EKSTREMUM PROBLEMLERİ

Ekstremum Problemleri

Bu tür problemlerde bir büyüklüğün (çokluğun) alabileceği en büyük (maksimum) değer ya da en küçük (minimum) değer bulunmak istenir.

İstenen çokluk bir değişkenin fonksiyonu olarak yazılır. Bu fonksiyonun maksimum ya da minimum değeri, birinci türevin kökü (kökleri) bulunarak belirlenir.

Çünkü fonksiyonun maksimum ya da minimum noktalarında birinci türev (tanımlıysa) sıfırdır.

Örnek:

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$

$f'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗		↘	

Yerel maximum

Birinci türev artıdan (+) , eksiye (-) geçtiği noktada, fonksiyon maksimum değerini alır.

Buna göre, fonksiyonun alabileceği en büyük değer:

$f(2) = -2^2 + 4.2 + 4 = -4 + 8 + 4 = 8$ olur.

II.Yol

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$

$f'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f''(x) = -2$

$f''(-2) = -2 < 0$

Birinci türevin kökü, ikinci türevi negatif yaptığına göre $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ de en büyük değerini alır.

$f(2) = -2^2 + 4.2 + 4 = -4 + 8 + 4 = 8$ bulunur.

Örnek:

$3x.(4 - x)$ çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = 3x.(4 - x) \Rightarrow f'(x) = 3.(4 - x) + (-1).3x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$f''(x) = -6 \Rightarrow f''(2) = -6 < 0$ dır.

Birinci türevin kökü, ikinci türevi negatif yaptığına göre $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ de en büyük değerini alır.

$f(2) = 3.2.(4 - 2) = 12$ bulunur.

Örnek:

Toplamı 90 olan iki doğal sayıdan birinin karesi ile diğerinin çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

Bu sayılardan biri x ise diğeri 90 – x tir.

x in karesi ile $90 - x$ in çarpımı $f(x)$ olsun.

$f(x) = x^2.(90 - x) = 90x^2 - x^3$

$f'(x) = 180x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 60$ tır.

x	$-\infty$		0		60		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Yerel minimum   Yerel maximum

Birinci türev artıdan (+) , eksiye (-) geçtiği noktada, fonksiyon maksimum değerini alır.

Buna göre, fonksiyonun alabileceği en büyük değer:

$f(60) = 60^2.(90 - 60) = 108000$ olur.

II.Yol

$f(x) = 90x^2 - x^3$

$f'(x) = 180x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = 60$

$f''(x) = 180 - 6x$

$f''(0) = 180 - 6.0 = 180 > 0$

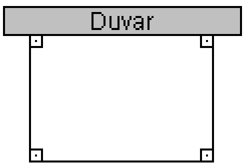
$f''(60) = 180 - 6.60 = -180 < 0$

Birinci türevin kökü, ikinci türevi negatif yaptığında $f(x)$ fonksiyonu en büyük değerini alır.

$x = 60$ için bu durum gerçekleştiğinden, $f(x)$ fonksiyonunun en büyük değeri:

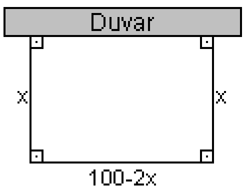
$f(60) = 60^2.(90 - 60) = 108000$ bulunur.

Örnek:



Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve bir kenarında duvar bulunan bir bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 100 metre olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç metre kare olabilir?

Çözüm:



Bahçenin eni: x metre olsun.

Bu durumda boyu: 100 – 2x olur.

Buna göre, bahçenin alanı:

$A(x) = x.(100 - 2x)$ olur.

$A'(x) = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$ tir.

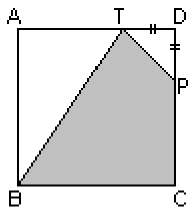
Buna göre bahçenin alanı en fazla;

$A(25) = 25.(100 - 2.25) = 1250 \text{ m}^2$ olur.

Uyarı

Yukarıdaki örnekte, türev tablosu da yapılmadı; ikinci türeve de bakılmadı. Çünkü birinci türevin bir tek kökü bulundu. Ekstremum değer, bulunan köke karşılık gelir. Diğer bir ifadeyle, bir tek kök bulunduğu için, sorulan ekstremum değer bu köke karşılık gelmelidir.

Örnek:



Şekildeki ABCD karesinin bir kenarı 4 birimdir. $|TD| = |DP|$ olduğuna göre, BCPT dörtgeninin alanı en çok kaç birim karedir?

Çözüm:

$|TD| = |DP| = x$ birim ise,

$|AT| = 4 - x$ birim olur.

$A(BCPT) = A(ABCD) - A(PTD) - A(TAB)$

$$= |AB|^2 - \frac{|TD|^2}{2} - \frac{|AT|.|AB|}{2}$$

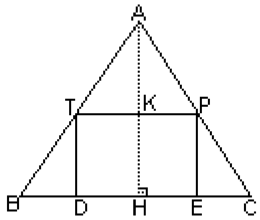
$$= 4^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{(4-x).4}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x + 8$$

$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 8 \Rightarrow A'(x) = -x + 2$ dir.

$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$A(2) = -\frac{2^2}{2} + 2.2 + 8 = 10$ birim karedir.

Örnek:



$|BC| = 8$ br

$|AH| = 6$ br

olmak üzere DEPT dikdörtgenin alanı en çok kaç birim karedir?

Çözüm:

$|DE| = |TP| = x$ birim, $|DT| = |EP| = y$ birim olsun.

$|AK| = |AH| - |KH| = |AH| - |EP| = 6 - y$ olur.

$A\hat{T}P \approx A\hat{B}C$ benzerliğinden,

$$\frac{|TP|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|AH|} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{6-y}{6} \Rightarrow y = \frac{24-3x}{4}$$

$$A(DEPT) = |DE|.|EP| = x.y = x.\frac{24-3x}{4}$$

$$A(x) = x.\frac{24-3x}{4}$$

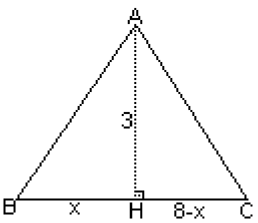
$$A'(x) = \frac{12-3x}{2} = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$A(4) = 4.\frac{24-3.4}{4} = 12 \text{ birim karedir.}$$

Örnek:

Bir ABC üçgeninde $a = 8$ birim ve $h_a = 3$ birim olduğuna göre, ABC üçgeninin çevresi en az kaç birim karedir?

Çözüm:



$|BC| = 8$ br

$|AH| = 3$ br

$|BH| = x$ br ise,

$|HC| = 8 - x$ br olur.

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısını yazalım:

$$|BH|^2 + |AH|^2 = |AB|^2 \Rightarrow x^2 + 3^2 = |AB|^2$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{x^2 + 9}$$

AHC dik üçgeninde pisagor bağıntısını yazalım:

$$|HC|^2 + |AH|^2 = |AC|^2 \Rightarrow (8-x)^2 + 3^2 = |AC|^2$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{(8-x)^2 + 9}$$

ABC üçgeninin çevresi en az,

$$Ç(ABC) = |AB| + |AC| + |BC|$$

$$Ç(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(8-x)^2 + 9} + 8$$

$$Ç'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{-2x - 16}{2\sqrt{(8-x)^2 + 9}}$$

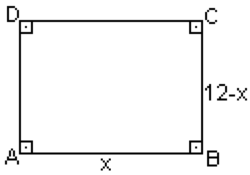
$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{-2x - 16}{2\sqrt{(8-x)^2 + 9}} = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

$$Ç(4) = \sqrt{4^2 + 9} + \sqrt{(8-4)^2 + 9} + 8 = 18 \text{ birimdir.}$$

Örnek:

Çevresi 24 cm olan dikdörtgenlerden alanı en büyük olan dikdörtgenin alanı kaç santimetre karedir?

Çözüm:



$|AB| = x$ br ise,

$|BC| = 12 - x$ br olur.

Dikdörtgenin alanı:

$A(x) = x.(12 - x)$ olur.

$A'(x) = 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$ tir.

Buna göre dikdörtgenin alanı en fazla;

$A(6) = 6.(12 - 6) = 36\,m^2$ olur.

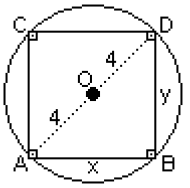
Sonuç

Oluşan şeklin kare olduğuna dikkat ediniz. Çevreleri eşit olan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanı karedir. Bu durum genellenebilir. Şöyle ki: çevreleri eşit olan üçgenlerden alanı en büyük olan eş kenar üçgendir. Çevreleri eşit olan beşgenlerden alanı en büyük olanı düzgün beşgendir. Çevreleri eşit olan altıgenlerden alanı en büyük olanı düzgün altıgendir.

Örnek:

Yarıçapı 4 cm olan çember içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin alanı kaç cm karedir?

Çözüm:



$|AB| = x$ br ,

$|BC| = y$ br olsun.

$x^2 + y^2 = 8^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$ dir.

Dikdörtgenin alanı:

$A(x) = x.y = x.\sqrt{64 - x^2}$ dir.

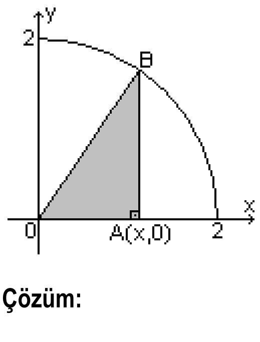
$A'(x) = \dfrac{2.(64 - x^2) - 2x^2}{2.\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ dir.

$A(4\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}.\sqrt{64 - (4\sqrt{2})^2} = 32\,br^2$ dir.

Sonuç

Oluşan dikdörtgenin kare olduğuna dikkat ediniz. Bir çember içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgen karedir.
Bu durum genellenebilir.
Şöyle ki: bir çember içine çizilebilecek en büyük alanlı üçgen eş kenar üçgendir. Bir çember içine çizilecek en büyük alanlı beşgen, düzgün beşgendir. Bir çember içine çizilecek en büyük alanlı altıgen düzgün altıgendir.

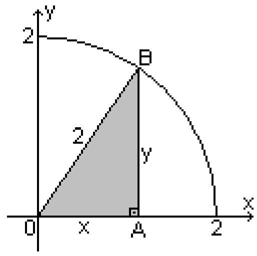
Örnek:



Şekildeki denklemi $x^2 + y^2 = 4$ olan dörtte bir çemberin, B noktasının x ekseni üzerindeki dik izdüşümü $A(x,0)$ noktasıdır. Buna göre, OAB üçgeninin alanı x in hangi değeri için en büyüktür?

Çözüm:

$A(x,0)$ noktasının apsisi x olduğuna göre, B noktasının apsisi de x olur.



B noktasının ordinatı y olsun. B(x,y) noktası çemberin üzerinde olduğuna göre çemberin denklemini sağlar. Buna göre,

$|OA| = x$ br ve $|BA| = y$ br ise

$x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$ dir.

Üçgenin alanı:

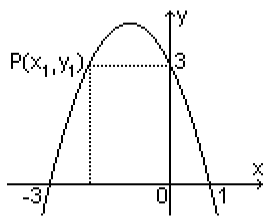
$A = \dfrac{x.y}{2} \Rightarrow A(x) = \dfrac{x.\sqrt{4 - x^2}}{2}$ dir.

$A'(x) = \dfrac{1.\sqrt{4 - x^2}}{2} + \dfrac{-2x}{2.2\sqrt{4 - x^2}}.x = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1.\sqrt{4 - x^2}}{2} + \dfrac{-2x}{2.2\sqrt{4 - x^2}}.x = 0 \Rightarrow 8 - 4x^2 = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}$ dir.

Örnek:



Şekilde $P(x_1, y_1)$ noktası, denklemi $y = -x^2 - 2x + 3$ olan parabol üzerindedir. x_1 in hangi değeri için $x_1 + y_1$ maksimum olur?

Çözüm:

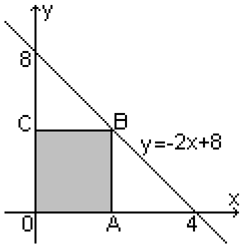
$y = -x^2 - 2x + 3$ ise, $y_1 = -x_1^2 - 2x_1 + 3$ dir.

$A(x_1, y_1) = x_1 + y_1$ olsun.

$A(x_1) = -x_1^2 - x_1 + 3$ olur.

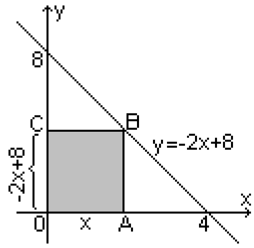
$A'(x_1) = -2x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2}$ bulunur.

Örnek:



B noktası $y = -2x + 8$ doğrusu üzerinde olmak üzere, OABC dikdörtgeninin alanı en fazla kaç birim karedir?

Çözüm:



B noktasının apsisi x, ordinatı y olsun.

B noktası $y = -2x + 8$ doğrusunun üzerinde olduğu için denklemi sağlar.

Yani $y = -2x + 8$ tir.

Buna göre,

$A(AOBC) = x.y = x.(-2x + 8) \Rightarrow A(x) = -2x^2 + 8x$ tir.

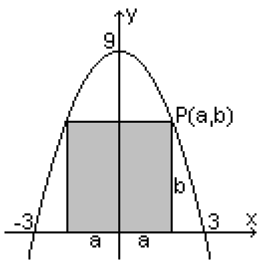
$A'(x) = -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$A(2) = -2.2^2 + 8.2 = 8\ br^2$ bulunur.

Örnek:

Ox ekseni ve $y = 9 - x^2$ parabolü ile sınırlanan bölgeye çizilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



$P(a, b)$ noktası parabolün üstünde olsun.

$P(a, b)$ noktası parabolün üzerinde olduğuna göre, parabolün denklemini sağlar.

Buna göre, $b = 9 - a^2$ dir.

Grafikte de görüldüğü gibi, dikdörtgenin eni 2a birim, boyu b birim olur.

Dikdörtgenin alanı:

$A = 2a.b \Rightarrow A(a) = 2a.(9 - a^2)$ dir.

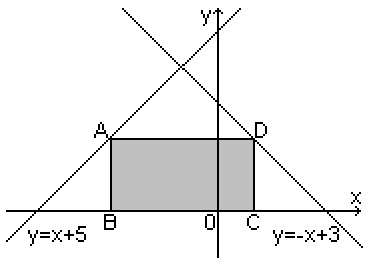
$A'(a) = 18 - 6a^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$ tür.

$A(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.(9 - (\sqrt{3})^2) = 12\sqrt{3}$ birim kare bulunur.

Uyarı

Uzunluk, negatif olamayacağı için, yukarıdaki örneklerde, negatif değerlerin üzerinde durmaya gerek yoktur.

Örnek:



$y = x + 5$ ve $y = -x + 3$ eğrisiyle sınırlanan bölgeye çizilen maksimum alanlı ABCD dikdörtgeninin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:

C noktasının apsisi a ise, D noktasının apsisi de a dır. D noktası $y = -x + 3$ doğrusu üzerinde olduğundan ordinatı $-a + 3$ tür.

Buna göre,

$|DC| = -a + 3\ br$ olur.

$|AB| = |DC|$ olduğu için, A noktasının ordinatı da $-a + 3$ tür.

Şimdi bu noktaya karşılık gelen apsisi bulalım:

A noktası $y = x + 5$ doğrusunun üzerinde olduğu için ordinatı $-a + 3$ olan noktanın apsisi,

$-a + 3 = x + 5 \Rightarrow x = -a - 2$ dir.

Buna göre,

$|OB| = -(-a-2)$ br

$|OC| = a$ br

$|BC| = |OB| + |OC| = 2a + 2$ br olur.

ABCD dikdörtgeninin alanı:

$A(ABCD) = |BC|.|DC| = (2a+2).(-a+3)$

$A(a) = (2a+2).(-a+3) \Rightarrow A'(a) = 2.(-a+3) - 1.(2a+2)$

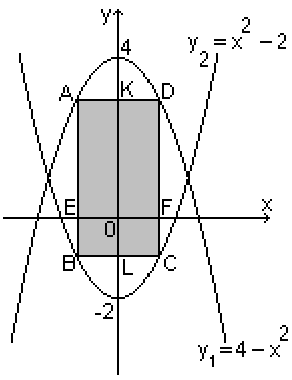
$\Rightarrow A'(a) = -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1$

$A(1) = (2.1+2).(-1+3) = 8$ birim kare bulunur.

Örnek:

$y = x^2 - 2$ ve $y = 4 - x^2$ eğrisiyle sınırlanan bölgeye çizilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



Parabollerin tepe noktaları Oy ekseni üzerinde olduğundan, şekil Oy eksenine göre simetriktir.

Bunun için, KLCD dikdörtgeninin alanının iki katı istenen sonuç olur.

F noktasının apsisi x olsun.

Buna göre, $|OF| = x$ olur.

Şekilde görüldüğü gibi, DC uzunluğunun bir kısmı y_1 parabolü ile, bir kısmı y_2 parabolü ile belirlenmiştir.

$|DF| = y_1$ ve $|FC| = y_2$ olsun.

$$|DC| = |DF| + |FC| = |y_1| + |y_2|$$
$$= (4 - x^2) + \left[-(x^2 - 2)\right] \ldots *$$
$$= 6 - 2x^2 \text{ olur.}$$

$|LC| = |OF| = x$

$|DC| = 6 - 2x^2$ ise,

$A(KLCD) = |LC|.|DC| = x.(6 - 2x^2)$

ABCD dikdörtgeninin alanı:

$A(ABCD) = 2.A(KLCD) = 2x.(6 - 2x^2)$

$A(x) = 2.x.(6 - 2x^2)$

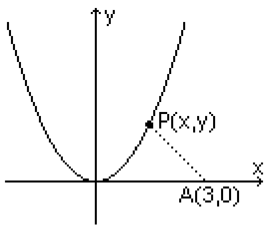
$A'(x) = 12 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$A(1) = 2.1.(6 - 2.1^2) = 8$ birim kare bulunur.

Uyarı

Uzunluk, negatif olamayacağı için, yukarıdaki örnekte FC uzunluğu belirlerken Oy ekseninin negatif değerlerine karşılık geldiği için (*) eşitliğinde y_2 nin önüne eksi işareti konulmuştur..

Örnek:



Yandaki şekilde $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği ile $A(3,0)$ noktası verilmiştir. Grafiğin A ya en yakın noktası P olduğuna göre $|AP|$ kaç birimdir?

Çözüm:

$y = x^2$ olduğu için $P(x,y) = P(x,x^2)$ dir.

Buna göre $|AP|$ uzunluğu:

$$|AP| = \sqrt{(3-x)^2 + (0-x^2)^2}$$

$U(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ dur.

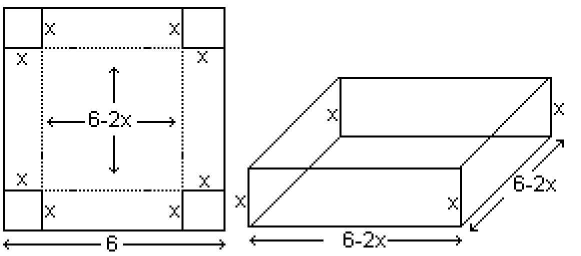
$U'(x) = \dfrac{4x^3 + 2x - 6}{2.\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$|AP| = U(1) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1^2)^2} = \sqrt{5}$ tir

Örnek:

Bir kenarının uzunluğu 6 m olan kare şeklindeki bir saç levha köşelerinden bir miktar kesilerek üstü açık dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutu yapılacaktır. Kutunun hacmi en çok kaç metre küp olabilir?

Çözüm:



Köşelerden kesilecek parçanın bir kenarı x m olsun. Bu durumda oluşacak üstü açık dikdörtgenler prizmasının (kare dik prizma) hacmi, taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Buna göre, hacim:

$H(x) = (6-2x)^2 . x$ tir.

$H'(x) = 2.(6-2x).(-2).x + 1.(6-2x)^2$

$2.(6-2x).(-2).x + (6-2x)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ veya $x = 3$ tür.

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
H'(x)		+	0	−	
H(x)		↗		↘	

Yerel maximum

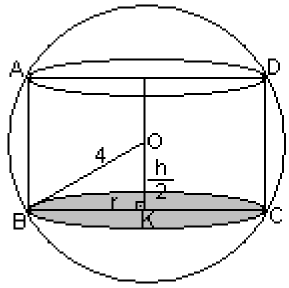
Değişim tablosundan da görüleceği gibi $H(x)$ maksimum değerini $x = 1$ de alır.

Buna göre, hacim en çok, $H(1) = (6 - 2.1)^2.1 = 16\ m^3$ tür.

Örnek:

Yarıçapı 4 birim olan küre içine çizilebilecek maksimum hacimli silindirin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



O, kürenin merkezi ve silindirin yüksekliği h birim olsun.

$|OK| = \dfrac{h}{2}$ olur.

OBK dik üçgeninde pisagor bağıntısını yazalım:

$r^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow r^2 = 16 - \dfrac{h^2}{4}$ tür.

Silindirin hacmi: $H = \pi.r^2.h$ olduğundan,

$H(h) = \pi.(16 - \dfrac{h^2}{4}).h = \pi.(16h - \dfrac{h^3}{4})$

$H'(h) = \pi.(16 - \dfrac{3h^2}{4}) = 0 \Rightarrow h = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

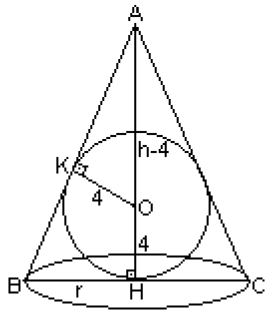
Silindirin hacmi:

$H(\dfrac{8\sqrt{3}}{3}) = \pi.\left(16.\dfrac{8\sqrt{3}}{3} - \dfrac{(\frac{8\sqrt{3}}{3})^3}{4}\right) = \dfrac{256\pi\sqrt{3}}{9}$ birim küptür.

Örnek:

Yarıçapı 4 birim olan kürenin dışına maksimum hacimli koni çizilecektir. Koni, küreye yan yüzlerinden ve tabanından teğet olduğuna göre, koninin yüksekliği kaç birimdir?

Çözüm:



O, kürenin merkezi ve silindirin yüksekliği h birim olsun.

$|OH| = 4$

$|AH| = h$ ise,

$|AO| = h - 4$ olur.

AKO dik üçgeninde pisagor bağıntısını yazalım:

$$|AK|^2 + 4^2 = (h-4)^2 \Rightarrow |AK| = \sqrt{(h-4)^2 - 16} \text{ dır.}$$

$AKO \approx AHB$ benzerliğinden,

$$\frac{|AK|}{|AH|} = \frac{|KO|}{|HB|} \Rightarrow \frac{\sqrt{(h-4)^2 - 16}}{h} = \frac{4}{r}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{16h^2}{(h-4)^2 - 16} = \frac{16h}{h-8} \text{ olur.}$$

r^2 nin bu değerini hacim formülünde yerine yazarak sonuca gidelim.

$$H = \frac{\pi}{3}.r^2.h \Rightarrow H(h) = \frac{\pi}{3}.\frac{16h}{h-8}.h = \frac{\pi}{3}.\frac{16h^2}{h-8}$$

$$H'(h) = \frac{\pi}{3}.\frac{32h.(h-8) - 1.16h^2}{(h-8)^2}$$

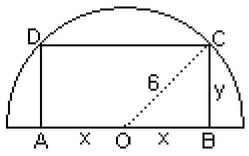
$$H'(h) = \frac{\pi}{3}.\frac{16h^2 - 256h}{(h-8)^2} = 0 \Rightarrow 16h^2 - 256h = 0$$

$\Rightarrow h = 16$ birim bulunur.

Çözümlü Sorular

1. Yarıçapı 6 cm olan yarım çemberin içine çizilebilecek dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın alanı kaç santimetrekaredir?

Çözüm:



Şekilde ifade edilenlere göre

$x^2 + y^2 = 6^2$

$y = \sqrt{36 - x^2}$ olur.

$$A(ABCD) = 2xy \Rightarrow A(x) = 2x.\sqrt{36 - x^2}$$

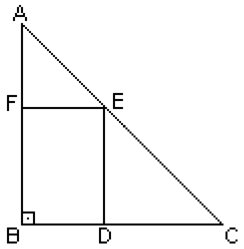
$$A'(x) = 2.\sqrt{36 - x^2} - \frac{2x.2x}{2\sqrt{36 - x^2}} = \frac{2.(36 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$\frac{2.(36 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Rightarrow 36 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Buna göre, dikdörtgenin alanı maksimum:

$$A(3\sqrt{2}) = 2.3\sqrt{2}.\sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 36 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

2.

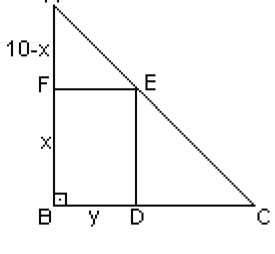


$|AB| = 10$

$|BC| = 8$

olmak üzere, BDEF dikdörtgeninin alanı en çok kaç birim kare olabilir?

Çözüm:



$|BF| = x$ ve $|FE| = y$ olsun.

$AFE \approx ABC$ benzerliğinden,

$$\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{|FE|}{|BX|}\Rightarrow\frac{10-x}{10}=\frac{y}{8}\Rightarrow y=\frac{40-4x}{5}\text{ olur.}$$

$$A(BDEF)=x.y\Rightarrow A(x)=x.\frac{40-4x}{5}$$

$$A'(x)=1.\frac{40-4x}{5}-\frac{4}{5}x=0\Rightarrow x=5\text{ tir.}$$

Buna göre dikdörtgenin alanı en çok:

$$A(BDEF)=A(5)=5.\frac{40-4.5}{5}=5.4=20\text{ birim karedir.}$$

3. $x^2-(m+2)x+m^2-1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $(x_1)^2+(x_2)^2$ toplamının maksimum değeri kaçtır?

Çözüm:

$$(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2$$

$$=\left(-(m+2)\right)^2-2.(m^2-1)$$

$$=m^2+4m+4-2m^2+2$$

$$=-m^2+4m+6$$

$(x_1)^2+(x_2)^2$ toplamı maksimum değeri aldığında

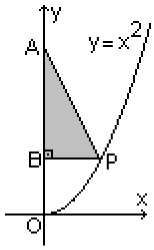
$$f(m)=-m^2+4m+6$$

$$f'(m)=-2m+4=0\Rightarrow m=2\text{ dir.}$$

$(x_1)^2+(x_2)^2=-m^2+4m+6$ ifadesinin en büyük değeri,

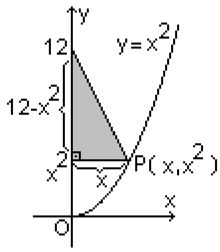
$$f(2)=-2^2+4.2+6=10\text{ olur.}$$

4.



Denklemi $y=x^2$ olan şekildeki parabolün $P(x,y)$ Oy ekseni üzerindeki dik izdüşümü $B(0,y)$ dir. Üçgenin bir köşesi $A(0,12)$ dir. ABP üçgeninin alanı, x in hangi değeri için en büyük olur?

Çözüm:



$A(0,12)$, $B(0,x^2)$, $P(x,x^2)$ olduğuna göre,

$$|BP|=x,(x>0)$$

$$|AB|=12-x^2\text{ olur.}$$

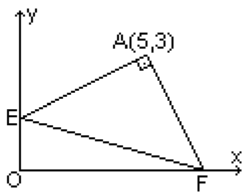
Buna göre,

$$A(ABP)=\frac{|BP|.|AB|}{2}=\frac{x.(12-x^2)}{2}$$

$$A(x)=\frac{x.(12-x^2)}{2}\Rightarrow A'(x)=\frac{12-3x^2}{2}$$

$$\frac{12-3x^2}{2}=0\Rightarrow x=2\text{ dir.}$$

5.



Köşesi $A(5,3)$ olan şekildeki dik üçgenin kenarları koordinat eksenlerini E ve F noktalarında kesmektedir. Buna göre, EF uzunluğu en az kaç birimdir?

Çözüm:

AE nin eğimi m ise AF nin eğimi $-\frac{1}{m}$ dir.

AE nin denklemi: $y-3=m(x-5)$

AE nin denklemi: $y - 3 = -\frac{1}{m}(x - 5)$ olur.

E noktasının apsisi 0 olduğuna göre, ordinatı:

$y = -5m + 3$ olur.

F noktasının ordinatı 0 olduğuna göre, apsisi:

$x = 3m + 5$ olur.

Buna göre, , EF uzunluğu:

$$|EF| = \sqrt{(3m+5)^2 + (-5m+3)^2}$$

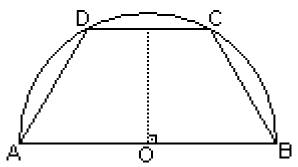
$$f(m) = \sqrt{(3m+5)^2 + (-5m+3)^2}$$

$$f'(m) = \frac{2.(3m+5).3 + 2.(-5m+3).(-5)}{2.\sqrt{(3m+5)^2 + (-5m+3)^2}}$$

$$\frac{2.(3m+5).3 + 2.(-5m+3).(-5)}{2.\sqrt{(3m+5)^2 + (-5m+3)^2}} = 0 \Rightarrow m = 0$$

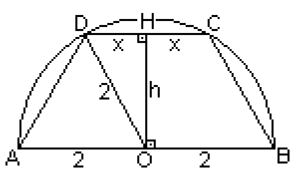
$$f(0) = \sqrt{(3.0+5)^2 + (-5.0+3)^2} = \sqrt{34} \text{ olur.}$$

6.



Çap uzunluğu 4 birim olan yarım çemberin içine şekildeki gibi ABCD yamuğu çiziliyor. Buna göre, yamuğun alanı en çok kaç birim karedir?

Çözüm:



ABCD yamuk olduğu için, üst tabanı alt tabanına paraleldir. Bu sebeple [OH] , [DC] yi iki eşit parçaya böler.

$|DH| = |HC| = x$ ve $|HO| = h$ olsun.

DOH dik üçgeninde pisagor bağıntısını yazalım:

$$|DH|^2 + |HO|^2 = |DO|^2 \Rightarrow x^2 + h^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{4 - x^2} \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$A(ABCD) = \frac{(|DC| + |HB|).h}{2} = \frac{(2x+4).h}{2}$$

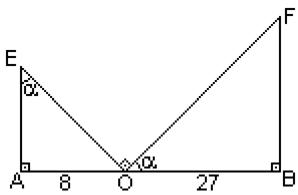
$$A(x) = (x+2).h = (x+2).\sqrt{4 - x^2}$$

$$A'(x) = 1.\sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2.\sqrt{4-x^2}}$$

$$\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

$$A(1) = (1+2).\sqrt{4-1^2} = 3\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

7.



O, [AB] üzerinde

$[AE] \perp [AB]$

$[BF] \perp [AB]$

$[OE] \perp [OF]$, $|AO| = 8$ br, $|OB| = 27$ br

Yukarıdaki verilenlere göre, $\tan\alpha$ nın hangi değeri için $|OE| + |OF|$ toplamı en küçük olur?

Çözüm:

$$\sin\alpha = \frac{|AO|}{|OE|} = \frac{8}{|OE|} \Rightarrow |OE| = \frac{8}{\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{|OB|}{|OF|} = \frac{27}{|OF|} \Rightarrow |OF| = \frac{27}{\cos\alpha}$$

$$|OE| + |OF| = \frac{8}{\sin\alpha} + \frac{27}{\cos\alpha} \text{ dır.}$$

$$f(\alpha) = \frac{8}{\sin\alpha} + \frac{27}{\cos\alpha} \text{ olsun.}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-8\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{27.\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{-8\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{27.\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{-8.\cos^3\alpha + 27\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow -8.\cos^3\alpha + 27.\sin^3\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 8.\cos^3\alpha = 27.\sin^3\alpha = 0$$

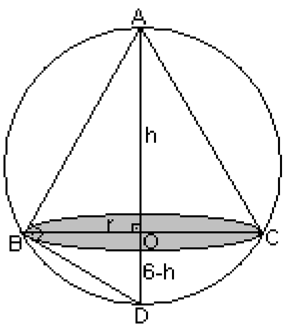
$$\Rightarrow \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \tan^3\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

8. Yarıçapı 3 birim olan küre içine çizilebilecek maksimum hacimli koninin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:



[AD], kürenin çapı; [BC] koninin taban yüzeyinin çapı olsun.

Kürenin çapı 6 birim olduğuna göre,

$|AO| = h$ ise, $|OD| = 6 - h$ olur.

$|OB| = r$ olsun

ABD açısı çapı gördüğü için, ölçüsü 90 derecedir.

ABD dik üçgeninde yükseklik bağıntısını yazalım:

$$r^2 = h.(6 - h)$$

Koninin hacmi:

$$H = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$$

$$H(h) = \frac{1}{3}.\pi.h.(6-h).h = \frac{\pi}{3}.(6h^2 - h^3)$$

$$H'(h) = \frac{\pi}{3}.(12h - 3h^2) = 0 \Rightarrow 12h - 3h^2 = 0 \Rightarrow h = 4$$

$$H(h) = \frac{\pi}{3}.(6h^2 - h^3) \Rightarrow H(4) = \frac{\pi}{3}.(6.4^2 - 4^3)$$

$$H(4) = \frac{32\pi}{3} \text{ birim küp bulunur.}$$

KONU BİTMİŞTİR…