FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN ÇİZİMİ

GRAFİK ÇİZME STRATEJİSİ

1. Fonksiyonun tanım aralığı belirlenir.

2. Fonksiyon bir kapalı aralıkta tanımlıysa, uç noktalardaki değerleri hesaplanır.

3. Eğer periyodik ise, fonksiyonun periyodu bulunur. Esas periyotta çizim yapılır; diğer aralıklarda çizim tekrarlanır.

4. fonksiyonun tek veya çift olup olmadığına bakılır.

Çift ise, $x \geq 0$ için çizim yapılır; oluşan görüntünün Oy eksenine göre simetriği alınarak, çizim tamamlanır.

Tek ise, $x \geq 0$ için çizim yapılır; oluşan görüntünün orjine göre simetriği alınarak, çizim tamamlanır.

5. Eğrinin eksenleri kestiği noktalar belirlenir.

6. Varsa asimptotlar belirlenir.

7. Fonksiyon R de (reel sayılar da) tanımlıysa, $x \to \mp\infty$ için fonksiyonun limiti hesaplanır.

8. Fonksiyonun birinci türevi alınarak artan ya da azalan olduğu aralıklar belirlenir; ekstremum noktaları hesaplanır.

9. Fonksiyonun ikinci türevi alınarak eğrilik yönünün yukarı ya da aşağı olduğu aralıklar belirlenir; dönme noktaları hesaplanır.

10. Elde edilen bilgilere göre, değişim tablosu yapılır.

11. Değişim tablosuna göre, grafik çizilir.

Bazı grafiklerin çiziminde, yukarıdaki bilgilerin aynı anda hepsine ihtiyaç duyulmayabilir.

A. Polinom Fonksiyonların Grafiği

Polinom biçimindeki fonksiyonlar $(-\infty,+\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu fonksiyonların asimptotu olamaz.

Örnek:

$f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

e. Fonksiyonun tanım kümesi $A = (-\infty,+\infty) = R$ dir.

f. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = 0^3 - 12.0 = 0$ dır.

Buna göre, fonksiyon Oy eksenini $(0,0)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = x^3 - 12.x = 0$ ise

$x^2 = 12 \Rightarrow x = -2\sqrt{3}$ veya $x = 2\sqrt{3}$ tür.

Buna göre, fonksiyon Ox eksenini $(-2\sqrt{3},0)$ ve $(2\sqrt{3},0)$ noktalarında keser.

g. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3 - 12x) = \pm\infty$

h. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 2$ dir.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Yerel maximum   Yerel minimum

$x = -2$ için $f(-2) = (-2)^3 - 12.(-2) = 16$ dır.

$x = 2$ için $f(2) = 2^3 - 12.2 = -16$ dır.

İstenirse yukarıdaki değişim tablosu göz önüne alınarak grafik çizilebilir. Çünkü tablodan şunları çıkarabiliriz: fonksiyon $-\infty$ dan -2 ye kadar artan değerler almakta, $(-2,16)$ noktasında yerel maksimum oluşmakta, -2 den 2 ye kadar azalan değerler almakta, $(2,-16)$ noktasında yerel minimum oluşmakta, 2 den $+\infty$ a kadar artan değerler almaktadır.

Sezgisel olarak, $(-2,2)$ aralığında bir dönme noktası olduğu görülmektedir. Bu nokta merak edilirse, ikinci türeve bakılır.

5. Fonksiyonun ikinci türevini alalım:

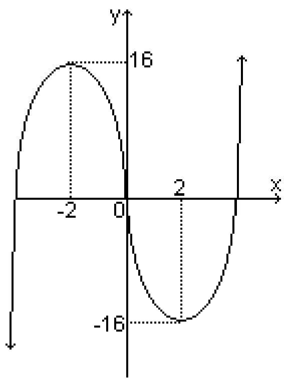
$$f(x) = x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ dır.}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Fonksiyonun eğrilik yönü $x < 0$ için aşağı, $x > 0$ için yukarı; $(0,0)$ noktası dönme noktasıdır.

6. Değişim tablosuna göre, grafik çizilir



Grafik dikkatle incelenirse, yukarıda belirtilen bütün bilgilerin doğrulandığı görülür.

Ayrıca, grafiği çizmek için, ikinci türeve bakılmayabileceği görülür.

Uyarı

Grafik çizimini daha az işlemle, örneğin değişim tablosuna gerek duymadan sonuçlandırabilecek bir yaklaşım ortaya koymalıyız.

Bunun için bazı kolaylıkları ortaya koyacağız.

Kural

$f(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde eğri Ox eksenini keser, çift katlı köklerinde eğri Ox eksenine teğettir.

Örnek:

$f(x) = (1-x)^3.(x+4)^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = (-\infty,+\infty) = R$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = (1-0)^3.(0+4)^2 = 16$ dır.

Buna göre, fonksiyon Oy eksenini $(0,16)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = (1-x)^3.(x+4)^2 = 0$ ise

$(1-x)^3 = 0$ veya $(x+4)^2 = 0$ dır.

$(1-x)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$ tek katlı köktür.

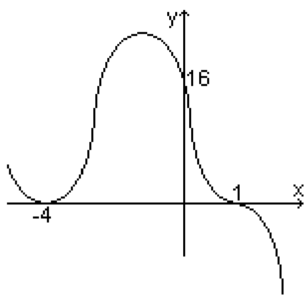
$(x+4)^2 = 0 \Rightarrow x = -4$ çift katlı köktür.

Buna göre, fonksiyon Ox eksenini $(1,0)$ noktasında keser, $(-4,0)$ noktasında ise eğri Ox eksenine teğettir.

3. $\lim_{x \to -\infty} (1-x)^3.(x+4)^2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (1-x)^3.(x+4)^2 = -\infty$

Şimdilik eğriye dair üç bilgi ürettik. Bu üç bilgiyi sağlayacak şekilde, grafiği yaklaşık olarak çizelim:



Çizilen grafiğin doğru olup olmadığını sorgulayalım:

$f(-1) = 72$

$f(-5) = 216$

$f(2) = -36$ dır.

Bulunan değerlerin yaklaşık olarak doğrulandığı görülür.

Örnek:

$f(x) = (x+2)^2.(x-1)^2$ fonksiyonunun grafiğini kısa yoldan çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = (0+2)^2.(0-1)^2 = 4$ tür.

Buna göre, fonksiyon Oy eksenini $(0,4)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = (x+2)^2.(x-1)^2 = 0$ ise

$0 = (x+2)^2.(x-1)^2 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 1$ dir.

Hem $x = -2$ hem de $x = 1$ çift katlı köktür. Buna göre, eğri $x = -2$ ve $x = 1$ noktalarında Ox eksenine teğet olur.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)^2.(x-1)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)^2.(x-1)^2 = +\infty$

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f(x) = (x+2)^2.(x-1)^2 = (x^2+x-2)^2$

$f'(x) = 2.(x^2+x-2).(2x+1) = 0$

$\Rightarrow 2.(x+2).(x-1).(2x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -2$ veya $x = 1$ veya $x = -\frac{1}{2}$ dir.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Yerel minimum		Yerel maximum		Yerel minimum		

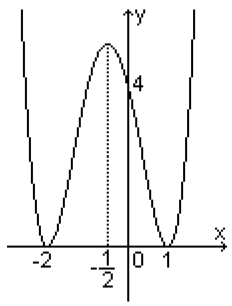
$x = -2$ için $f(-2) = 0$ dır.

$x = -\frac{1}{2}$ için $f(-\frac{1}{2}) = \frac{81}{16}$ dır.

$x = 1$ için $f(1) = 0$ dır.

İstenirse yukarıdaki değişim tablosu göz önüne alınarak grafik çizilebilir. Çünkü tablodan şunları çıkarabiliriz: fonksiyon $-\infty$ dan -2 ye kadar azalan değerler almakta, $(-2,0)$ noktasında yerel minimum oluşmakta, -2 den $-\frac{1}{2}$ ye kadar artan değerler almakta, $(-\frac{1}{2}, \frac{81}{16})$ noktasında yerel maksimum oluşmakta, $-\frac{1}{2}$ den 1 e kadar azalan değerler almakta, $(1,0)$ noktasında yerel minimum oluşmakta, 1 den $+\infty$ a kadar artan değerler almaktadır.

5. Değişim tablosuna göre grafiği çizelim.



Grafik dikkatle incelenirse, yukarıda belirtilen bütün bilgilerin doğrulandığı görülür.

Ayrıca, grafiği çizmek için, ikinci türeve bakılmayabileceği görülür.

Örnek:

$f(x) = \frac{1}{8}.(x-2)^2.(x+4)$ fonksiyonunun grafiğini kısa yoldan çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \frac{1}{8}.(0-2)^2.(0+4) = 2$ dir.

Buna göre, fonksiyon Oy eksenini $(0,2)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = \frac{1}{8}.(x-2)^2.(x+4) = 0$ ise

$0 = (x-2)^2.(x+4) \Rightarrow x = 2$ veya $x = -4$ dir.

$x = 2$ çift katlı köktür. Buna göre, eğri $x = 2$ de Ox eksenine teğettir. $x = -4$ tek katlı köktür. Buna göre, eğri $x = -4$ de Ox eksenini keser.

3. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{8}.(x-2)^2.(x+4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{8}.(x-2)^2.(x+4) = +\infty$$

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f(x) = \frac{1}{8}.(x-2)^2.(x+4) = \frac{x^3 - 12x + 16}{8}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{8} = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ veya } x = 2 \text{ dir.}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			Yerel maximum		Yerel minimum		

$x = -2$ için $f(-2) = 4$ tür.

$x = 2$ için $f(2) = 0$ dır.

İstenirse yukarıdaki değişim tablosu göz önüne alınarak grafik çizilebilir. Çünkü tablodan şunları çıkarabiliriz: fonksiyon $-\infty$ dan -2 ye kadar artan değerler almakta, $(-2,4)$ noktasında yerel maksimum oluşmakta, -2 den 2 ye kadar azalan değerler almakta, $(2,0)$ noktasında yerel minimum oluşmakta, 2 den $+\infty$ a kadar artan değerler almaktadır.

Sezgisel olarak, $(-2,2)$ aralığında bir dönme noktası olduğu görülmektedir. Bu nokta merak edilirse, ikinci türeve bakılır.

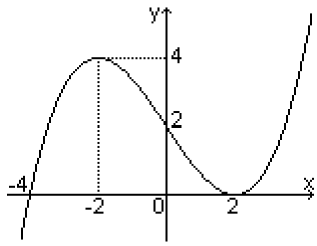
5. Fonksiyonun ikinci türevini alalım:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{8} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x}{8} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ dır.}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''(x)		−	0	+	
f(x)		⌒		◡	

Fonksiyonun eğrilik yönü $x < 0$ için aşağı, $x > 0$ için yukarı; $(0,0)$ noktası dönme noktasıdır.

6. Değişim tablosuna göre, grafik çizilir



Grafik dikkatle incelenirse, yukarıda belirtilen bütün bilgilerin doğrulandığı görülür.

Ayrıca, grafiği çizmek için, ikinci türeve bakılmayabileceği görülür.

E. Asimptotlar

Bir eğrinin herhangi bir kolu başka bir eğriye (ya da doğruya) yakınsıyorsa, yakınsanan eğriye (ya da doğruya) asimptot denir.

Asimptotlar kendi özelliğine göre ad alır. Örneğin, düşey bir doğrudan oluşan asimptota, düşey asimptot; yatay bir doğrudan oluşan asimptota, yatay asimptot; düşey ya da düşey olmayan bir doğrudan oluşan asimptota, eğik asimptot; bir eğriden oluşan asimptota eğri asimptot denir.

1. Düşey Asimptot

Eğri; fonksiyonun paydasının köklerinde düşey asimptotlara sahiptir.

$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ olmak üzere, $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri $x_1, x_2, ..., x_n$ olsun. y eğrisinin düşey asimptotlarının denklemleri:

$x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n$ doğrularıdır.

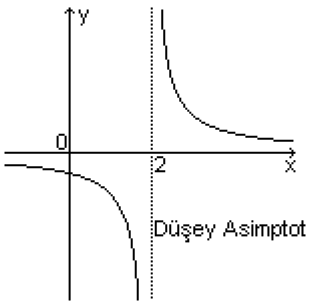
Örnek:

$y = \dfrac{1}{x-2}$ eğrisinin düşey asimptotunu bulalım.

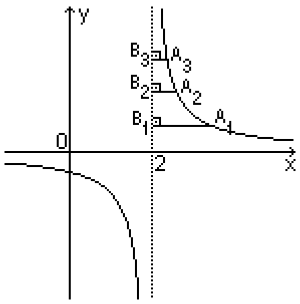
Çözüm:

$y = \dfrac{1}{x-2}$ eğrisinin düşey asimptotu

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.



Eğrinin grafiğinin nasıl çizileceğini ileride vereceğiz. Şimdi yoğunlaşmamız gereken konu, $x = 2$ doğrusunun eğrinin düşey asimptotu oluşudur. Paydanın kökü olduğu için $x = 2$ doğrusunun eğrinin düşey asimptotu olduğu açıktır.(aşikardır)



Eğrinin $x > 2$ koşulunu sağlayan kolunun $x = 2$ doğrusuna uzaklığını inceleyelim:

A_1 noktasının $x = 2$ doğrusuna en yakın noktası B_1 olsun

Daha yukarıda olan A_2 noktasının $x = 2$ doğrusuna en yakın noktası B_2; A_3 noktasının $x = 2$ doğrusuna en yakın noktası B_3 olsun.

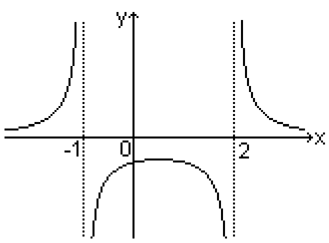
$$|A_1B_1| > |A_2B_2| > |A_3B_3| > \ldots \to 0$$

olduğu görülür. Yani eğrinin kolu, $x = 2$ doğrusuna yakınsamaktadır; $x = 2$ doğrusu düşey asimptottur.

Örnek:

$y = \dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulalım.

Çözüm:



Paydayı sıfır yapan değerler düşey asimptot olacağından,

$(x-2).(x+1) = 0$ ise

$x = 2$ veya $x = -1$ dir.

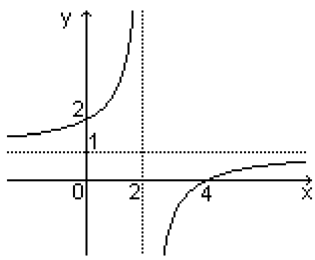
$x = 2$ ve $x = -1$ doğruları düşey asimptottur.

2. Yatay Asimptot

$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = c$, $(c \in R)$ ise yatay asimptot vardır. Yatay asimptotun denklemi, $y = c$ dir.

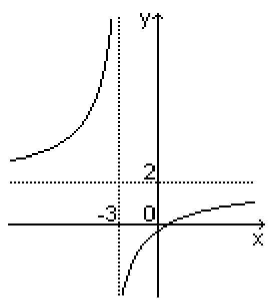
Örnek:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-4}{x-2} = 1$ olduğu için $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ eğrisinin yatay asimptotu $y = 1$ doğrusudur.



Paydanın kökü olduğu için $x = 2$ doğrusu eğrinin düşey asimptotudur.
Eğrinin eksenleri kesim noktalarını bulursak, kabaca grafik ortaya çıkar.

Örnek:



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+3} = 2$ olduğu için $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ eğrisinin yatay asimptotu $y = 2$ doğrusudur.

Paydanın kökü olduğu için $x = -3$ doğrusu eğrinin düşey asimptotudur.

Eğrinin eksenleri kesim noktalarını bulursak, kabaca grafik yandaki şekilde olduğu gibi ortaya çıkar.

3. Eğik Asimptot

$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ denkleminde $P(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden 1 büyük ise $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eğrisinin bir eğik asimptotu vardır.

Eğik asimptotun denklemi $P(x)$ in $Q(x)$ e bölümüyle bulunur.

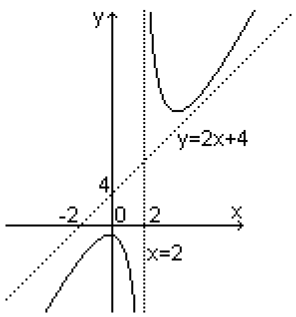
Örnek:

$y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 2}$ eğrisinin eğik asimptotunun denklemini bulalım

Çözüm:

Paydaki ifadenin derecesi paydadaki ifadenin derecesinden 1 büyük olduğu için $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 2}$ eğrisinin bir eğik asimptotu vardır.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 1 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\;2x^2 - 4x & 2x + 4 \\ \cline{1-1} 4x + 1 & \\ -\;\;4x - 8 & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

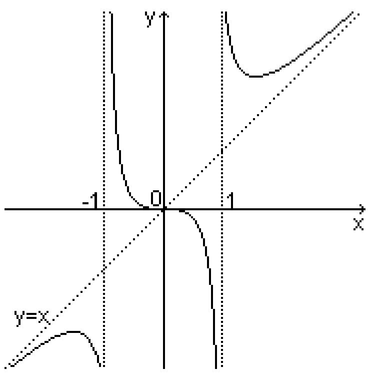


$y = 2x + 4$ doğrusu $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 2}$ eğrisinin eğik asimptotudur.

Paydanın kökü olduğu için $x = 2$ doğrusu eğrinin düşey asimptotudur.

Eğrinin eksenleri kesim noktalarını bulursak, kabaca grafik yukarıdaki şekilde olduğu gibi ortaya çıkar.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen eğrinin eğik asimptotu $y = x$ doğrusudur.

4. Eğri Asimptot

$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ denkleminde $P(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden en az 2 büyük ise $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eğrisinin bir eğri asimptotu vardır.

Eğik asimptotun denklemi $P(x)$ in $Q(x)$ e bölümüyle bulunur.

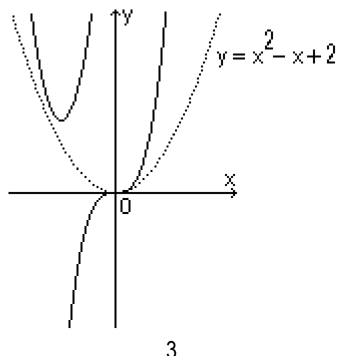
Örnek:

$y = \dfrac{x^3 + x}{x + 1}$ eğrisinin eğri asimptotunun denklemini bulalım

Çözüm:

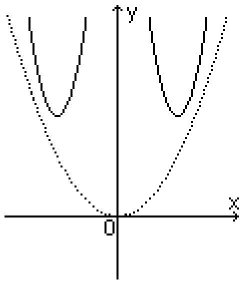
Paydaki ifadenin derecesi paydadaki ifadenin derecesinden 2 büyük olduğu için $y = \dfrac{x^3 + x}{x + 1}$ eğrisinin bir eğri asimptotu vardır.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x & x + 1 \\ \cline{2-2} -\;x^3 + x^2 & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-1} -x^2 + x & \\ -x^2 - x & \\ \cline{1-1} 2x & \\ 2x + 2 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$



$y = x^2 - x + 2$ eğrisi $y = \dfrac{x^3 + x}{x + 1}$ eğrisinin eğri asimptotudur.

Örnek:



Yandaki şekilde grafiği verilen eğrinin eğri asimptotu $y = x^2$ eğrisidir.

C. Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri

Örnek:

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{2\}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{1}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$ dir.

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0, -\dfrac{1}{2})$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{1}{x-2} = 0$ ise bu koşulu sağlayan,

bir x reel sayısı olmadığından eğri Ox eksenini kesmez.

3. Paydanın kökü olan, $x = 2$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ olduğuna göre $y = 0$ doğrusu

yatay asimptottur.

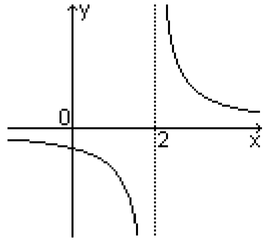
4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} = 0$ ise bu koşulu sağlayan,

bir x reel sayısı olmadığından türev daima $(x \neq 2)$ negatif, yani fonksiyon tanımlı olduğu değerler için, daima azalandır.

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$f'(x)$	—	—
$f(x)$	↘	↘

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir.



Örnek:

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

f. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{-2\}$ dir.

g. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{2.0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$ dir.

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0, \dfrac{1}{2})$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ dir.

Buna göre, eğri Ox eksenini $(-\dfrac{1}{2}, 0)$ noktasında keser.

h. Paydanın kökü olan, $x = -2$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} = 2$ olduğuna göre $y = 2$ doğrusu

yatay asimptottur.

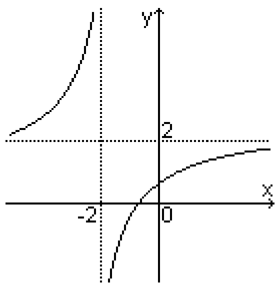
4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f'(x) = \dfrac{2.(x+2) - 1.(2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2} = 0$ ise bu

koşulu sağlayan, bir x reel sayısı olmadığından türev daima $(x \neq -2)$ pozitif, yani fonksiyon tanımlı olduğu değerler için, daima artandır.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	↗		↗

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir.



Örnek:

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}$$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{-1\}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$$x = 0 \text{ için } f(0) = \frac{0-2}{(0+1)^2} = -2 \text{ dir.}$$

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0,-2)$ noktasında keser.

$$y = 0 \text{ için } f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

Buna göre, eğri Ox eksenini $(2,0)$ noktasında keser.

3. Paydanın kökü olan, $x = -1$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{(x+1)^2} = 2$$ olduğuna göre $y = 0$ doğrusu

yatay asimptottur.

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{1.(x+1)^2 - 2.(x+1).(x-2)}{(x+1)^4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+4x+5}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ veya } x = 5 \text{ tir.}$$

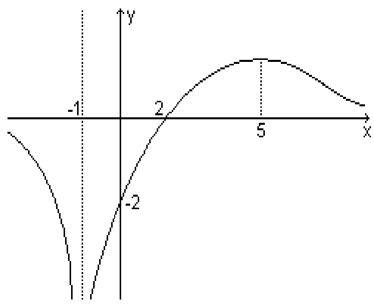
x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	↗		↘

Yerel maximum

$$x = 5 \text{ için } f(5) = \frac{5-2}{(5+1)^2} = \frac{1}{12} \text{ dir. Buna göre}$$

fonksiyonun maksimum noktası $(5, \frac{1}{12})$ dir.

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir.



Fonksiyonun belirttiği eğri $(2,0)$ noktasında yatay asimptot olan $y = 0$ doğrusunu kesti.

Eğri $x = 5$ te maksimum değerini aldıktan sonra $x \to \infty$ için $y = 0$ a yani yatay asimptota yakınsar.

Uyarı

Fonksiyonun belirttiği eğri düşey asimptotların dışında kalan diğer (yatay, eğik, eğri) asimptotları kesebilir.

Örneğin, $f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}$ fonksiyonunun belirttiği eğri $x = 2$ noktasında yatay asimptot olan $y = 0$ doğrusunu kesmiştir.

Örnek:

$f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A=R-\{2\}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x=0$ için $f(0)=\dfrac{0^2-0-1}{0-2}=\dfrac{1}{2}$ dir.

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0,\dfrac{1}{2})$ noktasında keser.

$y=0$ için $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0$ ise,

$\Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ veya $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir.

Buna göre, eğri Ox eksenini $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$ ve $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)$ noktalarında keser.

3. Paydanın kökü olan, $x=2$ düşey asimptottur.

Payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük olduğuna göre eğik asimptot vardır.

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-1 & x-2 \\ \cline{2-2} -\;x^2-2x & x+1 \\ \cline{1-1} x-1 & \\ -\;x-2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Eğik asimptotun denklemi $y=x+1$ olarak bulunur.

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x)=\frac{(2x-1).(x-2)-1.(x^2-x-1).(x-2)}{(x-2)^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x=1 \text{ veya } x=3 \text{ tür.}$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Yerel maximum	↘	Yerel minimum	↗

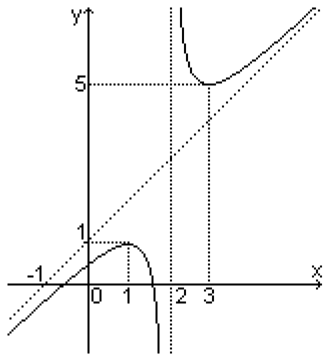
$x=1$ için $f(1)=\dfrac{1^2-1-1}{1-2}=1$ dir.

Buna göre fonksiyonun maksimum noktası $(1,1)$ dir.

$x=3$ için $f(3)=\dfrac{3^2-3-1}{3-2}=5$ tir.

Buna göre fonksiyonun minimum noktası $(3,5)$ tir.

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir.



Örnek:

$f(x)=\dfrac{x^3-2}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A=R-\{0\}$ dır.

2. $x = 0$ düşey asimptot olduğu için, eğri Oy eksenini kesmez.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$ dir.

Buna göre, eğri Ox eksenini $\left(\sqrt[3]{2}, 0\right)$ noktasında keser.

3. Paydanın kökü olan, $x = 0$ düşey asimptottur.

Payın derecesi paydanın derecesinden 2 büyük olduğuna göre eğri asimptot vardır.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{2}{x} = x^2 - \frac{2}{x}$$

olduğuna göre, $y = x^2$ parabolü eğri asimptottur.

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{3x^2.x - 1.(x^3 - 2)}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \text{ dir.}$$

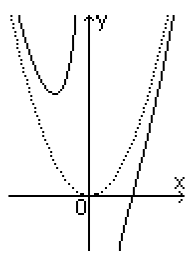
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Yerel minimum

$x = -1$ için $f(-1) = \dfrac{(-1)^3 - 2}{-1} = 3$ tür.

Buna göre fonksiyonun minimum noktası $(-1, 3)$ tür.

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



Örnek:

$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{-1\}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{0^2 + 2.0}{0^2 + 2.0 + 1} = 0$ dır.

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0,0)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} = 0$ ise,

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -2$ dir.

Buna göre, eğri Ox eksenini $(-2, 0)$ ve $(0,0)$ noktalarında keser.

3. Paydanın kökü olan, $x = -1$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} = 1$ olduğuna göre $y = 1$

doğrusu yatay asimptottur.

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{(2x + 2).(x + 1)^2 - 2.(x + 1).(x^2 + 2x)}{(x + 1)^4} = 0$$

$$\Rightarrow 2.(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

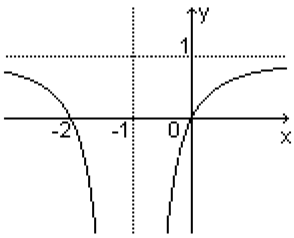
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Yerel minimum

$x = -1$ için $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 2.(-1)}{(-1)^2 + 2.(-1) + 1} = \dfrac{-1}{0} = \infty$

olduğundan fonksiyonun yerel minimum noktası yoktur.

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



Örnek:

$f(x) = \dfrac{9}{9 - x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{-3,3\}$ tür.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{9}{9 - 0^2} = 1$ dir.

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0,1)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{9}{9 - x^2} = 0$ ise, bu koşulu sağlayan,

bir x reel sayısı olmadığından eğri Ox eksenini kesmez.

3. Paydanın kökü olan, $x = -3$ ve $x = 3$ düşey asimptotturlar.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{9}{9 - x^2} = 0$ olduğuna göre $y = 0$

doğrusu yatay asimptottur.

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f'(x) = \dfrac{0.(9 - x^2) - (-2x).9}{(9 - x^2)^2} = \dfrac{18x}{(9 - x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

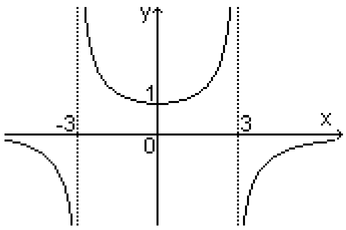
x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$f(x)$	↘	↘	↗	↗	

Yerel minimum

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{9}{9 - 0^2} = 1$ dir.

Buna göre fonksiyonun minimum noktası $(0,1)$ dir.

e. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



Örnek:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{0\}$ dır.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{0^2 - 4}{0} = -\infty$ olduğundan, eğri Oy eksenini ∞ da keser.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x} = 0 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 2$ olup eğri Ox eksenini $(-2,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında keser.

3. Paydanın kökü olan, $x = 0$ düşey asimptottur.

Payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük olduğuna göre eğik asimptot vardır.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x} = x - \dfrac{4}{x}$ olduğundan eğik asimptotun

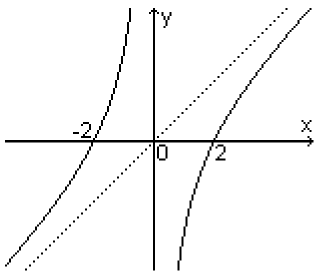
denklemi $y = x$ olarak bulunur.

i. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f'(x) = \dfrac{2x.x - 1.(x^2 - 4)}{x^2} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ ise bu koşulu sağlayan, bir x reel sayısı olmadığından türev daima $(x \neq 0)$ pozitif, yani fonksiyon tanımlı olduğu değerler için, daima artandır.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

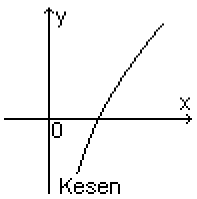
5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir

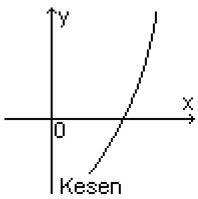


Sonuç

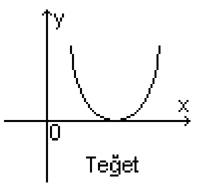
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ olsun.

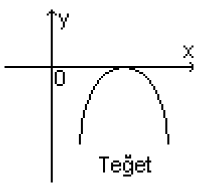
1. $P(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde kesen oluşur.



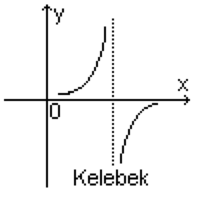


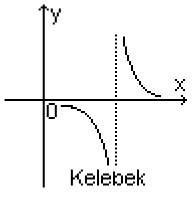
2. $P(x) = 0$ denkleminin çift katlı köklerinde teğet oluşur.



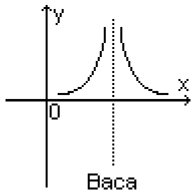


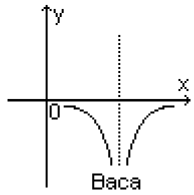
3. $Q(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde kelebek oluşur.





4. $Q(x) = 0$ denkleminin çift katlı köklerinde baca oluşur.





Örnek:

$f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{2\}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \dfrac{0^3 - 4.0^2 + 5.0}{0 - 2} = 0$ olduğundan,
eğri Oy eksenini $(0,0)$ da keser.

$y = 0$ için $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x}{x - 2} = 0$

$\Rightarrow x.(x^2 - 4x + 5) = 0 \Rightarrow x.(x - 5).(x + 1) = 0$

denkleminin kökleri $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 5$ tir.

Ancak $x = -1$ ve $x = 5$ verilen denklemi

sağlamadığından kök olamazlar. Buna göre eğri Ox

eksenini $(0,0)$ noktasında keser.

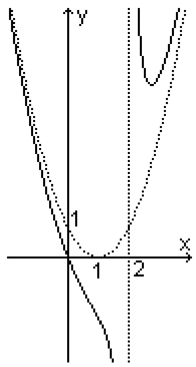
3. Paydanın kökü olan, $x = 0$ düşey asimptottur.

Payın derecesi paydanın derecesinden 2 büyük olduğuna göre eğri asimptot vardır.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 4x^2 + 5x & x - 2 \\ \hline
\underline{- \; x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x + 1 \\
\quad - 2x^2 + 5x & \\
\underline{- \; - 2x^2 + 4x} & \\
\qquad x & \\
\underline{- \quad x - 2} & \\
\qquad 2 &
\end{array}
$$

olduğuna göre, $y = x^2 - 2x + 1$ parabolü eğri asimptottur.

4. $x = 2$ paydanın tek katlı kökü olduğundan $x = 2$ kelebek görüntüsü vardır.



D. Köklü Fonksiyonların Grafikleri

Kökün derecesinin tek ya da çift oluşuna göre, nasıl çizim yapılacağını örneklerle ortaya koyalım.

Örnek:

$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+8}{x-1}}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{1\}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = \sqrt[3]{\frac{0+8}{0-1}} = -2$ olduğundan, eğri Oy eksenini $(0,-2)$ da keser.

$y = 0$ için $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+8}{x-1}} = 0 \Rightarrow \frac{x+}{x-1} = 0$

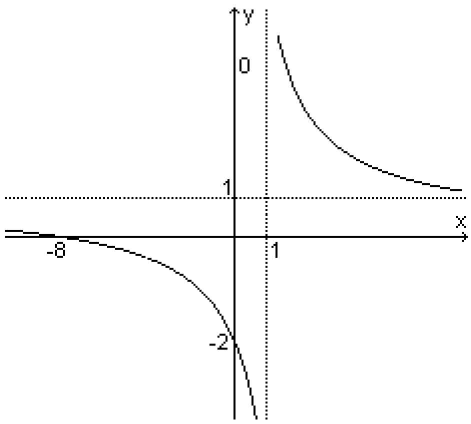
$\Rightarrow x + 8 = 0 \Rightarrow x - 8$

Buna göre eğri Ox eksenini $(-8,0)$ noktasında keser.

3. Paydanın kökü olan, $x = 1$ düşey asimptottur.

$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x+8}{x-1}} = 1$ olduğuna göre $y = 1$ doğrusu yatay asimptottur.

4. Değişim tablosu rasyonel fonksiyonunki gibi yapılabilir. Ancak, buna gerek duymadan grafiği çizebiliriz.



Uyarı

Tek dereceli kök, içinin türev tablosunu, düşey asimptotları ve Ox ekseninin kesim noktalarını etkilemez.

Kural

$f(x) = \sqrt{a^2 + bx + c}$ fonksiyonunda $a < 0$ ise asimptot yoktur. $a > 0$ ise eğik asimptot görülür.

Eğik asimptotların denklemi: $f(x) = \sqrt{a}.\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ dır.

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

b. Derecesi çift olan kökün içindeki ifade negatif olamayacağı için $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ koşulunu sağlayan reel sayılar fonksiyonun tanım kümesini oluşturur.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		+	0	−	0	+	

Buna göre fonksiyonun tanım kümesi $A = R - (-2,4)$ olur.

2. Eğrinin eğik asimptot denklemlerini bulalım.

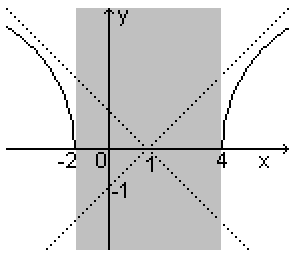
$$y = \sqrt{a}.\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \sqrt{1}.\left|x+\frac{-2}{2.1}\right| = \pm(x-1) \text{ dir.}$$

3. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2.\sqrt{x^2-2x-8}} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

x	-∞		-2		1		4		+∞
f'(x)		–						+	
f(x)		↘	0				0	↗	

4. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



Örnek:

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Derecesi çift olan kökün içindeki ifade negatif olamayacağı için $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ dir.

Buna göre fonksiyonun tanım kümesi $A = [-2,2]$ dir.

2. $a < 0$ olduğu için asimptot yoktur.

3. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{-2x}{2.\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ dır.}$$

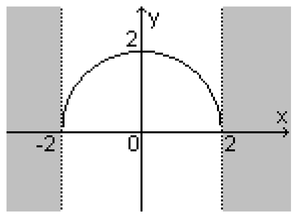
x	-∞		-2		0		2		+∞
f'(x)				+	0	–			
f(x)			0	↗		↘	0		

Yerel maximum

$x = 0$ için $f(0) = \sqrt{4-0^2} = 2$ dir.

Buna göre fonksiyonun maksimum noktası $(0,2)$ dir.

5. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



Uyarı

Buraya kadar verilen bilgilere trigonometrik fonksiyon, üstel fonksiyon, logaritmik fonksiyon gibi bilgileri de katarak değişik soru modelleri de sonuçlandırılabilir.

Örnek:

$f : [0,2\pi] \rightarrow R$, $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. $1 + \sin x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$ dir.

Buna göre fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ dir.

2. $x = \dfrac{3\pi}{2}$ eğrinin düşey asimptotudur.

3. Fonksiyonun birinci türevini alalım:

$$f'(x) = \frac{-\cos x.(1+\sin x) - \cos x.(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2.\cos x}{(1+\sin x)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ veya } x = \frac{3\pi}{2} \text{ dir.}$$

Bu bilgileri değişim tablosunda değerlendirirsek,

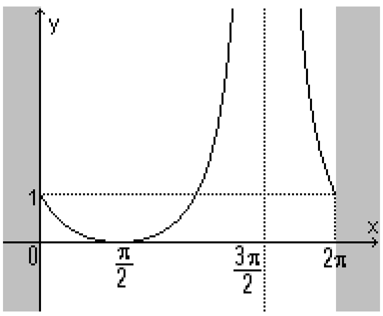
x	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$			$-$	0	$+$		$-$	
$f(x)$			$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

Yerel minimum

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ için } f(\frac{\pi}{2})=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1-1}{1+1}=0 \text{ dır.}$$

Buna göre fonksiyonun minimum noktası $(\frac{\pi}{2},0)$ dır.

4. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



Örnek:

$f(x)=\log\frac{x+10}{1-x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Pozitif sayıların logaritması tanımlıdır.

x	$-\infty$		-10		1		$+\infty$
$\frac{x+10}{1-x}$		$-$	0	$+$		$-$	

Buna göre fonksiyonun tanım kümesi $A=(-10,1)$ dir.

2. Ox ekseninin hangi x değerinde kesildiğini bulalım.

$$\log\frac{x+10}{1-x}=0 \Rightarrow \frac{x+10}{1-x}=1 \Rightarrow x=-\frac{9}{2} \text{ dir.}$$

$$x=0 \text{ için } f(0)=\log\frac{0+10}{1-0}=\log 10=1 \text{ dir.}$$

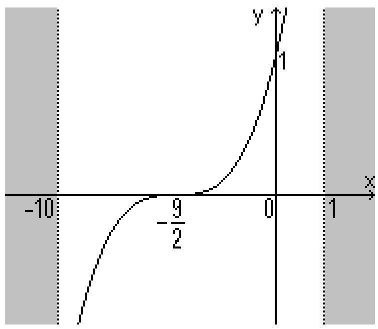
Buna göre, fonksiyon Oy eksenini $(0,1)$ noktasında keser.

3. Eğri $(-10,1)$ aralığında olduğuna göre $x=-10$ daki sağdan limitin ve $x=1$ deki soldan limitin bilinmesi işimizi kolaylaştırır.

$$\lim_{x\to -10^+}\left(\log\frac{x+10}{1-x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\log\frac{x+10}{1-x}\right)=+\infty$$

4. Değişim tablosuna da bakılabilir. Ancak, tanım aralığı, limitler ve kesim noktası fonksiyonun grafiğini çizmek için yeterli olacaktır.



Örnek:

$f(x)=5^{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Karekökün içi negatif olamaz. Buna göre, fonksiyonun tanım kümesi: $A=[0,\infty)$ dur.

2. Eğri Ox eksenini kesmez.

$x=0$ için $f(0)=5^{\sqrt{0}}=1$ olduğundan, eğri Oy

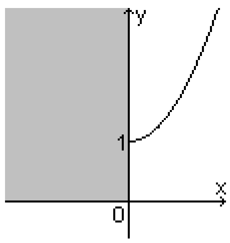
eksenini $(0,1)$ noktasında keser.

3. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.5^{\sqrt{x}}.\ln 5$$

x	$-\infty$	0			$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+	+
$f(x)$		↗	↗	↗	↗

4. Fonksiyonun grafiğini çizelim.



Örnek:

$f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{3\}$ tür.

2. Eğri Ox eksenini kesmez.

$x = 0$ için $f(0) = 2^{\frac{1}{0-3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ olduğundan, eğri Oy

eksenini $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ noktasında keser.

3. Kuvvetin paydasının kökü olan $x = 3$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^0 = 1 \text{ olduğuna göre } y = 1$$

doğrusu yatay asimptottur.

4. $x = 3$ düşey asimptot olduğuna göre, $x = 3$ deki sağdan ve soldan limitin bilinmesi işimizi kolaylaştırır.

$$\lim_{x \to 3^+} 2^{\frac{1}{x-3}} = +\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x \to 3^-} 2^{\frac{1}{x-3}} = 0 \text{ dır.}$$

5. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}.2^{\frac{1}{x-3}}.\ln 2 \text{ dir.}$$

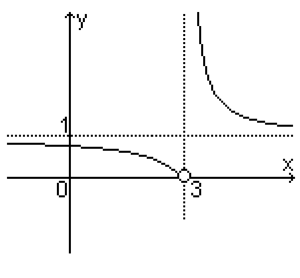
$-\frac{1}{(x-3)^2} < 0$, $2^{\frac{1}{x-3}} > 0$ ve $\ln 2 > 0$ olduğundan

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}.2^{\frac{1}{x-3}}.\ln 2 < 0 \text{ dır.}$$

Buna göre fonksiyon daima $(x \neq 3)$ azalandır.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$	−	−		−	−
$f(x)$	1 ↘	↘		↘	↘ 1

6. Fonksiyonun grafiğini çizelim.



ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $f(x) = (2 - x).(x + 1)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

a. Fonksiyonun tanım kümesi $A = (-\infty, +\infty) = R$ dir.

b. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$x = 0$ için $f(0) = (2 - 0).(0 + 1)^2 = 2$ dır.

Buna göre, fonksiyon Oy eksenini $(0,2)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $f(x) = (2 - x).(x + 1)^2 = 0$ ise

$\Rightarrow x = 2$ veya $x = -1$ dir.

Buna göre, fonksiyon Ox eksenini $(2,0)$ noktasında keser ve $x = -1$ çift katlı kök olduğundan eğri $(-1,0)$ noktasında Ox eksenine teğettir.

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x).(x + 1)^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2 - x).(x + 1)^2 = +\infty$ dur.

d. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$f'(x) = -1.(x + 1)^2 + 2.(2 - x).(x + 1) = 0$

$f'(x) = (x + 1)(-3x + 3) = 0$

$\Rightarrow x = -1$ veya $x = 1$ dir.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Yerel minimum   Yerel maximum

$x = -1$ için $f(-1) = [2 - (-1)].(-1 + 1)^2 = 0$ dır.

$x = 1$ için $f(11) = (2 - 1)].(1 + 1)^2 = 4$ tür.

İstenirse yukarıdaki değişim tablosu göz önüne alınarak grafik çizilebilir. Çünkü tablodan şunları çıkarabiliriz: fonksiyon $-\infty$ dan -1 e kadar azalan değerler almakta, $(-1,0)$ noktasında yerel minimum oluşmakta, -1 den 1 e kadar artan değerler almakta, $(1,4)$ noktasında yerel maksimum oluşmakta, 1 den $+\infty$ a kadar azalan değerler almaktadır.

Sezgisel olarak, $(-1,1)$ aralığında bir dönme noktası olduğu görülmektedir. Bu nokta merak edilirse, ikinci türeve bakılır.

e. Fonksiyonun ikinci türevini alalım:

$f'(x) = (x + 1)(-3x + 3)$ ise

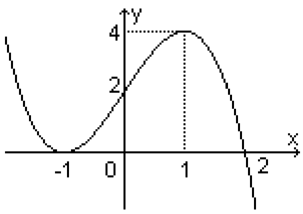
$f''(x) = (-3x + 3) - 3.(x + 1) = 0$

$\Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	
$f(x)$		∪		∩	

Fonksiyonun eğrilik yönü $x < 0$ için yukarı, $x > 0$ için aşağı; $(0,2)$ noktası dönme noktasıdır.

f. Değişim tablosuna göre, grafik çizilir



Grafik dikkatle incelenirse, yukarıda belirtilen bütün bilgilerin doğrulandığı görülür.

2. $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

a. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{-1\}$ dir.

b. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$$x = 0 \text{ için } f(0) = \frac{-0^2 - 2.0}{0^2 + 2.0 + 1} = 0 \text{ dır.}$$

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0,0)$ noktasında keser.

$y = 0$ için

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ veya } x = 0 \text{ dır.}$$

Buna göre, eğri Ox eksenini $(-2,0)$ ve $(0,0)$ noktalarında keser.

c. Paydanın kökü olan, $x = -1$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = -1 \text{ olduğuna göre } y = -1$$

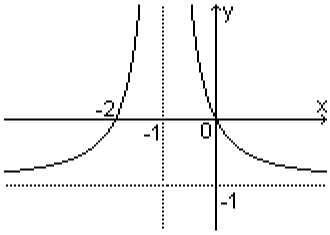
doğrusu yatay asimptottur.

d. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

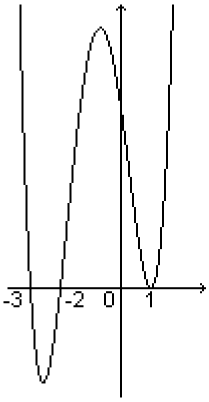
$$f'(x) = \frac{-2.(x+1)}{(x^2 + 2x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ dir.}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

e. Değişim tablosuna göre fonksiyonun grafiği çizilir.



3.



Yandaki şekilde verilen eğrinin denklemi

$f(x) = (x + a).(x + 2).(x - 1)^2$
olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

Grafikte verilenlere göre $x = -3$ için $y = 0$ olmaktadır.

Buna göre,

$$f(-3) = (-3 + a).(-3 + 2).(-3 - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 3).(-1).(-4)^2 = 0 \Rightarrow -a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ bulunur.}$$

4. $f(x) = \dfrac{(x+1).(x-3)}{(x+2)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

a. Fonksiyonun tanım kümesi $A = R - \{-2\}$ dir.

b. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları belirleyelim:

$$x = 0 \text{ için } f(0) = \frac{(0+1).(0-3)}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Buna göre, eğri Oy eksenini $(0,-\frac{3}{4})$ noktasında keser.

$y = 0$ için

$$f(x) = \frac{(x+1).(x-3)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ veya } x = 3 \text{ tür.}$$

Buna göre, eğri Ox eksenini $(-1,0)$ ve $(3,0)$ noktalarında keser.

c. Paydanın kökü olan, $x = -2$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1).(x-3)}{(x+2)^2} = 1 \text{ olduğundan } y = 1$$

doğrusu yatay asimptottur.

d. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f(x) = \frac{(x+1).(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x+2)^2} \text{ ise,}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2).(x+2)^2 - 2.(x+2).(x^2-2x-3)}{(x+2)^4}$$

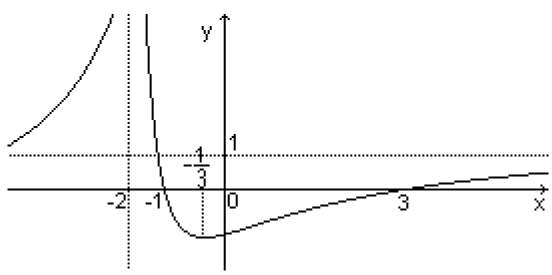
$$f'(x) = \frac{2.(x+2).(3x+1)}{(x+2)^4} = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ veya } x = -\frac{1}{3} \text{ tür.}$$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

Yerel minimum

e. Değişim tablosuna göre fonksiyonun grafiği çizilir.



5. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+mx+4}$ eğrisinin düşey asimptotu olmadığına göre, m nin ait olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm:

Paydanın kökü düşey asimptot olduğuna göre, istenen:

$x^2 + mx + 4 = 0$ denkleminin kökünün olmamasıdır.

Bunun için, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır.

$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4.1.4 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$

olmalıdır.

6. $f(x) = \dfrac{x^2+mx+1}{x^2-4}$ eğrisi Ox eksenini kesmediğine göre, m nin ait olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm:

Payın kökleri Ox ekseninin kesim noktalarının apsisi olduğuna göre, istenen:

$x^2 + mx + 1 = 0$ denkleminin kökünün olmamasıdır.

Bunun için, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır.

$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4.1.1 < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$

olmalıdır.

7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ eğrisinin eğik asimptotlarının denklemlerini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ eğrisinin eğik asimptotlarının denklemleri:

$$y = \sqrt{a}.\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{1}.\left|x + \frac{4}{2.1}\right| = \pm(x+2) \text{ dir.}$$

8. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

a. Derecesi çift olan kökün içindeki ifade negatif olamayacağı için $-x^2+5x-4 \geq 0$ koşulunu sağlayan reel sayılar fonksiyonun tanım kümesini oluşturur.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Buna göre fonksiyonun tanım kümesi $A=[1,4]$

olur.

b. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x=0$ için $f(x)=\sqrt{-0^2+5.0-4}=\sqrt{-2}$ dir.

$\sqrt{-2}$ reel sayı olmadığından, eğri Oy eksenini kesmez.

$y=0$ için

$f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}=0 \Rightarrow x=1$ veya $x=4$ tür.

Buna göre, eğri Ox eksenini $(1,0)$ ve $(4,0)$ noktalarında keser.

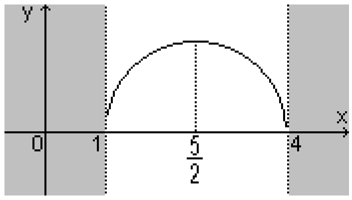
c. Fonksiyonun birinci türevini alalım.

$$f'(x)=\frac{-2x+5}{2.\sqrt{-x^2+5x-5}}=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \text{ dir.}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$			
$f(x)$			0	$\nearrow$		$\searrow$	0		

Yerel maximum

d. Değişim tablosuna göre grafik çizilir



9. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$ eğrisinin asimptotlarının kesim noktasını bulunuz.

Çözüm:

Paydanın kökü düşey asimptot olduğuna göre,

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$ fonksiyonunun düşey asimptotu $x=-2$ dir.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}=x-2+\dfrac{5}{x+2}$ olduğuna göre, $y=x-2$ doğrusu eğrinin eğik asimptotudur.

$x=-2$ doğrusu ile $y=x-2$ doğrusunun kesişim noktası $(-2,-4)$ tür.

10. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2-x}$ eğrisinin, eğri asimptotunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

$f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2-x}=x^2+x+1+\dfrac{x+1}{x^2-x}$ olduğundan

$y=x^2+x+1$ eğrisi, verilen fonksiyonun eğri asimptotudur.

11. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ eğrisinin asimptotlarının denklemlerini bulunuz.

Çözüm:

Paydanın kökü düşey asimptot olduğuna göre,

$\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4$ doğrusu düşey asimptottur.

Fonksiyonun limiti yatay asimptot olduğuna göre,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = 1$ olup $y = 1$ doğrusui, verilen

fonksiyonun yatay asimptotudur.

12. $f(x) = \dfrac{ax+6}{bx+c}$ eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının

kesim noktası $(-2,4)$ olduğuna göre, $\dfrac{c}{a}$ kaçtır?

Çözüm:

Verilen eğrinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası

$(-2,4)$ olduğuna göre, $x = -2$ düşey asimptot; $y = 4$
yatay asimptottur.

Paydanın kökü düşey asimptot olduğuna göre,

$$bx + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow -2 = -\frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b} = 2 \text{ dir.}$$

Fonksiyonun limiti yatay asimptot olduğuna göre,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax+6}{bx+c} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = 4 \text{ tür.}$$

$\dfrac{c}{b} = 2$ ve $\dfrac{a}{b} = 4$ eşitlikleri taraf tarafa bölünürse $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$
olarak bulunur.

KONU BİTMİŞTİR.