = x^3$ olur. Bu durumda,

$$\int 3x^2 \ln x\, dx = x^3 \ln x - \int x^3 . \frac{1}{x} dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + c$$ dir.

16. $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \frac{1+2.\cos^2 x - 1}{1-(1-2.\sin^2 x)} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$ dir.

$$\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\cot x - x + c$$ dir

KONU BİTMİŞTİR…