L'HOSPİTAL KURALI

Türevin uygulamalarından biri, limit hesabında kullanılmasıdır. Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki limiti hesaplanırken karşımıza çıkan,

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^{∞} , 0^{0} , ∞^{0}

belirsizlikleri, $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülerek, L'Hospital Kuralı yardımıyla kolayca sonuçlandırılır.

Kural

1. f ve g fonksiyonları (a, b) aralığında türevlenebilir olsunlar.

2. Her $x \in (a, b)$ için $g(x) \neq 0$ olsun.

3. $c \in (a, b)$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ olmak üzere,

4. $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ise $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ dir.

Eğer, $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ veya $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ise yukarıdaki kural bir daha uygulanır.

A. $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2^4 - 16}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{4x^3 - 0}{2x - 0} = \frac{4.2^3}{2.2} = \frac{32}{4} = 8 \text{ olur.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x^2 + 4x + 3}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(-1)^3 + 5.(-1) + 6.(-1) + 2}{(-1)^2 + 4.(-1) + 3}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 10x + 6}{2x + 4}$$

$$= \frac{3.(-1)^2 + 10.(-1) + 6}{2.(-1) + 4} = -\frac{1}{2}$$

Uyarı

L'Hospital Kuralında $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğini ortadan kaldırmak için yapılan işlemin: payın türevini paya, paydanın türevini paydaya yazmak olduğuna dikkat ediniz.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5 - \sqrt{x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{x + 6} - 3}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5 - \sqrt{x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{x + 6} - 3} = \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5 - \sqrt{x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{x+6} - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2x - \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 2}}}{\dfrac{1}{2.\sqrt{x+6}}}$$

$$= \frac{2.3 - \dfrac{2.3+3}{2.\sqrt{3^2 + 3.3 - 2}}}{\dfrac{1}{2.\sqrt{3+6}}} = \frac{117}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 8x}{\tan 2x}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 8x}{\tan 2x} = \dfrac{\tan 0}{\tan 0} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{8}{\cos^2 8x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{\dfrac{8}{\cos^2(8.0)}}{\dfrac{2}{\cos^2(2.0)}} = \frac{\frac{8}{1}}{\frac{2}{1}} = 4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2^3 - 6.2^2 + 12.2 - 8}{2^2 - 4.2 + 4} = \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12x + 12}{2x - 4}$$

$$= \frac{3.2^2 - 12.2 + 12}{2.2 - 4} = \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

Birinci uygulamamızda belirsizlik ortadan kalkmadığı için, tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12x + 12}{2x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{6x - 12}{2}$$

$$= \frac{6.2 - 12}{2} = 0 \text{ dır.}$$

II.Yol

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x-2) = 0 \text{ dır.}$$

Uyarı

L'Hospital Kuralında belirtilen koşullar sağlandığı sürece, kural uygulanmaya devam edilir.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 1}{\cos(\pi x) + 1}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 1}{\cos(\pi x) + 1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}{\cos \pi + 1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\cos(\pi x)+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}.\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-\pi.\sin(\pi x)}$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\pi}=\frac{0}{0}\text{ dır.}$$

Tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\cos(\pi x)+1}=\lim_{x\to 1}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin(\pi x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-\frac{\pi}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi.\cos(\pi x)}\right]$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{-\frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2}}{\pi.\cos\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{-1}=-\frac{1}{4}\text{ tür.}$$

B. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

Örnek:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{x^3+x^2-2}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{x^3+x^2-2}=\frac{\infty^3-\infty}{\infty^3+\infty^2-2}=\frac{\infty}{\infty}\text{ dur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{x^3+x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{3x^2+2x}=\frac{3.\infty^2-1}{3.\infty^2+2.\infty}$$

$$=\frac{\infty}{\infty}\text{ olur.}$$

Tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{x^3+x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{3x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{6x+2}$$

$$=\frac{6.\infty}{6.\infty+2}=\frac{\infty}{\infty}\text{ olur.}$$

Tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{x^3+x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{3x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{6x+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{6}=1\text{ bulunur}$$

Bu soru, limit bilgisiyle kısa yoldan sonuçlandırılabilirdi. Ancak, konuyu örnekleme düşüncesiyle, bu yöntem denendi.

Örnek:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1}{x^3+e^x-1}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1}{x^3+e^x-1}=\frac{\infty^2+5\infty-1}{\infty^3+e^\infty-1}=\frac{\infty}{\infty}\text{ dur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1}{x^3+e^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2+e^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x+e^x}=\frac{2}{6.\infty+e^\infty}=0\text{ dır.}$$

Örnek:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan 2x}{\tan x}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{2\cos^2 \frac{\pi}{2}}{2.\cos^2\left(2.\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2.0^2}{2.\cos^2 \pi}$$

$$= \frac{0}{2.(-1)^2} = 0 \text{ olur.}$$

C. $\infty.0$ Belirsizliği

$\infty.0 = \infty.\frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ veya $\infty.0 = \frac{1}{0}.0 = \frac{0}{0}$ düzenlemelerinden biri yapılarak sonuca gidilebilir.

Örnek:

$\lim_{x \to \infty} \left(e^x.\frac{1}{4x-3}\right)$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to \infty} \left(e^x.\frac{1}{4x-3}\right) = \infty.0 \text{ dır.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(e^x.\frac{1}{4x-3}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{4x-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ olur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to \infty} \left(e^x.\frac{1}{4x-3}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{4} = \infty \text{ dur.}$$

Örnek:

$\lim_{x \to 0^+} (x.\ln x)$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0^+} (x.\ln x) = 0.\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x.\ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ olur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım

$$\lim_{x \to 0^+} (x.\ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x}.\sin\frac{4}{x}\right)$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x}.\sin\frac{4}{x}\right) = \infty.0 \text{ dır.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x}.\sin\frac{4}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\frac{4}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{0}{0} \text{ olur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x}.\sin\frac{4}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\frac{4}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{4}{x^2}.\cos\frac{4}{x}}{-\frac{\sqrt{x}}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} (8). \lim_{x \to \infty} \left(\cos\frac{4}{x}\right). \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2.\sqrt{x}}$$

$$= 8.1.0 = 0 \text{ dır.}$$

D. $\infty - \infty$ **Belirsizliği**

$\infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$ düzenlemesiyle sonuca gidilir.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} x)} \right)$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} x)} \right) = \frac{1}{\sin \pi} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} x) - \sin(\pi x)}{\sin(\pi x).\cos(\frac{\pi}{2} x)} \right) = \frac{0}{0} \text{ olur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} x) - \sin(\pi x)}{\sin(\pi x).\cos(\frac{\pi}{2} x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2} x) - \pi\cos(\pi x)}{\pi.\cos(\pi x).\cos(\frac{\pi}{2} x) - \sin(\frac{\pi}{2} x).\sin(\pi x)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}.1) - \pi\cos(\pi.1)}{\pi.\cos(\pi.1).\cos(\frac{\pi}{2}.1) - \sin(\frac{\pi}{2}.1).\sin(\pi.1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}.1 - \pi.(-1)}{\pi.(-1).0 - 1.0} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \pi}{0} = \infty \text{ olur.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sin(\pi x)} \right)$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sin(\pi x)} \right) = \frac{1}{1-1} - \frac{1}{\sin(\pi.1)}$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sin(\pi x)} \right) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\sin(\pi x) - x + 1}{(x-1).\sin(\pi x)} \right)$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sin(\pi x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\sin(\pi x) - x + 1}{(x-1).\sin(\pi x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\pi.\cos(\pi x) - 1}{\sin(\pi x) + \pi.(x-1).\cos(\pi x)} \right)$$

$$= \frac{\pi.\cos(\pi.1) - 1}{\sin(\pi.1) + \pi.(1-1).\cos(\pi.1)}$$

$$= \frac{-\pi - 1}{0 + 0} = -\infty \text{ dur.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{\ln(x-2)}\right)$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\ln(x-2)}\right)=\infty-\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\ln(x-2)}\right)=\lim_{x \to 3}\left(\frac{\ln(x-2)-x+3}{(x-3).\ln(x-2)}\right)$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\ln(x-2)}\right)=\lim_{x \to 3}\left(\frac{\ln(x-2)-x+3}{(x-3).\ln(x-2)}\right)$$

$$=\lim_{x \to 3}\left(\frac{\frac{1}{x-2}-1}{1.\ln(x-2)+\frac{x-3}{x-2}}\right)$$

$$=\lim_{x \to 3}\left(\frac{\frac{1}{3-2}-1}{\ln(3-2)+\frac{3-3}{3-2}}\right)$$

$$=\frac{1-1}{0+\frac{0}{1}}=\frac{0}{0}$$

Tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\ln(x-2)}\right)=\lim_{x \to 3}\left(\frac{\frac{1}{x-2}-1}{1.\ln(x-2)+\frac{x-3}{x-2}}\right)$$

$$=\lim_{x \to 3}\left(\frac{\frac{-1}{(x-2)^2}}{\frac{1}{x-2}+\frac{x-2-x+3}{(x-2)^2}}\right)$$

$$=\frac{-\frac{1}{(3-2)^2}}{\frac{1}{3-2}+\frac{1}{(3-2)^2}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

E. 0^0 , ∞^0 , 1^∞ Belirsizlikleri

Bu tür belirsizliklerde, e tabanında logaritma alınarak sonuca gidilir.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 0}(1+5x)^{\frac{15}{x}}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0}(1+5x)^{\frac{15}{x}}=(1+5.0)^{\frac{15}{0}}=1^\infty \text{ olur.}$$

$y=(1+5x)^{\frac{15}{x}}$ olsun.

$$y=(1+5x)^{\frac{15}{x}} \Rightarrow \ln y=\ln(1+5x)^{\frac{15}{x}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{15}{x}.\ln(1+5x)$$

$$\lim_{x \to 0}(\ln y)=\lim_{x \to 0}\left(\frac{15.\ln(1+5x)}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0}(\ln y)=\lim_{x \to 0}\left(\frac{15.\ln(1+5x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x \to 0}\left(\frac{15.\frac{5}{1+5x}}{1}\right)=\frac{15.\frac{5}{1+5.0}}{1}=75$$

$$\lim_{x \to 0} (\ln y) = 75 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x \to 0} y\right) = 75$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{75}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (1+5x)^{\frac{15}{x}} = e^{75} \text{ tir.}$$

Örnek:

$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = 0^{\sin 0} = 0^0 \text{ dır.}$$

$y = x^{\sin x}$ olsun.

$\ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right) \Rightarrow \ln y = \sin x . \ln x$ olur.

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \lim_{x \to 0^+} \left(\sin x . \ln x\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right) = \frac{\infty}{\infty}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-\sin^2 x}{x . \cos x}\right) = \frac{0}{0} \text{ olur.}$$

Tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-\sin^2 x}{x . \cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 . \sin x . \cos x}{\cos x - x . \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 . \sin 0 . \cos 0}{\cos 0 - 0 . \sin 0} = 0 \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x \to 0^+} y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$\lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{\sin x}$ limitinin değerini araştıralım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{\sin x} = (\cot 0)^{\sin 0} = \infty^0 \text{ dır.}$$

$y = (\cot x)^{\sin x}$ olsun.

$\ln y = \ln\left((\cot x)^{\sin x}\right) \Rightarrow \ln y = \sin x . \ln(\cot x)$ olur.

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \lim_{x \to 0^+} \left(\sin x . \ln(\cot)\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\sin x}}\right) = \frac{\infty}{\infty} \text{ olur.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\sin x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{(\cot x)'}{\cot x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\cot x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) = \frac{\sin 0}{\cos^2 0} = \frac{0}{1} = 0 \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x \to 0^+} y \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{\sin x} = 1 \text{ dir.}$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + x}{x + e^{10}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + x}{x + e^{10}} = \frac{e^\infty + \infty}{\infty + e^{10}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + x}{x + e^{10}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{1} = \infty \text{ dur.}$$

2. $\lim_{a \to x} \frac{a^6 - x^6}{a^4 - x^4}$ limitinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{a \to x} \frac{a^6 - x^6}{a^4 - x^4} = \frac{x^6 - x^6}{x^4 - x^4} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım. Verilen ifadede a nın değişken, x in sabit sayı olduğuna dikkat ediniz.

$$\lim_{a \to x} \frac{a^6 - x^6}{a^4 - x^4} = \lim_{a \to x} \frac{6a^5}{4a^3} = \lim_{a \to x} \frac{3a^2}{2} = \frac{3x^2}{2} \text{ dir.}$$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3}$ limitinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2.\sin 2x}{3x^2} = \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

Tekrar L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2.\sin 2x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4.\cos 2x}{6x}$$

$$= \text{Yoktur}$$

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{x.\ln x}{x + \ln x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x.\ln x}{x + \ln x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x.\ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x + 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty}{1} = \infty \text{ dur.}$$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{8-x^3}{\cos\frac{x.\pi}{4}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to 2} \frac{8-x^3}{\cos\frac{x.\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 2} \frac{8-x^3}{\cos\frac{x.\pi}{4}} = \lim_{x \to 2} \frac{-3x^2}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{x.\pi}{4}} = \frac{-3.2^2}{-\frac{\pi}{4}.\sin\frac{2\pi}{4}}$$

$$= \frac{-12}{-\frac{\pi}{4}.1} = \frac{48}{\pi}$$ dir.

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3-x}{\cot\frac{x.\pi}{6}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to 3} \frac{3-x}{\cot\frac{x.\pi}{6}} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L'Hospital Kuralını uygulayalım

$$\lim_{x \to 3} \frac{3-x}{\cot\frac{x.\pi}{6}} = \lim_{x \to 3} \frac{-1}{\dfrac{\frac{\pi}{6}}{-\sin^2\frac{x.\pi}{6}}}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{6.\sin^2\frac{x.\pi}{6}}{\pi}$$

$$= \frac{6.\sin^2\frac{3.\pi}{6}}{\pi} = \frac{6.1}{\pi} = \frac{6}{\pi}$$ dir.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-2.\sin 2x}{\cos 2x}}{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\sin 2x}{\cos 2x} . \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right) . \lim_{x \to 0} \left(\frac{2.\sin 2x}{\sin x} \right)$$

$$= \frac{\cos 0}{\cos(2.0)} . \lim_{x \to 0} \left(\frac{2.2.\sin x.\cos x}{\sin x} \right)$$

$$= 1.4.\cos 0 = 1.4.1 = 4$$ tür.

8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{1-e^x} - \dfrac{1}{x} \right)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{1-e^x} - \frac{1}{x} \right) = \infty - \infty$$ dur.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{1-e^x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1+e^x}{x.(1-e^x)} = \frac{0}{0}$$ dır.

L'Hospital Kuralını uygulayalım

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{1-e^x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1+e^x}{x.(1-e^x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1+e^x}{(1-e^x)-e^x.x} = \frac{1+e^0}{1-e^0-e^0.0} = \frac{2}{0} = \infty$$ dur.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(3x + e^{2x}\right)^{\frac{4}{x}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0} \left(3x + e^{2x}\right)^{\frac{4}{x}} = (3.0 + e^{2.0})^{\frac{4}{0}} = 1^{\infty}$$ belirsizliği vardır.

$y = (3x + e^{2x})^{\frac{4}{x}}$ olsun.

$$\ln y = \ln\left((3x + e^{2x})^{\frac{4}{x}}\right) \Rightarrow \ln y = \frac{4}{x}.\ln \ln(3x + e^{2x})$$ olur.

$$\lim_{x \to 0} (\ln y) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{4.(3x + e^{2x})}{x}\right) = \frac{0}{0}$$ olur.

L'Hospital Kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \to 0} (\ln y) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{4.(3x + e^{2x})}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{4.\frac{3 + 2.e^{2x}}{3x + e^{2x}}}{1}\right)$$

$$= \frac{4.\frac{3 + 2.e^{2.0}}{3.0 + e^{2.0}}}{1} = \frac{4.\frac{3+2}{1}}{1} = 20$$ olur.

$$\lim_{x \to 0} (\ln y) = 20 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x \to 0} y\right) = 20$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{20}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (3x + e^{2x})^{\frac{4}{x}} = e^{20}$$ dir.

KONU BİTMİŞTİR