TÜREViN ANLAMI

A. Türevin Fiziksel Anlamı

Bir hareketlinin t saatte kaç km yol aldığı, $s(t)$ fonksiyonu ile verilsin. Hareketlinin t anındaki hızı:

$v(t) = s'(t)$

ve t anındaki ivmesi

$a(t) = v'(t) = s''(t)$ olur.

Diğer bir ifadeyle, yol fonksiyonunun birinci türevi anlık hız, ikinci türevi ivmeyi verir.

Örnek:

Hareket denklemi $s(t) = t^2 + 5t + 20$ olan bir hareketlinin $t = 5$ saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulalım.

Çözüm:

Yol fonksiyonunun birinci türevi anlık hızı verir. Buna göre hareketlinin $t = 5$ saniye sonundaki hızı,

$s'(t) = 2t + 5 \Rightarrow s'(5) = 2.5 + 5 = 15$ olur.

Yol fonksiyonunun ikinci türevi ivmeyi verir. Buna göre hareketlinin $t = 5$ saniye sonundaki ivmesi,

$s''(t) = 2 \Rightarrow s'(5) = 2$ olur.

İvme fonksiyonunun sabit oluşundan, hareketin sabit ivmeli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Örnek:

Hareket denklemi $s(t) = t^3 + 2t + 60$ olan bir hareketlinin $t = 3$ saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulalım.

Çözüm:

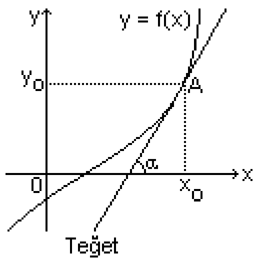
Yol fonksiyonunun birinci türevi anlık hızı verir. Buna göre hareketlinin $t = 3$ saniye sonundaki hızı,

$s'(t) = 3t^2 + 2 \Rightarrow s'(3) = 3.3^2 + 2 = 29$ olur

Yol fonksiyonunun ikinci türevi ivmeyi verir. Buna göre hareketlinin $t = 3$ saniye sonundaki ivmesi,

$s''(t) = 6t \Rightarrow s'(3) = 6.3 = 18$ olur.

B. Türevin Geometrik Anlamı



$y = f(x)$ fonksiyonunun $A(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetinin Ox ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α olsun. Teğetin eğimi $\tan\alpha$ ya eşit olduğu için:

$m = \tan\alpha$ dır.

Kural

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ daki türevi $A(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetinin eğimine eşittir.

$f'(x_0) = m = \tan\alpha$ dır.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 3x - 5$ fonksiyonuna $A(2, y)$ noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ in üzerindeki $A(2, y)$ noktasından çizilen teğetin eğimi:

$m = f'(2)$ dir.

Buna göre,

$f(x) = x^2 + 3x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2x + 3$

$m = f'(2) = 2.2 + 3 = 7$ olur.

Örnek:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonuna $A(1,0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ in üzerindeki $A(1,0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi:

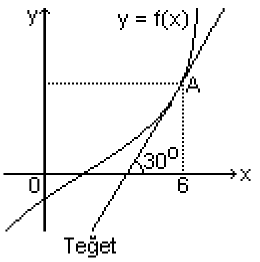
$m = f'(1)$ dir.

Buna göre,

$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

$m = f'(1) = 3.1^2 - 3 = 0$ olur.

Örnek:



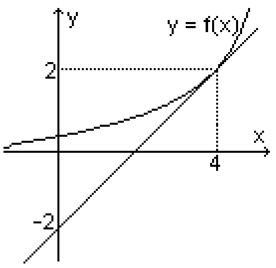
Yandaki şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna $A(6,y)$ noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm:

$y = f(x)$ fonksiyonunun $A(6,y)$ noktasındaki teğetinin Ox ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü 30^o olduğu için teğetin eğimi $\tan 30^o$ ye eşittir. Buna göre,

$m = \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

Örnek:



Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, $f'(4)$ kaçtır?

Çözüm:

$y = f(x)$ fonksiyonunun $A(4,2)$ noktasındaki türevi, yani $f'(4)$ değeri $A(4,2)$ noktasında çizilen teğetin eğimine eşittir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun $A(4,2)$ noktasındaki teğetinin eğimi 1 'e eşit olduğundan $f'(4) = 1$ dir.

Kural

Eğimi m olan ve $A(x_o, y_o)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $y - y_o = m.(x - x_o)$ olduğu için $y = f(x)$ eğrisinin $A(x_o, y_o)$ noktasındaki teğetinin denklemi,

$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$ olur.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonu üzerindeki, $A(4,y)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonuna $A(4,y)$ noktasından çizilen teğetin eğimi $m = f'(4)$ tür.

$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

$\Rightarrow m = f'(4) = 2.4 - 2 = 6$ olur.

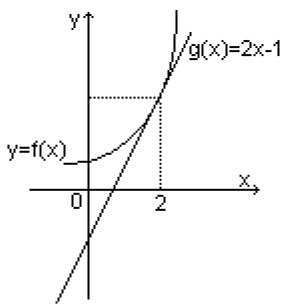
$y_o = f(x_o) = f(4) = 4^2 - 2.4 = 16 - 8 = 8$ dir.

Buna göre, eğimi 6 olan ve $A(4,8)$ noktasından geçen teğetin denklemi,

$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o) \Rightarrow y - 8 = 6.(x - 4)$

$\Rightarrow y = 6x - 16$ dır.

Örnek:



Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. $h(x) = f(x).g(x)$ olduğuna göre $h'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$y = f(x)$ eğrisinin $x = 2$ deki teğeti $g(x) = 2x - 1$ olup eğimi 2 dir. Bu nedenle $f'(2) = 2$ dir.

Ayrıca $f(2) = g(2) = 2.2 - 1 = 3$ tür.

$g'(x) = 2$ olduğu için $g'(2) = 2$ dir. Buna göre,

$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$h'(2) = f'(2).g(2) + f(2).g'(2) = 2.3 + 3.2 = 6 + 6 = 12$ olur.

Örnek:

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ çemberinin $A(3, \sqrt{3})$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm:

$F(x, y) = (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0$ ise

$F_x = 2.(x-2)$ ve $F_y = 2.y$ olup

$F'(x, y) = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{2.(x-2)}{2.y} = -\dfrac{x-2}{y}$ olduğu için,

$A(3, \sqrt{3})$ noktasındaki teğetinin eğimi

$F'(3, \sqrt{3}) = -\dfrac{3-2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ tür.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ eğrisinin hangi noktadaki teğeti $y = 4x + 1$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm:

İstenen noktanın apsisi x_o olsun.

Paralel doğruların eğimleri eşit olacağından dolayı istenen doğrunun eğimi 4 olmalıdır.

Buna göre, $f'(x_o) = 4$ koşuluna uyan x_o noktası istenmektedir.

$f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

$f'(x_o) = 2x_o - 2 = 4 \Rightarrow x_o = 3$ tür.

$x_o = 3$ için $f(3) = 4$ olduğundan değme noktası $A(3,4)$ tür.

Örnek:

$f(x) = x^3 - 14x$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğetleri $y = -2x + 1$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm:

İstenen noktanın apsisi x_o olsun.

Paralel doğruların eğimleri eşit olacağından dolayı istenen doğrunun eğimi -2 olmalıdır.

Buna göre, $f'(x_o) = -2$ koşuluna uyan x_o noktaları istenmektedir.

$f(x) = x^3 - 14x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 14$

$f'(x_o) = 3x_o^2 - 14 = -2 \Rightarrow x_o = -2$ veya $x_o = 2$ dir.

$x_o = -2$ için $f(-2) = 20$ olduğundan birinci değme noktası $(-2,20)$ dir.

$x_o = 2$ için $f(2) = -20$ olduğundan ikinci değme noktası $(2,-20)$ dir.

Buna göre, istenen noktalar $(-2,20)$ ve $(2,-20)$ dir.

Örnek:

$f(x) = -x^2 - 1$ eğrisinin orjinden geçen teğet denklemlerini bulalım.

Çözüm:

Önce eğrinin teğetlerinin değme noktalarını bulalım. İstenen noktaların apsisleri x_o olsun.

Bu noktalar eğri üzerinde olduğundan ordinatları,

$y_o = -x_o^2 - 1$ dir.

$\left(x_o, y_o\right) = \left(x_o, -x_o^2 - 1\right)$ noktasındaki teğetin eğimi:

$f(x) = -x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -2x^2$

$$\Rightarrow m = f'(x_o) = -2.x_o^2 \text{ dir.}$$

Buna göre, teğetin denklemi:

$y - y_o = m.\left(x - x_o\right)$

$y - \left[-x_o^2 - 1\right] = -2x_o.\left(x - x_o\right)$ olur.

Bu denklem ile belirtilen teğetler orjinden geçtiğine göre $O(0,0)$ noktası bu denklemi sağlar.

Buna göre bu denklemde $x = 0$ ve $y = 0$ yazılırsa,

$y - \left[-x_o^2 - 1\right] = -2x_o.\left(x - x_o\right)$ ise,

$\Rightarrow 0 - \left[-x_o^2 - 1\right] = -2x_o.\left(0 - x_o\right)$

$\Rightarrow x_o^2 + 1 = 2x_o^2 \Rightarrow x_o^2 = 1 \Rightarrow x_o = 1$ veya $x_o = -1$ dir

$x_o = -1$ için $f(-1) = -2$ olduğundan birinci teğetin değme noktası $\left(-1, -2\right)$ dir.

$x_o = 1$ için $f(1) = -2$ olduğundan ikinci teğetin değme noktası $\left(1, -2\right)$ dir.

Buna göre, birinci teğet $\left(-1, -2\right)$ noktasından geçtiğine göre denklemi;

Buna göre, birinci teğet $\left(-1, -2\right)$ noktasından geçtiğine göre denklemi;

$y - \left[-x_o^2 - 1\right] = -2x_o.\left(x - x_o\right)$

$\Rightarrow y - (-2) = -2.(-1).(x - (-1))$

$\Rightarrow y + 2 = 2.(x + 1)$

$\Rightarrow y = 2x$ tir.

İkinci teğet $\left(1, -2\right)$ noktasından geçtiğine göre denklemi;

$y - \left[-x_o^2 - 1\right] = -2x_o.\left(x - x_o\right)$

$\Rightarrow y - (-2) = -2.1.(x - 1)$

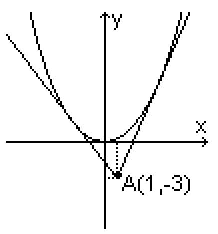
$\Rightarrow y + 2 = -2.(x - 1)$

$\Rightarrow y = -2x$ tir.

Örnek:

$A(1 - 3)$ noktasından $y = x^2$ eğrisine çizilen teğetlerin değme noktalarını bulalım.

Çözüm:



İstenen noktanın apsisi x_o olsun.

Bu nokta eğri üzerinde olduğundan,

ordinatı $y_o = x_o^2$ dir.

$\left(x_o, y_o\right) = \left(x_o, x_o^2\right)$ noktasındaki teğetin eğimi:

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(x_o) = 2.x_o$ dir.

Buna göre, teğetin denklemi:

$y - y_o = m.\left(x - x_o\right) \Rightarrow y - x_o^2 = 2.x_o.\left(x - x_o\right)$ olur.

Bu denklem ile belirtilen teğetler $A(1-3)$ noktasında geçtiğine göre $A(1-3)$ noktası bu denklemi sağlar.

Buna göre bu denklemde $x = 1$ ve $y = -3$ yazılırsa,

$$y - x_o^2 = 2.x_o.\left(x - x_o\right) \text{ ise,}$$

$$\Rightarrow -3 - x_o^2 = 2.x_o.\left(1 - x_o\right)$$

$$\Rightarrow x_o^2 - 2x_o^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x_o + 1).(x_o - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_o = -1 \text{ veya } x_o = 3 \text{ tür.}$$

$x_o = -1$ için $f(-1) = 1$ olduğundan birinci teğetin değme noktası $(-1,1)$ dir.

$x_o = 3$ için $f(3) = 9$ olduğundan ikinci teğetin değme noktası $(3,9)$ dir.

Buna göre, birinci teğet $(-1,1)$ noktasından geçtiğine göre denklemi;

$$y - x_o^2 = 2.x_o.\left(x - x_o\right)$$

$$y - (-1)^2 = 2.(-1).\left(x - (-1)\right) \Rightarrow y = -2x - 1 \text{ dir.}$$

İkinci teğet $(3,9)$ noktasından geçtiğine göre denklemi;

$$y - x_o^2 = 2.x_o.\left(x - x_o\right)$$

$$\Rightarrow y - 9 = 2.3.(x - 3) \Rightarrow y = 6x + 9 \text{ dur.}$$

Kural

Birbirine dik olan iki doğrunun eğimleri çarpımı -1 olduğu için, $y = f(x)$ eğrisinin $A\left(x_o, y_o\right)$ noktasındaki normalinin eğimi:

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_o)} \text{ dır.}$$

Buna bağlı olarak $y = f(x)$ eğrisinin $A\left(x_o, y_o\right)$ noktasındaki normalinin denklemi,

$$y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}.\left(x - x_o\right) \text{ dır.}$$

Örnek:

$x^2 + y^2 = 4$ çemberinin $A\left(1, \sqrt{3}\right)$ noktasındaki teğetinin eğimini ve normalinin eğimini bulalım.

Çözüm:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ ise}$$

$$F_x = 2.x \text{ ve } F_y = 2.y \text{ olup}$$

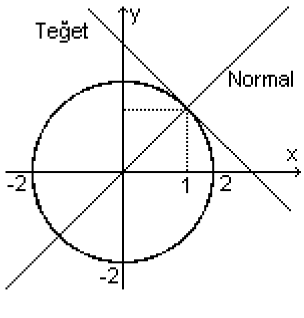
$$F'(x, y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2.x}{2.y} = -\frac{x}{y} \text{ olduğu için,}$$

$A\left(1, \sqrt{3}\right)$ noktasındaki teğetinin eğimi:

$$m_T = F'(1, \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ tür.}$$

$A\left(1, \sqrt{3}\right)$ noktasındaki normalinin eğimi:

$$m_N = -\frac{1}{F'(1, \sqrt{3})} = -\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \text{ tür.}$$



Bulunanlar ve şekil dikkatlice incelenirse, teğetin Ox ekseniyle 150 derecelik bir açı, normalin 60 derecelik bir açı oluşturduğu görülür. Ayrıca teğet ile normalin eğimleri çarpımı -1 olduğu, buna bağlı olarak, teğet ile normalin birbirini dik kestiği görülür.

Örnek:

Denklemi $f(x)=\sin(\cos 5x)$ olan eğrinin $x=\frac{\pi}{10}$ noktasındaki normalinin denklemini bulalım.

Çözüm:

$u=\cos 5x$ olsun.

$u' = -5.\sin 5x$ olur.

$f(x)=\sin(\cos 5x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'.\cos u$

$\Rightarrow f'(x)=-5.\sin 5x.\cos(\cos 5x)$

olduğu için, teğetin eğimi:

$$f'\left(\frac{\pi}{10}\right)=-5.\sin\left(5.\frac{\pi}{10}\right).\cos\left(\cos\left(5.\frac{\pi}{10}\right)\right)$$
$$=-5.\sin\frac{\pi}{2}.\cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=-5.1.\cos 0=-5 \text{ tir.}$$

Normalin Eğimi:

$$m_N=-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{10}\right)}=-\frac{1}{-5}=\frac{1}{5} \text{ tir.}$$

$$f\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\cos\left(5.\frac{\pi}{10}\right)\right)=\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sin 0=0 \text{ olup}$$

Normalin denklemi:

$$y-y_o=m_N.(x-x_o)$$

$$y-0=\frac{1}{5}.\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\Rightarrow y=\frac{1}{5}.\left(x-\frac{\pi}{10}\right) \text{ olur.}$$

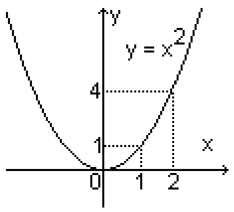
C. Artan ve Azalan Fonksiyonlar

1. Artan Fonksiyon

$B\subset A\subset R$ olmak üzere $f:A\to R$ bir fonksiyon olsun.

Her $x_1, x_2 \in B$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu B üzerinde artandır.

Örnek:



$f:R^+\to R^+$, $f(x)=x^2$

fonksiyonunu göz önüne alalım:

$1<2$ dir. Acaba $f(1)<f(2)$ midir?

$f(1)=1$ ve $f(2)=4$ tür. Buna göre $f(1)<f(2)$ dir.

Bu durum, fonksiyonun tanım kümesindeki bütün değerler için geçerli midir? Yani, x artan değerler alırken $f(x)$ de artan değerler alır mı?

x	1	2	3	...	x
f(x)	1	4	9	...	x^2

Grafikte ve yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi, tanım kümesindeki bütün x ler için, x ler artan değerler alırken y ler de artan değerler alır.

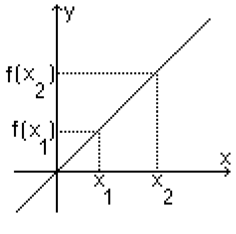
Buna göre, tanım gereği $f(x)$ artan bir fonksiyondur. $f(x)$ fonksiyonunun türevinin, tanım kümesindeki bütün x ler için pozitif değerler aldığına dikkat ediniz.

Sonuç

$f:R^+\to R^+$, $f(x)=x^2$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur; birinci türevi de daima pozitiftir.

Bu sonuç genellenebilir. Yani, artan fonksiyonun türevi daima pozitiftir. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Yani, türevi pozitif olan bir fonksiyon artandır.

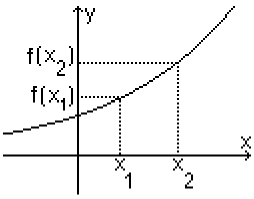
Örnek:



Şekilde grafiği verilen fonksiyon artandır.

Birinci türevi daima pozitiftir.

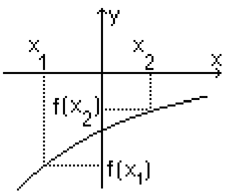
Örnek:



Şekilde grafiği verilen fonksiyon pozitif tanımlı ve artandır.

Birinci türevi daima pozitiftir.

Örnek:



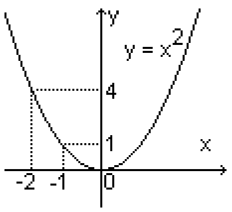
Şekilde grafiği verilen fonksiyon negatif tanımlı ve artandır.

Birinci türevi daima pozitiftir.

2. Azalan Fonksiyon

$B \subset A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu B üzerinde azalandır.

Örnek:



$f : R^- \to R^+$, $f(x) = x^2$

fonksiyonunu göz önüne alalım:

$-2 < -1$ dir. Acaba $f(-2) < f(-1)$ midir?

$f(-2) = 4$ ve $f(-1) = 1$ dir. Buna göre $f(-2) > f(-1)$ dir.

Bu durum, fonksiyonun tanım kümesindeki bütün değerler için geçerli midir? Yani, x artan değerler alırken $f(x)$ azalan değerler alır mı?

x	-1	-2	-3	...	-x
f(x)	1	4	9	...	x^2

Grafikte ve yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi, tanım kümesindeki bütün x ler için, x ler artan değerler alırken y ler de azalan değerler alır.

Buna göre, tanım gereği $f(x)$ azalan bir fonksiyondur.

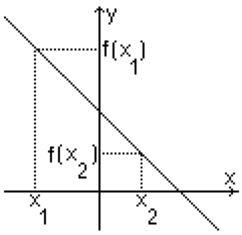
$f(x)$ fonksiyonunun türevinin, tanım kümesindeki bütün x ler için negatif değerler aldığına dikkat ediniz.

Sonuç

$f : R^- \to R^+$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur; birinci türevi de daima negatiftir.

Bu sonuç genellenebilir. Yani, azalan fonksiyonun türevi daima negatifitr. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Yani, türevi negatif olan bir fonksiyon azalandır.

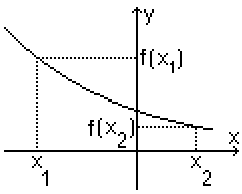
Örnek:



Şekilde grafiği verilen fonksiyon azalandır.

Birinci türevi daima negatiftir.

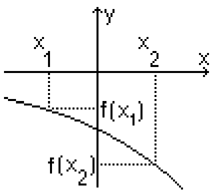
Örnek:



Şekilde grafiği verilen fonksiyon pozitif tanımlı ve azalandır.

Birinci türevi daima negatiftir.

Örnek:



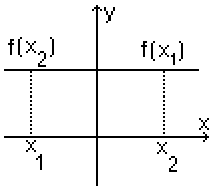
Şekilde grafiği verilen fonksiyon negatif tanımlı ve azalandır.

Birinci türevi daima negatiftir.

3. Sabit Fonksiyon

$B \subset A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ için, $f(x_1) = f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu B üzerinde sabittir.

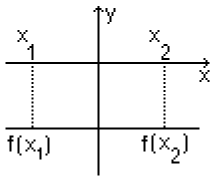
Örnek:



Şekilde grafiği verilen fonksiyon pozitif tanımlı ve sabittir.

Birinci türevi daima sıfırdır.

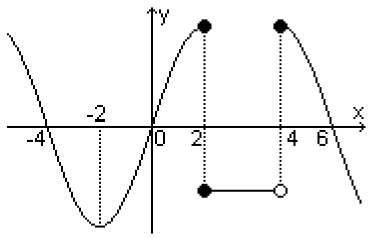
Örnek:



Şekilde grafiği verilen fonksiyon negatif tanımlı ve sabittir.

Birinci türevi daima sıfırdır.

Örnek:



Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

a. $x < -4$ iken $f(x)$ azalandır.

b. $-2 < x < 0$ iken $f(x)$ artandır.

c. $3 < x < 4$ iken $f(x)$ sabittir.

d. $4 < x < 5$ iken $f(x)$ artandır.

e. $6 < x$ iken $f(x)$ sabittir.

Çözüm:

Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu;

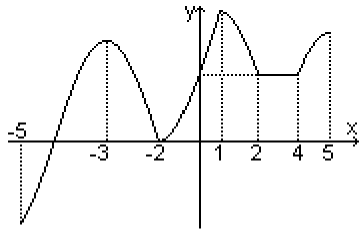
$x < -2$ veya $x > 4$ iken azalandır.

$-2 < x < 2$ iken artandır.

$2 < x < 4$ iken sabittir.

O halde d şıkkında verilen bilgi yanlıştır.

Örnek:



Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

a. $f'(-4) > 0$ dır.

b. $f'(0) > 0$ dır.

c. $f'(\frac{3}{2}) > 0$ dır.

d. $f'(3) = 0$

e. $f'(\frac{9}{2}) > 0$ dır.

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonu, $-5 < x < -3$ aralığında artandır. Bunun için $f'(-4) > 0$ dır.

$f(x)$ fonksiyonu, $-2 < x < 1$ aralığında artandır. Bunun için $f'(0) > 0$ dır.

$f(x)$ fonksiyonu, $1 < x < 2$ aralığında azalandır. Bunun için $f'(\frac{3}{2}) < 0$ dır.

$f(x)$ fonksiyonu, $2 < x < 4$ aralığında sabittir. Bunun için $f'(3) = 0$ dır.

$f(x)$ fonksiyonu, $4 < x < 5$ aralığında artandır. Bunun için $f'(\frac{9}{2}) > 0$ dır.

Buna göre $f'(\frac{3}{2}) > 0$ ifadesi yanlıştır.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 6x$ fonksiyonunun artan ya da azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

Çözüm:

$f(x) = x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$ dır.

$2x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ tür.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'(x)	$-$	0	$+$
f(x)	↘		↗

$2x - 6$ ifadesinin (türevin) işaret tablosunda da görüldüğü gibi $f'(x)$, yani türev:

$-\infty < x < 3$ aralığında negatif,

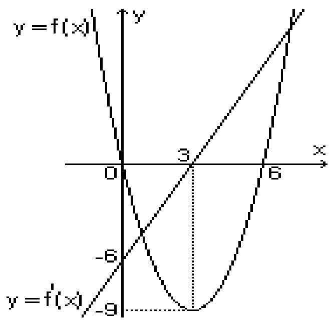
$3 < x < +\infty$ aralığında pozitiftir.

Buna bağlı olarak $f(x)$ fonksiyonu:

$-\infty < x < 3$ aralığında azalan,

$3 < x < +\infty$ aralığında artandır.

Şimdi $y = f(x)$ ve $y = f'(x)$ in grafiklerini çizerek yukarıdaki ifade edilenlerin doğruluğunu gösterelim.



Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ olduğuna göre $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a. $-1 < x < 2$ iken $f(x)$ azalandır.

b. $x = -2$ de $f(x)$ in türevi sıfırdır.

c. $-15 < x < -5$ iken $f(x)$ artandır.

d. $-\infty < x < -2$ iken $f(x)$ azalandır.

e. $5 < x < 15$ iken $f(x)$ in türevi pozitiftir.

Çözüm:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$ dır.

$6x^2 - 6x - 36 = 0 \Rightarrow 6.(x+2).(x-3 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ veya $x = 3$ tür.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
f'(x)	$+$	0	$-$	0	$+$
f(x)	↗		↘		↗

Verilen bilgilerden d şıkkındaki bilgi yanlıştır.

Örnek:

R^+ da tanımlı $f(x)$ fonksiyonu daima artan bir fonksiyondur. Buna göre aşağıdaki yargılardan hangileri doğrudur?

I. $f(x^2)$ daima artandır.

II. $\dfrac{1}{f(x)}$ daima azalandır.

III. $(fof)(x)$ artandır.

Çözüm:

R^+ da tanımlı olduğu için, $f(x) > 0$ dır.

Daima artan olduğu için, $f'(x) > 0$ dır.

R^+ da tanımlı olduğu için, $f(x^2) > 0$ dır.

Daima artan olduğu için, $f'(x^2) > 0$ dır.

$[f(x^2)]' = 2x.f'(x^2)$ ifadesinin işareti x in işareti ile aynıdır.

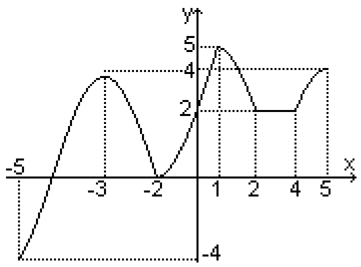
Örneğin $x < 0$ ise $f'(x^2)$ azalandır.

$\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} < 0$ dır. Buna göre $\dfrac{1}{f(x)}$ azalandır.

$\left[(fof)(x)\right]' = \left[f(f(x))\right]' = f'(x).f'[f(x)] > 0$ dır. Buna göre $(fof)(x)$ artandır.

D. Ekstremum Değerler ve Bunların Türevle İlişkisi

1. Ekstremum Noktalar



Yukarıdaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun $[-5,5]$ aralığındaki görüntüsü verilmiştir.

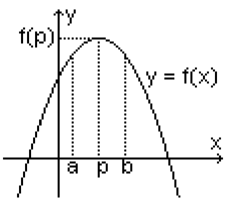
$(-5,-2)$ aralığında $f(x)$ in alabileceği en büyük değer 4 tür. Bu değere yerel maksimum değer diyeceğiz.

$(-3,0)$ aralığında $f(x)$ in alabileceği en küçük değer 0 dır. Bu değere yerel minimum değer diyeceğiz.

$f(x)$ in alabileceği en büyük değer 5 tir. Bu değere mutlak maksimum değer diyeceğiz.

$f(x)$ in alabileceği en küçük değer -4 tür. Bu değere mutlak minimum değer diyeceğiz.

Tanım



$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon

ve $a, b \in A$ olsun.

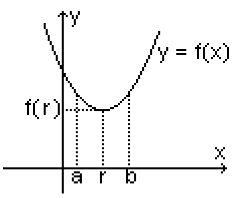
Her $x \in (a,b)$ için, $f(x) \leq f(p)$

olacak şekilde bir $p \in (a,b)$ varsa $f(p)$ ye yerel maksimum denir.

Her $x \in A$ için, $f(x) \leq f(p)$ olacak şekilde bir $p \in A$ varsa

$f(p)$ ye mutlak maksimum denir.

Tanım



$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon

ve $a, b \in A$ olsun.

Her $x \in (a,b)$ için, $f(r) \leq f(x)$

olacak şekilde bir $r \in (a,b)$ varsa $f(r)$ ye yerel minimum denir.

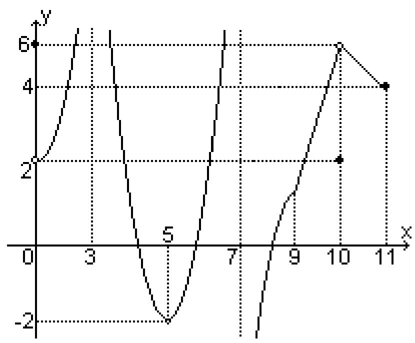
Her $x \in A$ için, $f(r) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $r \in A$ varsa

$f(r)$ ye mutlak minimum denir.

Tanım

Fonksiyon maksimum ve minimum değerlerinin hepsine birden, fonksiyonun yerel ekstremum değerleri denir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun $[0,11]$ aralığındaki görüntüsü verilmiştir.

$(0,3)$ aralığında $f(x)$ in bir yerel ekstremum değeri yoktur.

$(2,4)$ aralığında $f(x)$ in bir yerel ekstremum değeri yoktur.

$(4,6)$ aralığında $f(x)$ in alabileceği en küçük değer -2 dir. Yani, bu aralıktaki yerel minimum değeri -2 dir.

$(6,8)$ aralığında $f(x)$ in bir yerel ekstremum değeri yoktur.

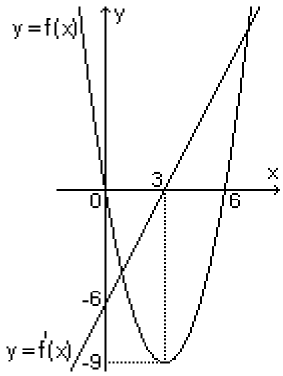
$(9,11)$ aralığında $f(x)$ in bir yerel ekstremum değeri yoktur.

$(10,11]$ aralığında $f(x)$ in alabileceği en küçük değer 4 tür. Yani, bu aralıktaki yerel minimum 4 tür.

$f(x)$ in alabileceği en büyük değer belirlenemeyeceği için mutlak maksimum değer yoktur.

$f(x)$ in alabileceği en küçük değer belirlenemeyeceği için mutlak minimum değer yoktur.

Örnek:



$f(x) = x^2 - 6x$ fonksiyonunun ve $f'(x) = 2x - 6$ türevinin grafiğini ve tablosunu daha önceki örneklerimizde vermiştik

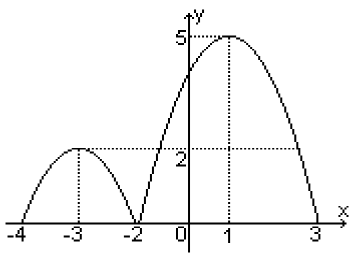
Yandaki grafik ve türev tablosundan, yerel minimum değerin oluştuğu noktada türevin sıfır olduğu görülmektedir.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Kural

Fonksiyon ekstremum noktalarda türevli ise, türevi sıfırdır. Tersi her zaman doğru değildir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun $[-4,3]$ aralığındaki görüntüsü verilmiştir.

$f(x)$ in, x in -4, -3, -2, 1, 3 için ekstremum değeri vardır.

x in -4, -2, 3 değeri için türev tanımlı değildir.

x in -3 ve 1 değeri için türev vardır ve sıfırdır.

Örnek:

$f(x) = (x-2)^3$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştıralım.

Çözüm:

$f(x) = (x-2)^3 \Rightarrow f'(x) = 3.(x-2)^2$

$3.(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ çift katlı köktür.

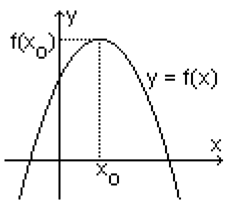
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗

Yukarıdaki türev tablosundan anlaşılacağı gibi $f(x)$ fonksiyonu daima artandır.

Bu durumda, yerel ekstremum noktası oluşmaz.

2. Birinci Türevden Yararlanarak Ekstremum Noktaların Belirlenmesi

Kural

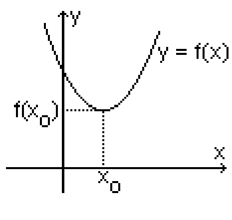


$h > 0$ olmak üzere,

1. $f'(x_o - h) > 0$
2. $f'(x_o) = 0$
3. $f'(x_o + h) < 0$ ise

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_o$ noktasında yerel maksimuma sahiptir. Yerel maksimum değeri $f(x_o)$ dır.

Kural



$h > 0$ olmak üzere,

1. $f'(x_o - h) < 0$
2. $f'(x_o) = 0$
3. $f'(x_o + h) > 0$ ise

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_o$ noktasında yerel minimuma sahiptir. Yerel minimum değeri $f(x_o)$ dır.

Uyarı

Yukarıda verilen tanım türevlenebilir fonksiyonlar için doğrudur. Ancak $y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_o$ noktasında türevsiz olduğu halde $x = x_o$ noktasında yerel minimum veya yerel maksimuma sahip olabilir.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 6x$ fonksiyonunun türev ($f'(x) = 2x - 6$) tablosunda türevin sıfıra eşit olduğu $x = 3$ değerinin, hemen solunda türev negatif, hemen solunda türev pozitiftir.

Bu durumda $x = 3$ noktasında yerel minimum oluşur.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Yerel minimum

Sonuç

Fonksiyon birinci türevin sıfır olduğu noktada, türevin işareti değişiyorsa yerel maksimuma ya da yerel minimuma sahiptir.

Soldan sağa doğru, türev eksiden (–) , artıya (+) geçiyorsa, yerel minimum; türev artıdan (+), eksiye (–) geçiyorsa, yerel maksimum vardır.

Örnek:

$f(x) = -x^3 + 27x$ fonksiyonunun yerel minimum ve yerel maksimum noktasını bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = -x^3 + 27x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 27$$

$$-3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ veya } x = 3 \text{ tür.}$$

Fonksiyonun değişim(türev) tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

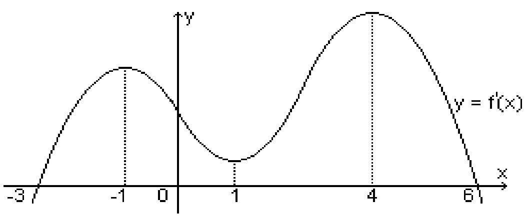
Yerel minimum   Yerel maximum

Tablodan da görüldüğü gibi $y = f(x)$ fonksiyonu $x = -3$ noktasında yerel minimum, $x = 3$ noktasında yerel maximum değerini almaktadır.

$f(x) = -(-3)^3 + 27.(-3) = -54$ olduğuna göre, yerel minimum noktası $(3,-54)$ tür.

$f(x) = -3^3 + 27.3 = 54$ olduğuna göre, yerel maksimum noktası $(3,54)$ tür.

Örnek:



Türevinin grafiği yukarıda verilen f fonksiyonu, hangi x değeri için yerel maksimum değerini alır?

Çözüm:

Değişim tablosu yapılarak istenen bulunur.

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Yerel minimum   Yerel maximum

f fonksiyonu $x = 6$ noktasında (soldan sağa doğru, türevin artıdan (+), eksiye (–) geçtiği yerde) yerel maksimum değerini alır.

Örnek:

$f : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow R$, $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2\sin x}$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + 2\sin x}$ olduğuna göre,

$f'(x) = \dfrac{\cos x.(1 + 2\sin x) - 2.\cos x.\sin x}{(1 + 2\sin x)^2} = \dfrac{\cos x}{(1 + 2\sin x)^2}$

$f'(x)$ in paydası pozitif olduğu için, değişim (türev) tablosunu cosx belirler.

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$		

Yerel maximum

Tablodan görüldüğü gibi $y = f(x)$ fonksiyonu $x = \dfrac{\pi}{2}$ noktasında yerel yerel maximum değerini almaktadır.

Maksimum değer:

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 + 2\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{3}$ olur.

Başka maksimum olmadığı için, bu değer aynı zamanda mutlak maksimumdur

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{1 + 2\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{4}$

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1 + 2\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{4}$ olduğuna göre,

$\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{4}\right)$ ve $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$ noktaları yerel minimumdur.

$\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{4}\right)$ noktası mutlak minimum noktasıdır.

Örnek:

$f : [0,2\pi] \to R$, $f(x) = x.\sin x + \cos x$ fonksiyonunun mutlak minimum noktasını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = x.\sin x + \cos x$

$f'(x) = (1.\sin x + x.\mathrm{cox}) + (-\sin x) = x.\cos x$

$x.\cos x = 0 \Rightarrow x = 0$, $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Fonksiyonun değişim (türev) tablosunu oluşturalım.

$[0,2\pi]$ aralığında $x.\cos x$ in işareti $\cos x$ in işareti ile aynıdır. Buna göre $f'(x)$ in tablosunu yapalım.

x		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		

Yerel maximum

Yerel minimum

Tablodan da görüldüğü gibi $y = f(x)$ fonksiyonu $x = \dfrac{3\pi}{2}$ noktasında yerel minimum değerini almaktadır.

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{2}.\sin\dfrac{3\pi}{2} - \cos\dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{2}$ olduğuna göre, yerel minimum noktası $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$ olur.

Fonksiyon bir aralıkta tanımlanmıştır. Aralığın uç noktalarında yerel ekstremumlar oluşabilir.

$x = 0$ için $f(0) = 0.\sin 0 + \cos 0 = 1$ olur.

$x = 2\pi$ için $f(2\pi) = 2\pi.\sin 2\pi + \cos 2\pi = 1$ olur.

Buna göre $(0,1)$ ve $(2\pi,1)$ noktaları da ekstremum noktalardır.

$-\dfrac{3\pi}{2} < 1$ olduğundan $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$ noktası mutlak minimum noktasıdır.

3. İkinci Türevden Yararlanarak Ekstremum Noktaların Belirlenmesi

$f : R \to R$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ fonksiyonunun birinci türevinin işaret (değişim) tablosunu inceleyelim:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Yerel maximum — Yerel minimum

-2 ve 3 birinci türevin kökleridir. (Yani $x = -2$ ve $x = 3$ için, $f'(x)$ sıfıra eşittir.)

$x = -2$ de ve $x = 3$ te $f'(x)$ (birinci türev) işaret değiştirdiği için, bu noktalarda ekstremum değerler görülür.

$x = -2$ de türev artıdan (+), eksiye (–) geçtiği için yerel maksimum,

$x = 3$ te türev eksiden (–) , artıya (+) geçtiği için yerel minimum vardır.

Şimdi bu ili noktada $f''(x)$ in (ikinci türevin) hangi değerler alacağına bakalım:

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(-2) = 12.(-2) - 6 = -30 < 0$

$f''(3) = 12.3 - 6 = 30 > 0$

Sonuç

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ fonksiyonunun yerel maksimum değerinin görüldüğü noktada, birinci türevin sıfır, ikinci türevin negatif;

Yerel minimum değerinin görüldüğü noktada, birinci türevin sıfır ve ikinci türevin pozitif olduğu görülür.

Kural

$A \subset R$, $f : A \to R$ fonksiyonu verilsin. $f'(x_o)$ ve $f''(x_o)$ var ve $f'(x_o) = 0$ olsun. $f''(x_o) < 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu $x = x_o$ noktasında yerel maksimuma sahiptir. Yerel maksimum değeri $f(x_o)$ dır.

Kural

$A \subset R$, $f : A \to R$ fonksiyonu verilsin. $f'(x_o)$ ve $f''(x_o)$ var ve $f'(x_o) = 0$ olsun. $f''(x_o) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu $x = x_o$ noktasında yerel minimuma sahiptir. Yerel minimum değeri $f(x_o)$ dır.

Örnek:

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını türev (değişim) tablosu yapmadan bulalım.

Çözüm:

$f'(x) = 6x^2 - 12x - 48$

$6x^2 - 12x - 48 = 0 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 4$ tür.

$f''(x) = 12x - 12$

$f''(-2) = 12.(-2) - 12 = -36 < 0$

$f''(4) = 12.4 - 12 = 36 > 0$

$x = -2$ de birinci türev sıfır ikinci türev negatif olduğundan, $f(-2)$ yerel maksimum değerdir.

$x = 4$ te birinci türev sıfır ikinci türev pozitif olduğundan, $f(4)$ yerel minimum değerdir.

E. İkinci Türevin Geometrik Anlamı

1. Konveks Eğriler

Tanım

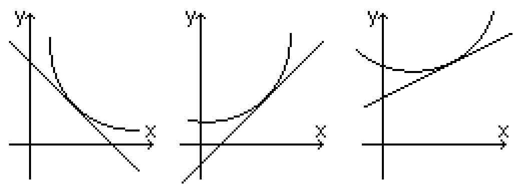
f fonksiyonu $[a,b]$ aralığından R ye (reel sayılar kümesine) tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olsun

f fonksiyonunun grafiğinin gösterdiği eğrinin bükülme yönü (eğrilik yönü) yukarı doğru ise, eğri konveks (dış bükey) dir.

Kural

$[a,b]$ aralığında $f''(x) > 0$ ise, f fonksiyonunun grafiği olan eğri konveks (dış bükey) dir. Diğer bir ifadeyle, bükülme yönü yukarı doğrudur. Eğri, teğetlerinin yukarısındadır.

Aşağıdaki grafiklerde verilen eğrilerin üçü de konvekstir.



2. Konkav Eğriler

Tanım

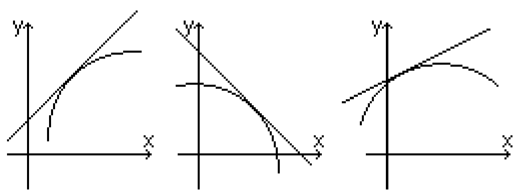
f fonksiyonu $[a,b]$ aralığından R ye (reel sayılar kümesine) tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olsun

f fonksiyonunun grafiğinin gösterdiği eğrinin bükülme yönü (eğrilik yönü) aşağı doğru ise, eğri konkav (iç bükey) dir.

Kural

$[a,b]$ aralığında $f''(x) < 0$ ise, f fonksiyonunun grafiği olan eğri konkav (iç bükey) dir. Diğer bir ifadeyle, bükülme yönü aşağı doğrudur. Eğri, teğetlerinin aşağısındadır.

Aşağıdaki grafiklerde verilen eğrilerin üçü de konkavdır.



Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ fonksiyonunun ikinci türevinin işaret (değişim) tablosunu oluşturup, eğrilik yönünü belirleyelim.

Çözüm:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$f''(x) = 12x - 6$

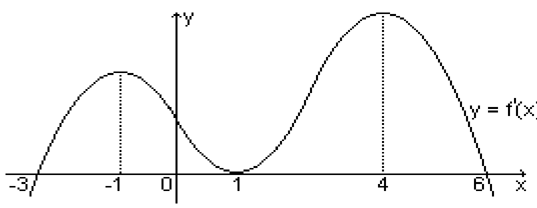
$12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩		∪

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) < 0$ olduğuna göre $x < \frac{1}{2}$ eğrilik yönü aşağı doğrudur.

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) > 0$ olduğuna göre $x > \frac{1}{2}$ eğrilik yönü yukarı doğrudur.

Örnek:



Türevinin grafiği yukarıda verilen f fonksiyonunun, hangi aralıkta eğrilik yönü yukarı doğrudur?

Çözüm:

Verilen grafiğin, fonksiyonun birinci türevine ait olduğuna dikkat edilmelidir.
Grafikten yararlanarak, ikinci türevin tablosunu oluşturalım.

x	$-\infty$	-3		1		6	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	∩		∪		∪		∩

Buna göre $(-3,6) - \{1\}$ aralığında eğrilik yönü aşağı doğrudur.

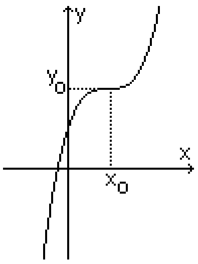
3. Dönüm (Büküm) Noktası

Tanım

f fonksiyonu sürekli olmak üzere, fonksiyonun konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya dönüm (büküm) noktası denir.

Diğer bir ifade ile, f fonksiyonunun grafiğinin, eğrilik yönünün değiştiği noktaya dönüm (büküm) noktası denir.

Örnek:



Yandaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktası (x_o, y_o) dır.

Çünkü $x < x_o$ için, eğrilik yönü aşağı doğru;

$x > x_o$ için, eğrilik yönü yukarı doğrudur.

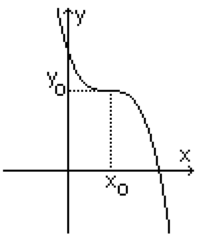
Buna bağlı olarak,

$x < x_o$ için $f''(x) < 0$ ve

$x > x_o$ için $f''(x) > 0$ dır.

$f''(x_o) = 0$ olur.

Örnek:



Yandaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktası (x_o, y_o) dır.

Çünkü $x < x_o$ için, eğrilik yönü yukarı doğru;

$x > x_o$ için, eğrilik yönü aşağı doğrudur.

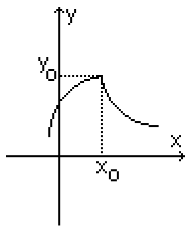
Buna bağlı olarak,

$x < x_o$ için $f''(x) > 0$ ve

$x > x_o$ için $f''(x) < 0$ dır.

$f''(x_o) = 0$ olur.

Örnek:



Yandaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktası (x_o, y_o) dır.

Çünkü $x < x_o$ için, eğrilik yönü aşağı doğru;

$x > x_o$ için, eğrilik yönü yukarı doğrudur.

Buna bağlı olarak,

$x < x_o$ için $f''(x) < 0$ ve

$x > x_o$ için $f''(x) > 0$ dır.

$f''(x_o)$ yoktur.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = (x-2)^3$ fonksiyonunun dönüm noktası olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$f'(x) = 3.(x-2)^2$

$f''(x) = 6.(x-2)$

$6.(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩		∪

$x = 2$ noktasında ikinci türevin işareti değişmiştir. Buna göre $(2, f(2))$ fonksiyonun dönüm noktasıdır.

$x = 2$ nin ikinci türevin kökü olduğuna dikkat ediniz.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = (x-2)^3$ fonksiyonunun dönüm noktası olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$f'(x) = 4.(x-2)^3$

$f''(x) = 12.(x-2)^2$

$12.(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ çift katlı köktür.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

$x = 2$ noktasında ikinci türevin işareti değişmemiştir. Buna göre $(2, f(2))$ fonksiyonun dönüm noktası değildir.

$x = 2$ nin ikinci türevin kökü olmasının dönüm noktası oluşturmaya yetmediğine dikkat ediniz.

Sonuç

$x = x_o$ noktasının dönüm noktası, $x = x_o$ da ikinci türevin olmasını garanti etmez. Yani, dönüm noktasında türev tanımlı olmayabilir.

$x = x_o$ ın ikinci türevin kökü olması, $x = x_o$ ın dönüm noktası olmasını garanti etmez. Dönüm noktasında ikinci türevin işaret değiştirmesi gerekir.

$x = x_o$ dönüm noktası ve bu noktada ikinci türev tanımlı ise, ikinci türev sıfırdır.

Örnek:

Denklemi $y = x^3 + ax^2 + (a+5)x - 1$ olan eğrinin dönüm noktasının apsisi 1 olduğuna göre ordinatı kaçtır?

Çözüm:

Eğrinin dönüm noktasının apsisi 1 olduğuna göre, $x = 1$ ikinci türevin köküdür.

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6.1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$ tür.

Bu durumda, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ dir.

Dönüm noktasının apsisi 1 ise, ordinatı,

$f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 2.1 - 1 = -1$ dir.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. R den R ye tanımlı $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ve $g(x) = mx^2 + nx + 3$ fonksiyonları veriliyor. Bu fonksiyonların grafiklerinde aynı apsisli noktalardaki teğetler birbirine paralrel olduğuna göre (m, n) ikilisini bulunuz.

Çözüm:

Aynı apsisli noktalardaki teğetlerin paralel olması için, aynı aynı apsisli noktadaki türevlerin eşit olması gerekir.

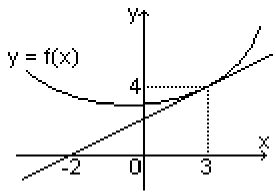
Buna göre,

$f'(x) = 2x + 2$ ve $g'(x) = 2mx + n$ olup,

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x + 2 = 2mx + n \Rightarrow m = 1$ ve $n = 2$ dir.

O halde $(m, n) = (1,2)$ bulunur.

2.

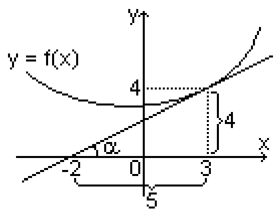


$y = f(x)$ eğrisinin $(3,4)$ noktasındaki teğeti olan $y = g(x)$ doğrusu Ox eksenini $(-2,0)$ noktasında kesmektedir.

$h(x) = f(x).g(x)$ olduğuna göre $h'(3)$ kaçtır?

Çözüm:

$y = f(x)$ eğrisinin $(3,4)$ noktasındaki teğeti $y = g(x)$ tir. Şekilde verilenlere göre teğetin eğimini bulalım:



$m_T = \tan\alpha = \dfrac{4}{5}$ tir. Ayrıca,

$f(3) = 4$

$g(3) = 4$

$f'(3) = m_T = \dfrac{4}{5}$ ve

$g'(3) = m_T = \dfrac{4}{5}$ tir.

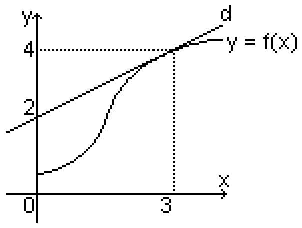
$h(x) = f(x).g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$\Rightarrow h'(3) = f'(3).g(3) + f(3).g'(3)$

$\Rightarrow h'(3) = \dfrac{4}{5}.4 + \dfrac{4}{5}.4 = \dfrac{32}{5}$ bulunur.

$\Rightarrow h^{'}(3) = \frac{4}{5}.4 + \frac{4}{5}.4 = \frac{32}{5}$ bulunur.

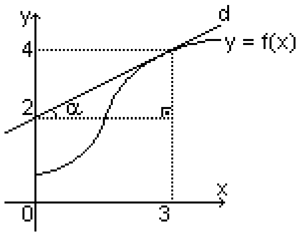
3.



$y = f(x)$ eğrisinin $A(3,4)$ noktasındaki teğeti Oy eksenini $(0,2)$ noktasında kesmektedir.

$g(x) = \frac{x}{f(x)}$ olduğuna göre $g^{'}(3)$ kaçtır?

Çözüm:



Şekilde verilenlere göre ,

$f(3) = 4$

$f^{'}(3) = \tan\alpha = \frac{2}{3}$ tür.

Buna göre,

$$g^{'}(x) = \frac{f(x) - f^{'}(x).x}{f^2(x)} \Rightarrow g^{'}(3) = \frac{f(3) - f^{'}(3).3}{f^2(3)}$$

$$\Rightarrow g^{'}(3) = \frac{4 - \frac{2}{3}.3}{4^2} = \frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

4. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ çemberinin $A(0,-1)$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

Çözüm:

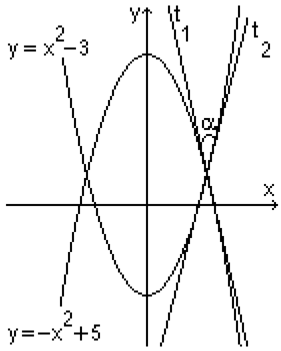
$$F(x,y) = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 10 = 0$$

$F^{'}(x,y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2.(x+1)}{2.(y-1)} = -\frac{x+1}{y-1}$ olduğu için $A(0,-1)$ noktasındaki normalinin eğimi;

$$m_N = -\frac{1}{F^{'}(0,-1)} = -\frac{1}{\frac{0+1}{-1-2}} = -3 \text{ tür.}$$

5. $f(x) = -x^2 + 5$ ve $g(x) = x^2 - 3$ eğrilerinin kesim noktalarından geçen teğetler arasındaki dar açının tanjantı kaçtır?

Çözüm:



Önce eğrilerin kesim noktalarını belirleyelim:

$x^2 - 3 = -x^2 + 5$ ise,

$x = -2$ veya $x = 2$ dir.

$x = -2$ ise,

$y = (-2)^2 - 3 = 1$

$x = 2$ ise, $y = 2^2 - 3 = 1$ olur.

Buna göre, eğrilerin kesim noktaları $A(2,1)$ ve $B(-2,1)$ dir. $A(2,1)$ noktasındaki teğetler ve oluşan dar açı şekildeki gibidir. Şekil Oy eksenine göre simetrik olduğu için, $B(-2,1)$ noktasındaki teğetlerin oluşturacağı açının ölçüsü de aynıdır.

Bunun için biz sadece $A(2,1)$ noktasındaki teğetlerin eğimlerini ve oluşturdukları dar açının ölçüsünü bularak sonuca gideceğiz.

$$f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f^{'}(x) = -2x \Rightarrow m_{t_1} = f^{'}(2) = -4 \text{ tür.}$$

$$g(x) = x^2 - 3 \Rightarrow g^{'}(x) = 2x \Rightarrow m_{t_2} = g^{'}(2) = 4 \text{ tür.}$$

Teğetler arasındaki dar açının ölçüsü α ise,

$$\tan\alpha = \frac{m_{t_1} - m_{t_2}}{1 + m_{t_1}.m_{t_2}} = \frac{-4-4}{1+(-4).4} = \frac{8}{15} \text{ bulunur.}$$

6. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ eğrisinin $y = x - 1$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

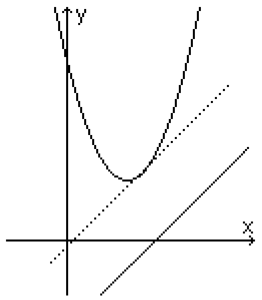
Çözüm:

Önce eğri ile doğrunun birbirine göre durumlarını belirleyelim.

$x^2 - 2x + 4 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -11 < 0$

olduğundan eğri ile doğru kesişmez.



Eğrinin doğruya en yakın noktası, doğruya paralel olan teğetinin değme noktasıdır.

$y = x - 1$ doğrusunun eğimi 1 olduğuna göre , eğimi 1 olan teğetin değme noktasını bulmalıyız.

İstenen noktanın apsisi x_o olsun. Buna göre, $f'(x_o) = 1$ koşuluna uyan $(x_o, f(x_o))$ noktasını bulalım:

$f(x) = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

$f'(x_o) = 1 \Rightarrow 2.x_o - 2 = 1 \Rightarrow x_o = \frac{3}{2}$ dir.

$x_o = \frac{3}{2}$ için $f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 2.\frac{3}{2} + 4 = \frac{13}{4}$ tür.

Buna göre, değme noktası (parabolün $y = x - 1$ doğrusuna en yakın noktası) : $(\frac{3}{2}, \frac{13}{4})$ tür.

7. $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$ fonksiyonu için aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

a) $x = -3$ te yerel maksimumu vardır.

b) $-1 < x < \infty$ aralığında artandır.

c) $-3 < x < -1$ aralığında azalandır.

d) $x = -2$ de eğrilik yönü değişir.

e) $-1 < x < \infty$ aralığında eğrilik yönü yukarı doğrudur.

Çözüm:

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3.(x + 3).(x + 1)$

$3.(x + 3).(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -3$ veya $x = -1$ dir.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Yerel maximum		Yerel minimum		

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ ise,

$f''(x) = 6x + 12$ dir.

$6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2$ dir.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$		∩		∪	

$-\infty < x < -2$ aralığında eğrilik yönü aşağı doğrudur.

8. Her $x \in [2,8]$ için $f'(x) > 0$ dır. Buna göre, her $x \in (2,8)$ için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

a) $f(x) > f(2)$

b) $f(x) > 0$

c) $f(x) < 0$

d) $f(x) > f(8)$

e) $f(x) = f(8)$

Çözüm:

Her $x \in [2,8]$ için $f'(x) > 0$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonu $[2,8]$ aralığında artandır.

Bu durumda $2 < x < 8$ iken $f(2) < f(x) < f(8)$ dir.

9. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre f nin minimum değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$

$12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2.(x-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1).(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x+1).(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 1$ (çift katlı kök)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↗

Yerel minimum

Tablodan da görüleceği gibi f fonksiyonu $x = -1$ için minimum değerini alır. Bu değer:

$f(-1) = 3.(-1)^4 - 4.(-1)^3 - 6.(-1)^2 + 12.(-1) + 5 = -6$ dır.

10. $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24 - 1$ eğrisinin ekstremum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 1$

$f'(x) = 12x^2 - 36x + 24$

$12x^2 - 36x + 24 = 0 \Rightarrow x = 1$ veya $x = 2$ dir.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

Yerel maximum Yerel minimum

Tablodan da görüleceği gibi f fonksiyonunun, $x = 1$ ve $x = 2$ de yerel minimumu vardır.

Yani yerel ekstremum noktalarının apsisleri toplamı:
1 + 2 = 3 tür.

11. $f(x)$ fonksiyonu $0 < x < \infty$ aralığında azalan bir fonksiyondur. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artan bir fonksiyondur.

a) $x - f(x)$

b) $f^3(x)$

c) $4.f(x)$

d) $f(x^2)$

e) $f(x) - x$

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonu $0 < x < \infty$ için azalan olduğuna göre, $0 < x < \infty$ için $f'(x) < 0$ dır.

a) $\left(x - f(x)\right)' = 1 - f'(x) > 0$ dır.
Buna göre $x - f(x)$ artandır.

b) $\left(f^3(x)\right)' = 3.f^2(x).f'(x) < 0$ dır.

Buna göre $f^3(x)$ azalandır.

c) $\left(4f(x)\right)' = 4.f'(x) < 0$ dır.
Buna göre $4.f(x)$ azalandır.

d) $\left(f(x^2)\right)' = 2x.f'(x^2) < 0$ dır.

Buna göre $f(x^2)$ azalandır.

e) $\left(f(x) - x\right)' = f'(x) - 1 < 0$ dır.
Buna göre $f(x) - x$ azalandır.

12. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fonksiyonunun minimum değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ dir.

$f(x)$, $x = x_o$ da minimum değerini alsın.

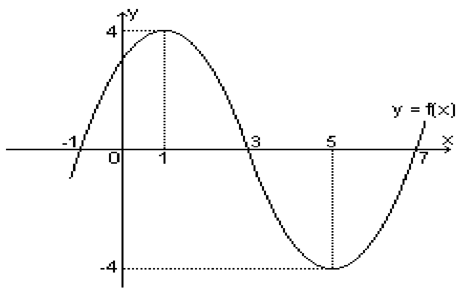
Bu durumda $f'(x_o) = 0$ dır. Buna göre,

$f'(x_o) = 2.x_o - 2 = 0 \Rightarrow x_o = 1$ dir.

Buna göre minimum değer:

$f(x_o) = f(1) = 1^2 - 2.1 + 4 = 3$ tür.

13.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

a) $f''(-1) < 0$

b) $f''(1) < 0$

c) $f''(3) = 0$

d) $f''(5) > 0$

e) $f''(7) = 0$

Çözüm:

$x < 3$ iken eğri konkav (eğrilik yönü aşağı) olduğu için,

$f''(-1) < 0$ ve $f''(1) < 0$ dır.

(3.0) dönüm noktası olabileceği için, $f''(3) = 0$ olabilir.

$3 < x$ iken eğri konveks (eğrilik yönü yukarı) olduğu için,

$f''(5) > 0$ ve $f''(7) > 0$ dır.

Kesinlikle $f''(7) = 0$ olamaz.

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + mx}{x - 1}$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasında ekstremumunun olması için m kaç olmalıdır?

Çözüm:

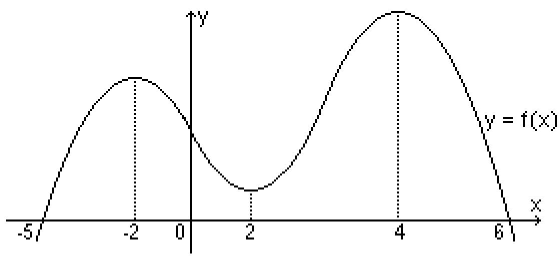
$x = 4$ noktasında ekstremum olması için $f'(4) = 0$ olması gerekir. Buna göre,

$$f'(x) = \frac{(2x + m).(x - 1) - 1.(x^2 + mx)}{(x - 1)^2}$$

$$f'(4) = \frac{(2.4 + m).(4 - 1) - 1.(4^2 + m.4)}{(4 - 1)^2} = 0$$

$$0 = \frac{(8 + m).3 - (16 + 4m)}{9} \Rightarrow m = 8 \text{ dir.}$$

15.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a) $f'(-3) > 0$ b) $f'(0) < 0$ c) $f'(3) > 0$

d) $f'(4) = 0$ e) $f'(6) = 0$

Çözüm:

$y = f(x)$ fonksiyonu, $x < -2$ veya $2 < x < 4$ iken artan olduğu için,

$f'(-3) > 0$ ve $f'(3) > 0$ dır.

$-2 < x < 2$ iken azalan olduğu için, $f'(0) < 0$ dır.

$x = 4$ iken yerel maksimum olduğu için $f'(4) = 0$ dır.

$x > 4$ iken azalan olduğu için, $f'(6) < 0$ dır.

Yani $f'(6) = 0$ olamaz.

16. $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 8$ fonksiyonunda apsisi $x = -2$ olan nokta dönüm (büküm) noktasıdır. Buna göre m kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 8$

$f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$

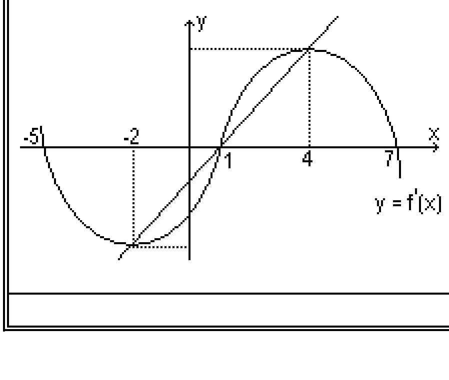
$f''(x) = 6x + 2m$ olur.

$x = -2$ dönüm (büküm) noktası olduğuna göre $f''(-2) = 0$

olur. Buna göre,

$f''(-2) = 6.(-2) + 2m = 0 \Rightarrow m = 6$ bulunur.

17.



$y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği şekilde verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

b) $f''(-4) < 0$ b) $f''(-2) = 0$ c) $f''(1) = 0$

e) $f''(2) > 0$ e) $f''(6) < 0$

Çözüm:

Şekilde verilenlere göre,

$-5 < x < -2$ aralığında $y = f'(x)$ fonksiyonu azalandır. Bu sebeple bu aralıkta bu fonksiyonun türevi negatiftir. Yani $-5 < x < -2$ için $f''(x) < 0$ dır.

Buna göre, $f''(-4) < 0$ dır.

$x = -2$ de $y = f'(x)$ fonksiyonu fonksiyonu yerel minimuma sahiptir. Bunun için bu noktada türevi sıfırdır. Yani $f''(-2) = 0$ dır.

$-2 < x < 4$ aralığında $y = f'(x)$ fonksiyonu artandır. Bu sebeple bu aralıkta bu fonksiyonun türevi pozitiftir. Yani $-2 < x < 4$ için $f''(2) > 0$ dır.

Buna göre, $f''(2) > 0$ dır.

$4 < x < 7$ aralığında $y = f'(x)$ fonksiyonu azalandır. Bu sebeple bu aralıkta bu fonksiyonun türevi negatiftir. Yani $4 < x < 7$ için $f''(x) < 0$ dır.

Buna göre, $f''(6) < 0$ dır.

KONU BİTMİŞTİR.