LİMİT VE SÜREKLİLİK

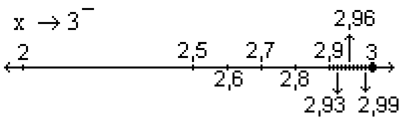
I) LİMİT

A. Soldan Yaklaşma, Sağdan Yaklaşma

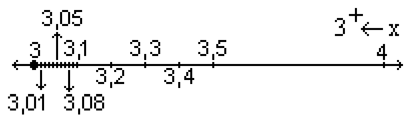
x	x
2,5	3,5
2,8	3,2
2,9	3,1
2,99	3,01
2,999	3,001
…	…
$x \to 3^-$	$x \to 3^+$

Yukarıdaki tablonun birinci sütununda, x değişkeni artan değerler alarak 3'e yaklaşmaktadır.

Yukarıdaki tablonun birinci sütununda, x değişkeni artan değerler alarak 3'e yaklaşmaktadır.



x in 3 ten küçük ve artan değerler alarak 3'e yaklaşması, x in 3'e soldan yaklaşması olarak adlandırılır ve $x \to 3^-$ şeklinde gösterilir.



x in 3 ten büyük ve azalan değerler alarak 3'e yaklaşması, x in 3'e sağdan yaklaşması olarak adlandırılır ve $x \to 3^+$ şeklinde gösterilir.

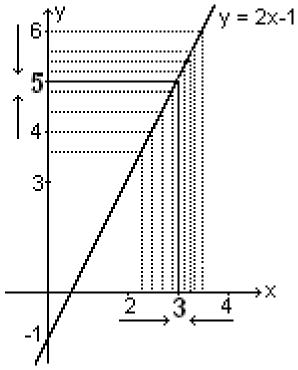
Genel olarak; x değişkeni a'ya, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma denir ve $x \to a^-$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni a'ya, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ şeklinde gösterilir.

B. Bir Fonksiyonda Soldan Veya Sağdan Yaklaşma

$f : R \to R$, $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunda x, 3'e sağdan yaklaşan değerler alırken $f(x)$ in 5'e sağdan yaklaşan değerler aldığı; x, 3'e soldan yaklaşan değerler alırken $f(x)$ in 5'e soldan yaklaşan değerler aldığı aşağıdaki tabloda görülmektedir.

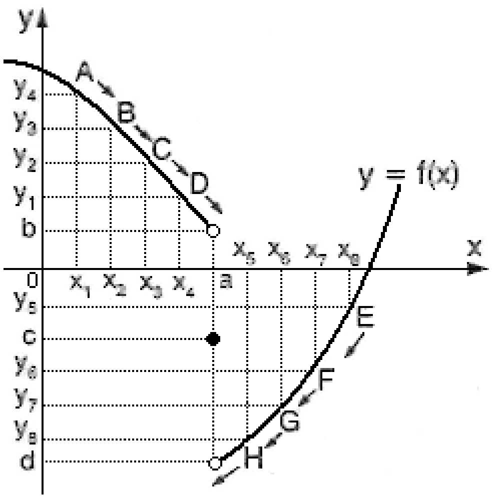
	→								←
x	2,3	2,5	2,7	2,9	**3**	3,1	3,2	3,3	3,5
f(x)	3,6	4	4,4	4,8	**5**	5,2	5,4	5,6	6



Yandaki grafikte görülmekte olduğu gibi, x değişkeni 3,5 ten başlayarak azalan değerler alıp 3'e sağdan yaklaşırken f(x) in 6 dan başlayarak azalan değerler alıp 5'e yaklaştığı; x değişkeni 2,3 ten başlayarak artan değerler alıp 3'e soldan yaklaşırken f(x) in 3,6 dan başlayarak artan değerler alıp 5'e yaklaştığı görülmektedir.

C. Limit Kavramı

Limit ve süreklilik kavramlarını fonksiyonların grafikleri üzerinde açıklayalım.



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için, apsisleri; $x = a$ nın solunda yer alan ve giderek a ya yaklaşan

$A(x_1, y_4)$, $B(x_2, y_3)$, $C(x_3, y_2)$, $D(x_4, y_1)$, …
noktalarını göz önüne alalım:

Bu noktaların apsisleri olan $x_1, x_2, x_3, x_4, ...$ giderek a ya yaklaşırken, ordinatları olan,
$f(x_1) = y_4$, $f(x_2) = y_3$, $f(x_4) = y_1$, … giderek b ye yaklaşır.

Bu durumu; x, a ya soldan yaklaşıyorken $f(x)$, b ye yaklaşır şeklinde ifade edebiliriz.

$f(x)$ in $x = a$ daki soldan limiti b dir denir ve

$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ şeklinde gösterilir.

Yukarıdakine benzer şekilde, apsisleri; $x = a$ nın sağında yer alan ve giderek a ya yaklaşan
$E(x_8, y_5)$, $F(x_7, y_6)$, $G(x_6, y_7)$, $D(x_5, y_8)$,
$H(x_4, y_9)$ … noktalarını göz önüne alalım:

Bu noktaların apsisleri olan $x_8, x_7, x_6, x_5, ...$ giderek a ya yaklaşırken, ordinatları olan,
$f(x_8) = y_5$, $f(x_7) = y_6$, $f(x_6) = y_7$, $f(x_5) = y_8$,
$f(x_4) = y_9$ … giderek d ye yaklaşır.

Bu durumu; x, a ya sağdan yaklaşıyorken $f(x)$, d ye yaklaşır şeklinde ifade edebiliriz.

$f(x)$ in $x = a$ daki sağdan limiti d dir denir ve

$\lim_{x \to a^+} f(x) = d$ şeklinde gösterilir.

Sonuç

Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için

$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ tir.

Tanım

$f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki soldan limiti sağdan limitine eşit ise fonksiyonun $x = a$ daki limiti vardır.

$x = a$ daki sağ limit ve sol limit değeri, fonksiyonun $x = a$ daki limitidir.

$f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki soldan limiti, sağdan limitine eşit değilse fonksiyonun $x = a$ daki limiti yoktur.

Örnek:

$f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun $x = 3$ teki limitini araştıralım.

Çözüm:

Bir önceki sayfada verilen tabloyu ve grafiği göz önüne alalım:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ teki soldan limiti 5 tir.

Bunu $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$ biçiminde gösteririz.

Bu fonksiyonun $x = 3$ teki sağdan limiti de 5 tir.

Bunu $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$ biçiminde gösteririz.

Bu fonksiyonun $x = 3$ teki soldan limiti, sağdan limitine eşit olduğu için fonksiyonun bu noktada limiti vardır ve 5 tir.

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ olur.

Örnek:

Limit kavramı açıklanırken verilen grafikteki $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limitini araştıralım.

Çözüm:

Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan limiti b dir.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

Aynı fonksiyonun $x = a$ noktasındaki sağdan limiti d dir.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = d$$

Verilen fonksiyonda $x = a$ noktasındaki soldan limit sağdan limite eşit olmadığından $x = a$ noktasında fonksiyonun limiti yoktur.

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ yoktur.}$$

Örnek:

$f : R - \{2\} \to R - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ fonksiyonun $x = 2$ noktasındaki limitini araştıralım.

Çözüm:

$x \geq 2$ ise,

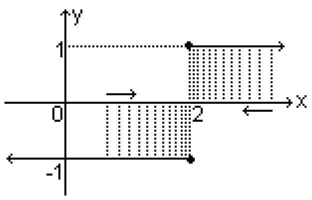
$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$x < 2$ ise,

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 2 \text{ ise} \\ -1, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

	→				2				←
x	1,3	1,5	1,7	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,5
f(x)	-1	-1	-1	-1	-	1	1	1	1



Yukarıdaki parçalı fonksiyonda, tabloda ve grafikte görüldüğü gibi

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2}$$

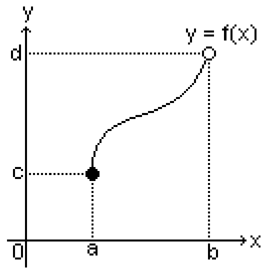
$$= \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} -1 = -1$$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ olduğu için $\lim_{x \to 2} f(x)$ yoktur

D. Uç Noktalardaki Limit



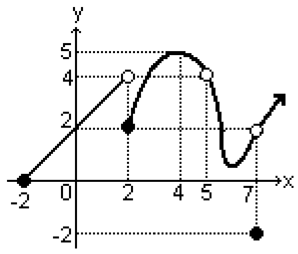
f fonksiyonu $[a,b)$ aralığından $[c,d)$ aralığına tanımlı olduğu için, uç noktalardaki limitleri araştırılırken, sadece tanımlı olduğu tarafın limitine bakılarak sonuca gidilir.

Fonksiyonun bir noktada limitinin olması için, o noktada tanımlı olması zorunlu değildir. Buna göre,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = c$$

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = d \text{ olur.}$$

Örnek:



f fonksiyonunun grafiği yandaki şekilde verilmiştir. Bu fonksiyonun x in -2, 2, 4, 5, 7 değerlerinden bazıları için var olan limitlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

1. $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = 0$ dır.

2. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 4$ ve $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$ olup

   $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ yoktur.

3. $\lim\limits_{x\to4} f(x) = 5$ tir.

4. $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = 4$ ve $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = 4$ olup

   $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to5^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 4$ tür.

5. $\lim\limits_{x\to7^-} f(x) = 2$ ve $\lim\limits_{x\to7^+} f(x) = 2$ olup

   $\lim\limits_{x\to7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to7^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 2$ dir.

Buna göre, var olan limitlerin toplamı:

0 + 5 + 4 + 2 = 11 dir.

Kural

$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$
polinomunun $x = a$ noktasındaki limiti

$\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$ dır.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to3} (2x - 1) = 2.3 - 1 = 5$ tir.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to5} (x^2 - 2x - 1) = 5^2 - 2.5 - 1 = 25 - 10 - 1 = 14$ tür.

E. Limit İle İlgili Özellikler

f ve g fonksiyonları $x = a$ noktasında limitleri var olan iki fonksiyon olsun.

1. $c \in R$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} (c) = c$ dir.

2. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ tir.

3. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x). \lim\limits_{x\to a} g(x)$ tir.

4. $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere,

   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \text{ tir.}$$

5. $c \in R$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} \left[c.f(x)\right] = c. \lim\limits_{x\to a} f(x)$ tir.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to2} (x^3 - 4x + 10)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to2} (x^3 - 4x + 10) = \lim\limits_{x\to2} x^3 - 4. \lim\limits_{x\to2} x + \lim\limits_{x\to2} 10$

$= 2^3 - 4.2 + 10 = 10$ dur.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to-1} [(x^4 + 1).(x^2 + 4x + 1)]$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to-1} [(x^4 + 1).(x^2 + 4x + 1)]$

$= \lim\limits_{x\to-1} (x^4 + 1). \lim\limits_{x\to-1} (x^2 + 4x + 1)$

$= [(-1)^4 + 1].[(-1)^2 + 4.(-1) + 1] = 2.(-2) = -4$ olur.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-4}{x+2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 4}(x+2)} = \frac{4^2-4}{4+2} = \frac{12}{6} = 2 \text{ dir.}$$

Özellik

$$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| \text{ tir.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x\to a} \left|x^2-10x+1\right|$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim\limits_{x\to 2} \left|x^2-10x+1\right| = \left|\lim\limits_{x\to 2}(x^2-10x+1)\right|$$

$$= \left|2^2-2.10+1\right| = |15| = 15 \text{ olur.}$$

Özellik

$n \in Z^+$ olmak üzere,

1. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ tir.

2. a nın bir komşuluğunda $f(x) \ge 0$ ise,
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ tir.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2+10x-11}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2+10x-11} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+10x-11)}$$

$$= \sqrt[3]{(-2)^2+10.(-2)-11}$$

$$= \sqrt[3]{4-20-11} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

Örnek:

$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+5x+2}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+5x+2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5x+2)}$$

$$= \sqrt{2^2+5.2+2} = 4 \text{ olur.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-9}$ limitinin reel sayılardaki değerini bulalım.

Çözüm:

2 nin yeter derecede küçük pozitif bir çok ε komşuluğunda $x^2-9<0$ dır.

Diğer bir ifadeyle $-3<x<3$ için $x^2-9<0$ olduğundan bu aralıkta $\sqrt{x^2-9}$ tanımsızdır, dolayısıyla limit yoktur.
(Fonksiyonun bir noktada tanımsız oluşu ile bir aralıkta tanımsız oluşu farklıdır. Bir noktada tanımsız olan fonksiyonun, o noktadaki limiti belirlenebilir; bir aralıkta tanımlı olmayan fonksiyonun, o aralığın içindeki herhangi bir noktasındaki limiti belirlenemez.)

$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-9}$ limiti yoktur.

Özellik

$n \in Z^+$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ dir.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x - 4)^6$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - x - 4)^6 = [\lim_{x \to 3} (x^2 - x - 4)]^6$$

$$= [3^2 - 3 - 4]^6 = 2^6 = 64 \text{ tür.}$$

Özellik

$n \in R$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ dir.

Örnek:

$$\lim_{x \to 2} 3^{x^2 - 2x - 1} = 3^{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x - 1)}$$

$$= 3^{2^2 - 2.2 - 1} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Özellik

Her x için, $f(x) > 0$ ise,

$\lim\limits_{x \to a} [\log f(x)] = \log[\lim\limits_{x \to a} f(x)]$ tir.

Örnek:

$$\lim_{x \to 2} [\log_2 (x^2 + 1)] = \log_5 [\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)]$$

$$= \log_5 [2^2 + 1] = \log_5 5 = 1 \text{ dir.}$$

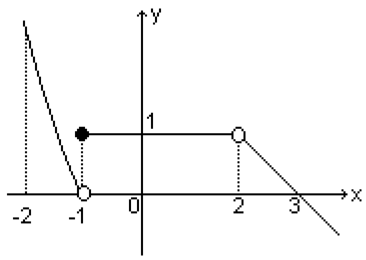
F. Parçalı Fonksiyonun Limiti

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x > 2 \\ 1, & -1 \le x < 2 \\ x^2 - 1, & x < -1 \end{cases}$$ fonksiyonunun $x = -2$

noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



Yukarıdaki grafikte görülmekte olduğu gibi $x = -2$ değerinin hemen sağında ve hemen solunda (dar bir aralık için) $f(x)$ fonksiyonu, $x^2 - 1$ polinomu ile tanımlanmıştır.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 3$

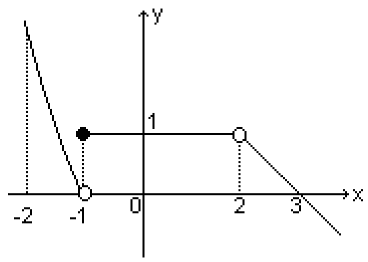
olur.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x > 2 \\ 1, & -1 \le x < 2 \\ x^2 - 1, & x < -1 \end{cases}$$ fonksiyonunun $x = -1$

noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$x = -1$ değerinin hemen solunda (dar bir aralık için)

$f(x)$ fonksiyonu, x^2-1 polinomu ile tanımlanmıştır.

Buna göre,

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} (x^2-1) = (-1)^2-1 = 0 \text{ olur.}$$

$x=-1$ değerinin hemen sağında (dar bir aralık için) $f(x)$ fonksiyonu, $y=1$ sabit fonksiyonu ile tanımlanmıştır.

Buna göre,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} 1 = 1 \text{ olur.}$$

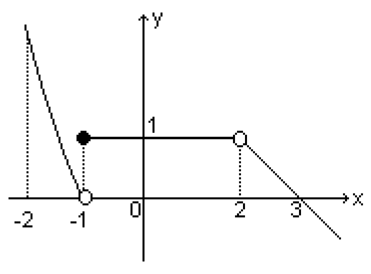
$x=-1$ noktasında

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) \neq \lim_{x\to(-1)^+} f(x)$$ olduğundan limit yoktur.

Örnek:

$$f(x)=\begin{cases} -x+3, & x>2 \\ 1, & -1\le x<2 \\ x^2-1, & x<-1 \end{cases}$$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$x=2$ değerinin hemen sağında (dar bir aralık için) $f(x)$ fonksiyonu, $-x+3$ polinomu ile tanımlanmıştır.

Buna göre,

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} (-x+3) = -2+3 = 1 \text{ olur.}$$

$x=2$ değerinin hemen solunda (dar bir aralık için) $f(x)$ fonksiyonu, $y=1$ sabit fonksiyonu ile tanımlanmıştır.

Buna göre,

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} 1 = 1 \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x) = 1 \text{ olur.}$$

Uyarı

Yukarıda incelediğimiz fonksiyonun $x=2$ noktasında tanımlı olmadığı halde bu noktada limitinin olduğuna; $x=-1$ noktasında tanımlı olduğu halde limitinin olmadığına dikkat ediniz.

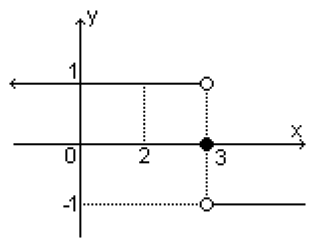
Ayrıca $x=-1$ ve $x=2$ noktaları dışında kalan noktalar için sağ limit sol limit ayırımına gitmeden, limit değerlerinin hesaplandığına (sağ limit sol limit hesabı yapılsaydı da sonucun değişmeyeceğine) dikkat ediniz.

G. İşaret Fonksiyonunun Limiti

Örnek:

$f(x)=\text{sgn}(6-2x)$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$$f(x)=\text{sgn}(6-2x)=\begin{cases} -1, & x>3 \\ 0, & x=3 \\ 1, & x<3 \end{cases}$$ olduğu için işaret fonksiyonunu parçalı fonksiyon gibi düşünüp limitini bulabiliriz.

Yukarıdaki grafikte de görülmekte olduğu gibi $x = 3$ noktasında limit yoktur; $x < 3$ için limit 1; $x > 3$ için limit -1 dir.

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} sgn(6-2x) = \lim_{x\to 2} (1) = 1$ dir.

2.Yol

İşaret fonksiyonu bütün reel sayıları -1, 0 veya 1 sabit sayısına dönüştürür. Sabit sayının limiti kendisine eşit olduğuna göre, sonuç (eğer limit varsa) -1 veya 1 olacaktır. Buna göre limiti hesaplanacak olan noktanın hemen sağında ve hemen solunda, fonksiyonun aldığı değer bulunarak sonuca gidilebilir.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(1,9) = sgn(6-2.1,9) = sgn(2,2) = 1$$

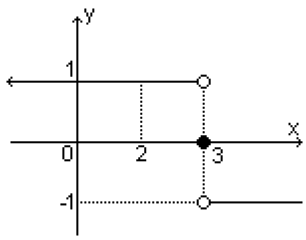
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2,1) = sgn(6-2.2,1) = sgn(1,8) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 1 \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x) = sgn(6-2x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} sgn(6-2.x) = \lim_{x\to 3^-} (1) = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} sgn(6-2.x) = \lim_{x\to 3^+} (-1) = -1$$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$ olduğundan

$f(x) = sgn(6-2x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti yoktur.

2.Yol

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(2,9) = sgn(6-2.2,9) = sgn(0,2) = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3,1) = sgn(6-2.3,1) = sgn(-0,2) = -1$$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$ olduğundan

$f(x) = sgn(6-2x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti yoktur.

Sonuç

$f(x) = sgn\left[g(x)\right]$ olsun.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} sgn\left[g(a)\right], & g(a) \neq 0 \\ \text{Yoktur}, & g(a) = 0 \end{cases}$$

Bu sonuç genellikle doğrudur. Fakat az da olsa bu sonuca uymayan örnekler vardır. Söz gelimi $f(x) = sgn(x^2)$ fonksiyonunun $x = 0$ da limiti vardır ve 1 dir.

Örnek:

$f(x) = sgn(x^2 - 16)$ fonksiyonunun $x = -10$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$g(x) = x^2 - 16$ olsun.

$g(-10) = (-10)^2 - 16 = 84 \neq 0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to -10} sgn(x^2 - 16) = sgn[(-10)^2 - 16] = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$f(x) = sgn(x^2 - 16)$ fonksiyonunun $x = -4$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$g(x) = x^2 - 16$ olsun.

$g(-4) = (-4)^2 - 16 = 0$ olduğuna göre,

$\lim\limits_{x \to -4} \text{sgn}(x^2 - 16)$ yoktur.

Örnek:

$f(x) = \text{sgn}(x^2 - 16)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$g(x) = x^2 - 16$ olsun.

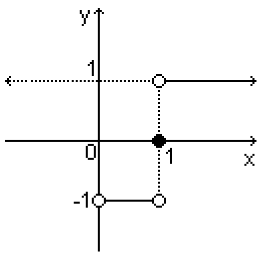
$g(1) = 1^2 - 16 = -15 \neq 0$ olduğuna göre,

$\lim\limits_{x \to 1} \text{sgn}(x^2 - 16) = \text{sgn}(1^2 - 16) = \text{sgn}(-15) = -1$ dir.

Örnek:

$f : R^+ \to \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = \text{sgn}(\log x)$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$0 < x < 1$ ise $\log x < 0$

olup $\text{sgn}(\log x) = -1$ dir.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2}) = -1$ dir.

Örnek:

$f : R^+ \to \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = \text{sgn}(\log x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$0 < x < 1$ ise $\log x < 0$ olup $\text{sgn}(\log x) = -1$ dir.

$x = 1$ ise $\log x = 0$ olup $\text{sgn}(\log x) = 0$ dır.

$x > 1$ ise $\log x > 0$ olup $\text{sgn}(\log x) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$ ve $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ olup

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ olduğundan

$f(x) = \text{sgn}(\log x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

Örnek:

$f : R^+ \to \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = \text{sgn}(\log x)$ fonksiyonunun $x = 10$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$x > 1$ ise $\log x > 0$ olup $\text{sgn}(\log x) = 1$ dir.

$10 > 1$ ise $\log 10 > 0$ olup $\text{sgn}(\log 10) = 1$ dir.

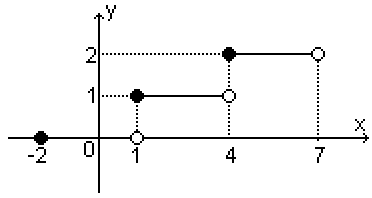
$\lim\limits_{x \to 10} \text{sgn}(\log x) = f(10) = 1$ dir.

H. Tam Değer Fonksiyonunun Limiti

Örnek:

$f : [-2, 7) \to \{0, 1, 2\}$, $f(x) = \left\| \frac{x+2}{3} \right\|$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



Grafikten de anlaşılacağı gibi tam değer fonksiyonu parçalı sabit fonksiyonlar üretmektedir. Bu nedenle işaret fonksiyonu için ortaya konulan yaklaşım burada da uygulanabilir.

$-2 \le x < 1$ ise $\left\| \frac{x+2}{3} \right\| = 0$ olup $f(-1) = 0$ dır.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left\| \frac{-1+2}{3} \right\| = \lim\limits_{x\to -1} (0) = 0$ dır.

2.Yol

İşaret fonksiyonunda verilen ikinci yoldaki yaklaşımla, limiti hesaplanacak olan noktanın hemen sağında ve hemen solunda, fonksiyonun aldığı değer bulunarak sonuca gidilebilir.

$\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = f(-1{,}1) = \left\| \frac{-1{,}1+2}{3} \right\| = \left\| 0{,}3 \right\| = 0$

$\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = f(-0{,}9) = \left\| \frac{-0{,}9+2}{3} \right\| = \left\| 0{,}3666... \right\| = 0$

$\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$ olur.

Örnek:

$f : [-2,7) \to \{0,1,2\}$, $f(x) = \left\| \frac{x+2}{3} \right\|$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$-2 \le x < 1$ ise $\left\| \frac{x+2}{3} \right\| = 0$ dır.

$1 \le x < 4$ ise $\left\| \frac{x+2}{3} \right\| = 1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left\| \frac{x+2}{3} \right\| = \lim\limits_{x\to 1^-} (0) = 0$ dır.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left\| \frac{x+2}{3} \right\| = \lim\limits_{x\to 1^-} (1) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

2.Yol

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(0{,}9) = \left\| \frac{0{,}9+2}{3} \right\| = \left\| 0{,}9666... \right\| = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1{,}1) = \left\| \frac{1{,}1+2}{3} \right\| = \left\| 1{,}0333... \right\| = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

Örnek:

$f : [-2,7) \to \{0,1,2\}$, $f(x) = \left\| \frac{x+2}{3} \right\|$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$1 \le x < 4$ ise $\left\| \frac{x+2}{3} \right\| = 1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \left\| \frac{x+2}{3} \right\| = \lim\limits_{x\to 3} (1) = 1$ olur.

2.Yol

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(2{,}9) = \left\| \frac{2{,}9+2}{3} \right\| = \left\| 1{,}6333... \right\| = 1$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3{,}1) = \left\| \frac{3{,}1+2}{3} \right\| = \left\| 1{,}7 \right\| = 1$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$ olur.

Sonuç

$f(x) = \|g(x)\|$ olsun.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \|g(a)\|, & g(a) \notin Z \\ \text{Yoktur}, & g(a) \in Z \end{cases}$$

Bu sonuç genellikle doğrudur. Fakat az da olsa bu sonuca uymayan örnekler vardır. Söz gelimi $f(x) = \|x^2\|$ fonksiyonunun $x = 0$ da limiti vardır ve

$\lim_{x\to 0} \|x^2\| = 0$ dır.

Örnek:

$f(x) = \left\|\frac{x+3}{5}\right\|$ fonksiyonunun $x = 5$ ve $x = 7$ noktalarındaki limitlerini bulalım.

Çözüm:

$g(x) = \frac{x+3}{5}$ olsun.

$g(5) = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5} \notin Z$ olduğuna göre,

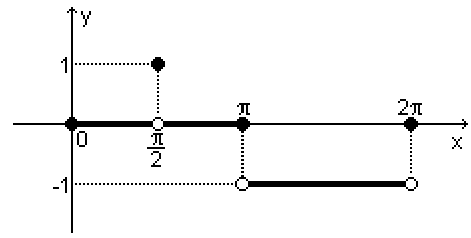
$\lim_{x\to 5} \left\|\frac{x+3}{5}\right\| = \left\|\frac{5+3}{5}\right\| = \|1{,}6\| = 1$ dir.

$g(7) = \frac{7+3}{5} = 2 \in Z$ olduğundan, $\lim_{x\to 7} \left\|\frac{x+3}{5}\right\|$ yoktur.

Örnek:

$f : [0,2\pi] \to \{-1,0,1\}$, $f(x) = \|\sin x\|$ fonksiyonunun $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \pi$ noktalarındaki limitlerini bulalım.

Çözüm:



$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ dır

$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 0$ olduğundan

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$ dır.

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to \pi^+} f(x) = -1$ olup

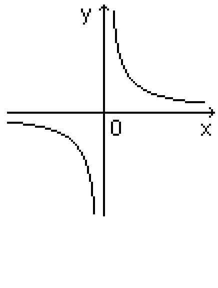
$\lim_{x\to \pi^-} f(x) \neq \lim_{x\to \pi^+} f(x)$ olduğundan $x = \pi$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun limiti yoktur.

İ. $\mathbf{f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}}$ Fonksiyonunun $\mathbf{x = a}$ Noktasındaki Limiti

Örnek:

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun bazı x değerleri için limitlerini bulalım.

Çözüm:



Yandaki şekilde $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Grafiğin çizimini grafikler konusunda vereceğiz.

x değişkenine, sıfıra yaklaşan negatif değerler verildiğinde fonksiyonun aldığı değerlerin sınırsız olarak küçüldüğü görülmektedir. Buna göre,

$x = -1$ için $f(-1) = \dfrac{1}{-1} = -1$

$x = -\dfrac{1}{10}$ için $f(-\dfrac{1}{10}) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{10}} = -10$

$x = -\dfrac{1}{100}$ için $f(-\dfrac{1}{100}) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{100}} = -100$

$x = -\dfrac{1}{1000}$ için $f(-\dfrac{1}{1000}) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{1000}} = -1000$

$x \to 0^-$ için $f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ olur.

x değişkenine, sıfıra yaklaşan pozitif değerler verildiğinde fonksiyonun aldığı değerlerin sınırsız olarak büyüdüğü görülmektedir. Buna göre,

$x = 1$ için $f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$x = \dfrac{1}{10}$ için $f(\dfrac{1}{10}) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{10}} = 10$

$x = \dfrac{1}{100}$ için $f(\dfrac{1}{100}) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{100}} = 100$

$x = -\dfrac{1}{1000}$ için $f(\dfrac{1}{1000}) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{1000}} = 1000$

$x \to 0^+$ için $f(x) \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoktur.

$x = 0$ da limit olmadığını gördük.

x değişkenine, azalan negatif değerler verildiğinde fonksiyonun aldığı değerlerin sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Buna nedenle,

$x = -1$ için $f(-1) = \dfrac{1}{-1} = -1$

$x = -10$ için $f(-10) = \dfrac{1}{-10} = -\dfrac{1}{10}$

$x = -100$ için $f(-100) = \dfrac{1}{-100} = -\dfrac{1}{100}$

$x = -1000$ için $f(-10) = \dfrac{1}{-1000} = -\dfrac{1}{1000}$

$x \to -\infty$ için $f(x) \to 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ olur.

x değişkenine, artan pozitif değerler verildiğinde fonksiyonun aldığı değerlerin sıfıra yaklaştığı görülmektedir.

Buna nedenle,

$x = 1$ için $f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$x = 10$ için $f(10) = \dfrac{1}{10}$

$x = 100$ için $f(100) = \dfrac{1}{100}$

$x = 1000$ için $f(1000) = \dfrac{1}{1000}$

$x \to +\infty$ için $f(x) \to 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ olur.

Örnek:

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun bazı x değerleri için limitlerini bulalım.

Çözüm:

x değişkenine, sıfıra yaklaşan negatif değerler verildiğinde fonksiyonun aldığı değerlerin sınırsız olarak büyüdüğü görülmektedir.

Buna göre,

$x\to 0^-$ için $f(x)\to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ olur.}$$

x değişkenine, sıfıra yaklaşan pozitif değerler verildiğinde fonksiyonun aldığı değerlerin sınırsız olarak büyüdüğü görülmektedir.

Buna göre,

$x\to 0^+$ için $f(x)\to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \text{ olduğundan } \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=0 \text{ olur.}$$

Sonuç

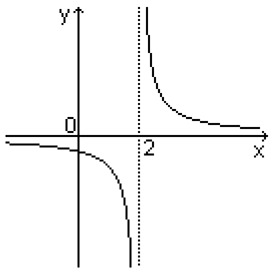
1. $\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^n}=\begin{cases}\infty, & n \text{ çift pozitif tamsayı}\\ \text{Yoktur}, & n \text{ tek pozitif tamsayı}\end{cases}$

2. $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{(x-a)^n}=0,\ n\in Z^+$

Örnek:

$f(x)=\frac{1}{x-2}$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty \text{ dur.}$$

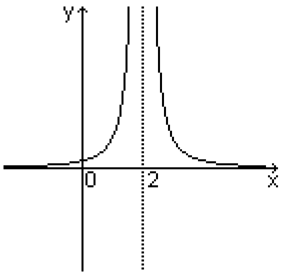
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim_{x\to 2^+} f(x) \text{ olduğundan } \lim_{x\to 2} f(x) \text{ yoktur.}$$

Örnek:

$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



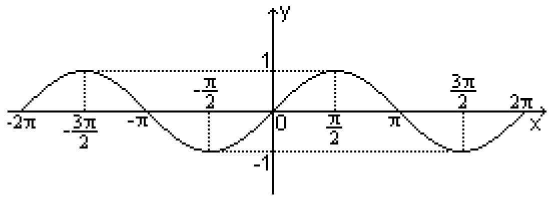
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty \text{ dur.}$$

J. Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

1. Sinx ve Cosx in Limiti



Yukarıdaki şekilde $y = \sin x$ fonksiyonunun $[-2\pi, 2\pi]$ aralığındaki görüntüsü verilmiştir. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları tüm x reel değerleri için tanımlı olduğundan,

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \text{ ve } \lim_{x\to a} \cos x = \cos a \text{ olur.}$$

Örnek:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$$

Örnek:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 1$$

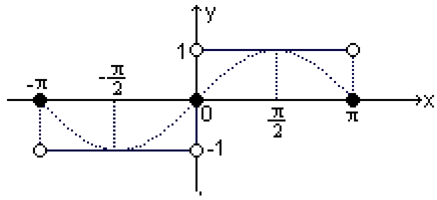
Örnek:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Örnek:

$f(x) = \mathrm{sgn}(\sin x)$ fonksiyonunun $x = -\frac{\pi}{2}$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

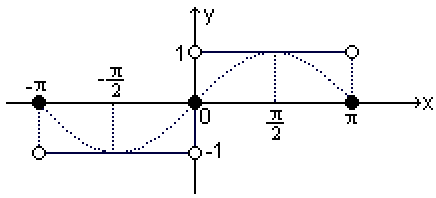


$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \mathrm{sgn}(\sin x) = \mathrm{sgn}(\sin(-\frac{\pi}{2})) = \mathrm{sgn}(-1) = -1 \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x) = \mathrm{sgn}(\sin x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{sgn}(\sin x) = -1 \text{ ve } \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}(\sin x) = 1 \text{ olup,}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{sgn}(\sin x) \neq \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}(\sin x) \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(\sin x) \text{ yoktur.}$$

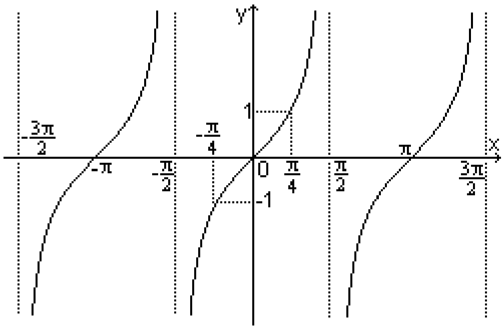
Örnek:

$f(x) = \mathrm{sgn}(\sin x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \mathrm{sgn}(\sin x) = \mathrm{sgn}(\sin(\frac{\pi}{3})) = \mathrm{sgn}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 \text{ olur.}$$

2. Tanx' in Limiti



Yukarıda $y = \tan x$ fonksiyonunun $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığındaki görüntüsü verilmiştir. $\tan x$ fonksiyonu $k \in Z$ olmak üzere $x \neq \frac{(2k+1).\pi}{2}$ koşuluna uyan bütün x reel değerleri için tanımlı olduğu için,

$\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$, $x \neq \frac{(2k+1).\pi}{2}$ ve $k \in Z$ olur.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 0} \tan x = \tan 0 = 0$ dır.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan x = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tür.

Örnek:

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$ ve $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$ olup,

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x$ olduğundan $\tan x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında limiti yoktur.

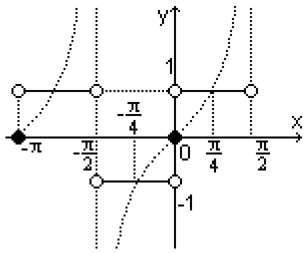
Sonuç

$k \in Z$ olmak üzere, $a = \frac{(2k+1).\pi}{2}$ için $\lim\limits_{x \to a} \tan x$ yoktur.

Örnek:

$f(x) = \text{sgn}(\tan x)$ fonksiyonunun $x = -\frac{\pi}{2}$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:



$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \text{sgn}(\tan x) = -1$ ve $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \text{sgn}(\tan x) = 1$ olup,

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \text{sgn}(\tan x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \text{sgn}(\tan x)$ olduğundan

$\text{sgn}(\tan x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında limiti yoktur.

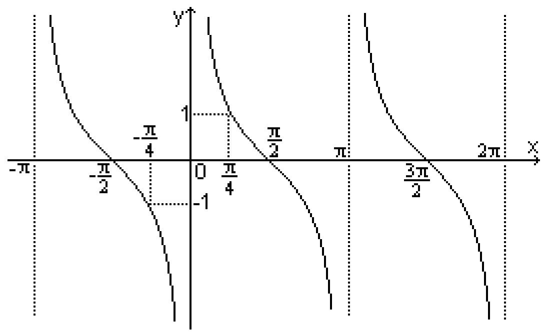
Örnek:

$f(x) = \text{sgn}(\tan x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \text{sgn}(\tan x) = \text{sgn}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \text{sgn}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 \text{ olur.}$$

3. Cotx' in Limiti



Yukarıda $y = \cot x$ fonksiyonunun $[-\pi, 2\pi]$ aralığındaki görüntüsü verilmiştir. $\cot x$ fonksiyonu $k \in Z$ olmak üzere $x \neq k.\pi$ koşuluna uyan bütün x reel değerleri için tanımlı olduğu için,

$$\lim_{x \to a} \cot x = \cot a \ , \ a \neq k.\pi \text{ ve } k \in Z \text{ olur.}$$

Örnek:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cot x = \cot\frac{\pi}{4} = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cot x = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun $x = \pi$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$ ve $\lim_{x \to \pi^+} \cot x = +\infty$ olup,

$\lim_{x \to \pi^-} \cot x \neq \lim_{x \to \pi^+} \cot x$ olduğundan $\cot x$ fonksiyonunun $x = \pi$ noktasında limiti yoktur.

Sonuç

$k \in Z$ olmak üzere, $a = k.\pi$ için $\lim_{x \to a} \cot x$ yoktur.

Örnek:

$\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \tan x}{\tan x - \cos x}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \tan x}{\tan x - \cos x} = \lim_{x \to a} \frac{-1.(\tan x - \cos x)}{\tan x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to a} (-1) = -1 \text{ olur.}$$

K. Belirsizlikler

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^{∞} belirsizlik hallerini aşağıda örneklerle ele alacağız. Ancak bu hallerin dışında 0^0 , ∞^0 gibi belirsizliklerde vardır.

1. $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

Örnek:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{\lim_{x\to 2} x^3-8}{\lim_{x\to 2} x^2-4}=\frac{2^3-8}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

olduğu için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).(x^2+2x+4)}{(x-2).(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{2^2+2.2+4}{2+2}=3 \text{ olur.}$$

Örnek:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0}=\frac{0}{0} \text{ dır.}$$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=(\cos x-\sin x).(\cos x+\sin x)$ olduğundan,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x).(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

Uyarı

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ belirsizliğini türev konusunda vereceğimiz L'Hospital kuralıyla sonuçlandırabiliriz. Ancak,

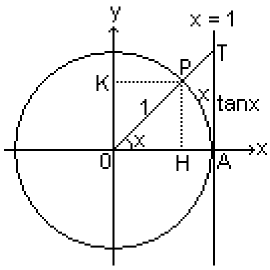
$\lim_{x\to 0}\frac{x.\tan 4x.\cos 2x}{\sin^2 3x}$ biçimindeki bir ifadenin limitinin

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ bilgisiyle sonuçlandırmak daha kolay olur.

Örnek:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:



$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$

olduğu için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$0<x<\frac{\pi}{2}$ ve $m(A\hat{O}T)=x$ raydan ise,

$m(AP)=x$ birim, $|PH|=\sin x$, $|AT|=\tan x$,

$|PH|<x<|AT|$, $\sin x<x<\tan x$ olur.

Elde edilen bu bağıntıdan yola çıkarak, istenen limiti bulabiliriz.

$0<x<\frac{\pi}{2}$ ise $\sin x>0$ dır.

Buna göre,

$$\sin x < x < \tan x \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} 1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos 0}$$

$$\Rightarrow 1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Sonuç

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \text{ ve } \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{4x} = \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{x} = \frac{4}{1} = 4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x.\tan 4x.\cos 2x}{\sin^2 3x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Pay ve payda x ile çarpılırsa,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x.\tan 4x.\cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2.\tan 4x.\cos 2x}{x.\sin^2 3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 3x} . \frac{\tan 4x}{x} . \cos 2x \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^{-2} . \left(\frac{\tan 4x}{x} \right) . \cos 2x \right]$$

$$= \left(\frac{3}{1} \right)^{-2} . \frac{4}{1} . \cos 0 = \frac{1}{9} . 4.1 = \frac{4}{9} \text{ olur.}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

Örnek:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = \frac{3.\infty^2 + 4.\infty}{\infty^2 + 1} = \frac{3.\infty + \infty}{\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

olduğuna göre $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2.(3 + \frac{4}{x})}{x^2.(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} (3 + \frac{4}{x})}{\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} (3) + \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{4}{x})}{\lim\limits_{x \to \infty} (1) + \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{1}{x^2})}$$

$$= \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3 \text{ olur.}$$

$x \to \infty$ için $\frac{4}{x} \to 0$ ve $\frac{1}{x^2} \to 0$ olduğunu hatırlayınız

Örnek:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2} = \frac{-\infty+1}{(-\infty)^2} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0+0=0$$

Örnek:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x}{x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3.(1+\frac{1}{x^2})}{x.(1-\frac{2}{x})}$$

$$= \lim\limits_{x\to\infty} x^2.\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = \infty^2.\frac{1+0}{1-0} = \infty \text{ olur.}$$

Kural

$m,n \in N$ olmak üzere, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$ limitinin değeri,

a. $n<m$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = 0$ dır.

b. $n=m$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = \dfrac{a_n}{b_m}$ dir.

c. $n>m$ ve $a_n.b_m>0$ ise

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = +\infty \text{ dur.}$$

d. $n>m$ ve $a_n.b_m<0$ ise

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = -\infty \text{ dur.}$$

Örnek:

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-1}{2x^3+x} = \frac{4}{2} = 2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^5} = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5+4x-1}{x^3+2x} = +\infty \text{ dur.}$$

Örnek:

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5+2x}{x^4+3} = -\infty \text{ dur.}$$

3. $0.\infty$ Belirsizliği

$$0.\infty = \frac{0}{1} = \frac{0}{0} \text{ veya } 0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ dur.}$$

Buna göre $0.\infty$ belirsizliği $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek sonuca gidilir.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}.(2x-1)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}.(2x-1) = 0.\infty$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}.(2x-1) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$ olur.

4. $\infty-\infty$ Belirsizliği

$\infty-\infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek sonuca gidilir.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2x})$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\infty-\infty$ belirsizliği vardır. Pay ve payda ifadenin eşleniği ile çarpılırsa,

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2x})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2x}).(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2)-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2.(1+\frac{2}{x^2})}+\sqrt{x^2.(1+\frac{2}{x})}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+2}{|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \quad (x\to\infty \text{ ise } |x|=x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+2}{x.\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x.(-2+\frac{2}{x})}{x.\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \frac{-2+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$

$$= \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ bulunur.}$$

Uyarı

$a>0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{a}.\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right] \text{ kuralını}$$

kullanarak da $\infty-\infty$ belirsizliği olan limitler sonuçlandırılabilir.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2x})$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2x})$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{1}.(x+\frac{0}{2.1})-\sqrt{1}.(x+\frac{2}{2.1})\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{1}.(x-x-1)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{1}.(-1)\right] = -1$$

Örnek:

$\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}).(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = 0$$

Örnek:

$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+2).(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

5. 1^{∞} Belirsizliği

Kural

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{bx+c}\right)^{dx+e} = e^{\frac{a}{b}.d} \text{ dir.}$$

Örnek:

$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{4x-1}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{4x-1}$ ifadesinde a = 1 , b = 2 ve d = 4 tür. Yukarıdaki kural gereğince,

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{4x-1} = e^{\frac{1}{2}.4} = e^2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-1}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{2x+3}\right)^{4x-1}$$

$$= e^{\frac{2}{2}.4} = e^4 \text{ tür.}$$

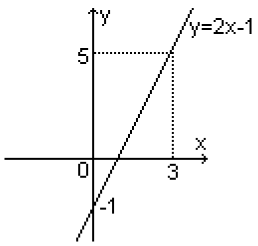
II) SÜREKLİLİK

Tanım

Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında aldığı değer bu noktadaki sağdan ve soldan limitlerine (bu noktadaki limitine) eşit ise f fonksiyonunun $x = a$ noktasında süreklidir denir.

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

Örnek:



$f(x) = 2x - 1$ ise

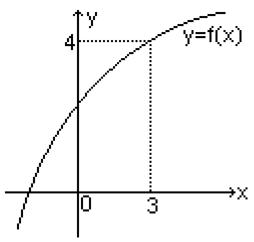
$f(3) = 2.3 - 1 = 5$ tir.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 5$ olduğuna göre

(tanım değeri, limit değerine eşit olduğu için)

$f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında süreklidir.

Örnek:



$f(3) = 4$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 4$ olduğuna göre

(tanım değeri, limit değerine eşit olduğu için)

$f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında süreklidir.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} a - x, & x > -1 \\ 1, & x = -1 \\ x^2 + b, & x < -1 \end{cases}$$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında sürekli olduğuna göre, (a, b) ikilisini bulalım.

Çözüm:

Tanım gereği $f(-1) = 1$ dir.

$f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında sürekli ise,

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1) = 1$ olmalıdır.

Buna göre,

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^-} (x^2 + b) = 1$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} (x^2 + b) = 1 \Rightarrow (-1)^2 + b = 1 \Rightarrow b = 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^+} (a - x) = 1$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} (a - x) = 1 \Rightarrow a - (-1) = 1 \Rightarrow a = 0$ olur.

Buna göre $(a, b) = (0,0)$ olur.

Sonuç

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli ise,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ dır.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limiti kaçtır?

Çözüm:

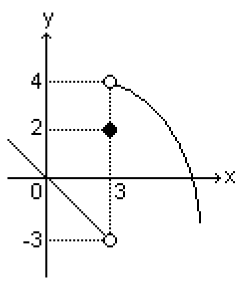
$f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu her $x \in R$ için sürekli olduğuna göre,

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 3^2 - 4 = 5$ tir.

Tanım

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli değil ise, süreksizdir.

Örnek:



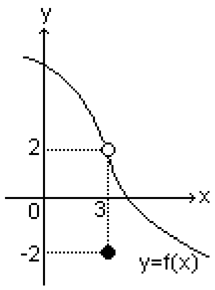
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ olup

$x = 3$ noktasında f fonksiyonu süreksizdir.

Örnek:



$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$

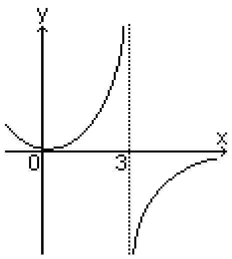
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ olduğu

için $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ dir.

$f(3) = -2$ dir.

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti mevcut fakat fonksiyonun bu noktada aldığı değer ile aynı olmadığından $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında süreksizdir.

Örnek:



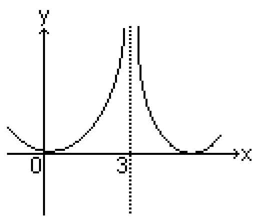
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ ve

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ olup

$x = 3$ noktasında f fonksiyonu süreksizdir.

Örnek:



$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ ve

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ olup

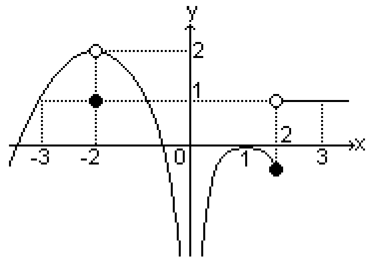
$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ dur.

Fakat $x = 3$ noktasında f fonksiyonu tanımsız olduğundan bu noktada süreksizdir.

Sonuç

1. Bir fonksiyon bir noktada tanımsız ise, o noktada süreksizdir.
2. Bir fonksiyon bir noktada limitsiz ise, o noktada limitsizdir.
3. Bir fonksiyon bir noktada tanımlı ve limitli ancak, tanım değeri limit değerinden farklı ise, bu noktada süreksizdir.

Örnek:



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonu x'in -3, -2, 0, 1, 2 değerlerinin hangilerinde sürekli olduğunu bulalım.

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 1$ ve $f(-3) = 1$ olup $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = -3$ noktasında süreklidir.

$\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) = 2$ olduğu için

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2$ dir. $f(-2) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) \neq f(-2)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = -2$ noktasında süreksizdir.

$f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımsız olduğundan bu noktada süreksizdir.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ ve $f(1) = 0$ olup $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ olduğundan,

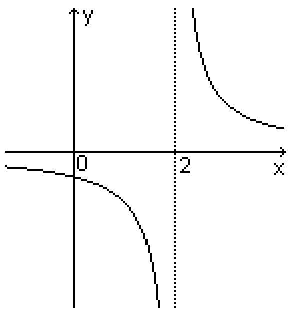
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ yoktur. Bunun için $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreksizdir.

Buna göre; $f(x)$ fonksiyonu -2, 0 ve 2 değerlerinde süreksiz, diğer bütün değerler için süreklidir.

Örnek:

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktayı bulalım.

Çözüm:



Bir rasyonel kesrin paydası sıfıra eşit olamayacağı için $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında tanımsızdır.

Bir fonksiyon tanımsız olduğu noktada süreksiz olacağından $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreksizdir.

Örnek:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + x + m}$ fonksiyonu reel sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre m'nin hangi aralıkta değerler alacağını bulalım.

Çözüm:

$x^2 + x + m \neq 0$ olmalıdır. Bunun için,

$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 1^2 - 4.1.m < 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} < m \Rightarrow m > \dfrac{1}{4}$ olmalıdır.

Çözümlü Sorular

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2} = \dfrac{2^3 - 2.2^2}{2^2 - 2} = \dfrac{0}{2} = 0$ olur.

2. $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 2 \\ 3, & x = 2 \\ a - x, & x < 2 \end{cases}$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli ise,

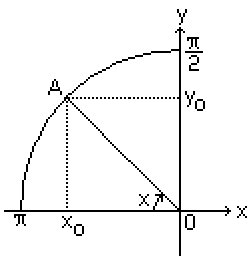
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 3$ tür.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} (a - x) = 3$

$\Rightarrow a - 2 = 3 \Rightarrow a = 5$ olur.

3. $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \dfrac{\lVert \cos x \rVert}{\sin x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:



$A(x_0, y_0)$ ve x, $\dfrac{\pi}{2}$ 'ye sağdan ($\dfrac{\pi}{2}$ den büyük ve gittikçe $\dfrac{\pi}{2}$ ye yaklaşan) yaklaşşın.

$x_0 = \cos x$ ve $y_0 = \sin x$ olur.

$-1 < \cos x < 0$ olup $\|\cos x\| = -1$ dir.

$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ için $y_0 = \sin x \to 1$ olur.

Buna göre,

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\|\cos x\|}{\sin x} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ dir.}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{6x^3 - x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{6x^3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2.(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2.(6x - \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}{6x - \frac{1}{x}} = \frac{3 - 0 + 0}{6.\infty - 0}$$

$$= \frac{3}{\infty} = 0 \text{ olur.}$$

2.Yol

Kural gereği, paydanın derecesi, payın derecesinden büyük olduğu için, limit sıfırdır.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x + y)^3 - y^3}{(x + y)^2 - y^2}$ limitinin değerini bulunuz?

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x + y)^3 - y^3}{(x + y)^2 - y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y^3}{x^2 + 2xy + y^2 - y^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x.(x^2 + 3xy + 3y^2)}{x.(x + 2y)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3xy + 3y^2}{x + 2y} = \frac{0^2 + 3.0.y + 3y^2}{0 + 2y}$$

$$= \frac{3y^2}{2y} = \frac{3y}{2} \text{ olur.}$$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(10^{\frac{1}{x}} + 5^x + 2 \right)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(10^{\frac{1}{x}} + 5^x + 2 \right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 10^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to-\infty} 5^x + \lim_{x\to-\infty} 2$$

$$= 10^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} + \lim_{x\to\infty} 5^{-x} + 2 = 10^0 + \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$$

$$= 1 + 0 + 2 = 3 \text{ olur.}$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x})$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır. Pay ve payda ifadenin eşleniği ile çarpılırsa,

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 + 4x + 1) - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x.\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

($x \to \infty$ ise $|x| = x$ olduğundan)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$= \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

2.Yol

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{x^2+2x})$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1}.(x+\frac{4}{2.1}) - \sqrt{1}.(x+\frac{2}{2.1})\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x+2-x-1\right) = \lim_{x\to\infty}(1) = 1 \text{ olur.}$$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+\sin x}{\tan 3x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+\sin x}{\tan 3x} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sin x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x+\sin x}{x}}{\frac{\tan 3x}{x}}$$

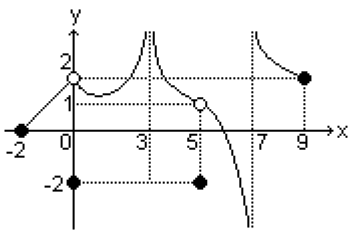
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan 3x}{x}} = \frac{2+1}{\frac{3}{1}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ olur.}$$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{\cos x+\sin x}{\tan x+\cot x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{\tan x+\cot x} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}}{\tan\frac{3\pi}{4}+\cot\frac{3\pi}{4}} = \frac{0}{-2} = 0 \text{ olur.}$$

10.



f , grafiği yukarıda verilen $[-2,9]$ aralığından reel sayılar kümesine (R'ye) tanımlı bir fonksiyondur. f fonksiyonu, x'in $(-2,9)$ aralığındaki kaç tam sayı değeri için süreksizdir?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ dir. $f(0) = -2$ dir. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ olduğundan $x = 0$ da f fonksiyonu süreksizdir.

f fonksiyonu $x = 3$ te tanımsız olduğundan süreksizdir.

$\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \infty$ olup
$\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$ olduğundan $x = 7$ de f fonksiyonu süreksizdir.

Buna göre f fonksiyonu x'in 0, 3, 5 ve 7 değerlerinde süreksizdir.

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x}.\left\|\frac{x}{4}\right\|\right)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x \to 0^+$ olduğuna göre $0 < x < 1$ olarak alınabilir.

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\| = 0$ olur. Buna göre,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x}.\left\|\frac{x}{4}\right\|\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x}.0\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$ olur.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4} = \dfrac{\sin\frac{\pi.2}{2}}{2^2-4} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{(x-2).(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x-2}.\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$ tür.

$x-2 = t$ olsun. Buna göre, $x \to 2$ ise $t \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x-2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi.(t+2)}{2}}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi.t+2\pi}{2}\right)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\pi\right)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin\frac{\pi t}{2}}{t} = -\dfrac{\frac{\pi}{2}}{1} = -\dfrac{\pi}{2}$ olur.

Not: $\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\pi\right) = -\sin\frac{\pi.t}{2}$ dir.

Buna göre,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x-2}.\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}$

$= -\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{4} = -\dfrac{\pi}{8}$ olur.

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-\frac{1}{2}.\left(1-2\sin^2 x\right)}{2.\sin 2x.\cos 2x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-\frac{1}{2}.\cos 2x}{2.\sin 2x.\cos 2x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-1}{4.\sin 2x}$

$= \dfrac{-1}{4.\sin(2.\frac{\pi}{4})} = -\dfrac{1}{4}$ bulunur.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\|x\|}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$m \in Z$ olmak üzere $\|x\| = m$ olsun.

$\|x\| = m \Rightarrow m \le x < m+1$ dir. Buna göre, $x = m + r$

olacak şekilde bir $r \in [0,1)$ vardır.

$x \to \infty$ ise $m \to \infty$ olur. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\|x\|} = \lim_{m\to\infty} \frac{m+r}{m} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right) = 1+0 = 1$$

bulunur.

15. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5-x}{x+2} + (a+5).x + b\right] = 5$ olduğuna göre $a+b$ kaçtır?

Çözüm:

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5-x}{x+2} + (a+5).x + b\right] = 5$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{5-x}{x+2} + \lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] + \lim_{x\to\infty} b = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-x+5}{x+2} + \lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] + b = 5$$

$$\Rightarrow -1 + \lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] + b = 5 \text{ ....(*)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] = \begin{cases} \infty, & a > -5 \\ 0, & a = -5 \\ -\infty, & a < -5 \end{cases}$$

(*) eşitliğinin sağ tarafı reel sayıdır. Sol tarafının da reel sayı olması için $\lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] = 0$ olmalıdır.

$\lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] = 0$ ise a = -5 tir.

$-1 + \lim_{x\to\infty}\left[(a+5).x\right] + b = 5$ ve a = -5 ise,

$-1 + 0 + b = 5 \Rightarrow b = 6$ olup a + b =-5 + 6 = 1 dir.

16. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+mx+n}$ fonksiyonu $R - \{1,3\}$ te sürekli olduğuna göre, m – n kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonu $R - \{1,3\}$ te sürekli olduğuna göre

$x = 1$ ve $x = 3$ noktalarında süreksizdir.

Bu değerler $f(x)$ fonksiyonunun paydasını sıfır yapıyor olmalı ki; $f(x)$ fonksiyonu bu noktalrda tanımsız, dolayısıyla süreksiz olsun. Buna göre,

$x = 1$ için $1^2 + m.1 + n = 0 \Rightarrow m + n = -1$ olur.

$x = 3$ için $3^2 + m.3 + n = 0 \Rightarrow 3m + n = -9$ olur.

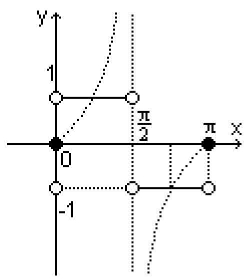
Bu iki eşitlik birlikte değerlendirilirse,

$$\left.\begin{aligned} m+n &= -1 \\ 3m+n &= -9 \end{aligned}\right\} m = -4 \text{ ve } n = 3 \text{ tür.}$$

Böylece m – n = (– 4) – 3 = – 7 bulunur.

17. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{sgn}(\tan x)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:



$x \to \frac{\pi}{2}^+$ için $\tan x = -1$ dir

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{sgn}(\tan x) = -1$ dir.

18. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2+16}\right)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2+16}\right)$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty}(x^2+25)}+\sqrt{\lim_{x\to\infty}(x^2+16)}$$

$$= \sqrt{\infty^2+25}+\sqrt{\infty^2+16} = \infty+\infty=\infty \text{ olur.}$$

19. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2^x}+\frac{2^x}{x!}+\frac{x!}{x^x}\right)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Genel terimi rasyonel kesir olan dizilerin limitinin hesaplanmasında, $n\to\infty$ için

$n^n > n! > 3^n > 2^n > n^3 > n^2 > n$ biçiminde bir

sıralama yapılabilir. Bu sıralama fonksiyonlar için de geçerlidir. Buna göre,

$2^x > x^2$, $x! > 2^x$ ve $x^x > x!$ olup,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2^x}+\frac{2^x}{x!}+\frac{x!}{x^x}\right)=0+0+0=0 \text{ bulunur.}$$

20. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^n+5^n}{5^n-1}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$5^n > 2^n > 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^n+5^n}{5^n-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^n}{5^n-1}=5 \text{ olur.}$$

21. $\lim_{x\to\infty}\frac{n^n+5^n+n^5}{n!+5^n+5^{555}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$n\to\infty$ için $n^n > 5^n > n^5$, $n! > 5^n > 5^{555}$ ve $n^n > n!$ olduğundan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^n+5^n+n^5}{n!+5^n+5^{555}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty \text{ olur.}$$

22. $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{4}.\left\|\frac{2}{x}\right\|\right)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$m\in R^+$ olmak üzere $\frac{2}{x}=m$ olsun.

$\frac{2}{x}=m \Rightarrow x=\frac{2}{m}$ dir. $x\to0^+$ ise $m\to\infty$ olur.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{4}.\left\|\frac{2}{x}\right\|\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{m}}{4}.\left\|\frac{2}{\frac{2}{m}}\right\|\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2m}.\|m\|\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}.\frac{\|m\|}{m}\right)=\frac{1}{2}.\lim_{m\to\infty}\frac{\|m\|}{m}=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}$$

23. $\lim_{x\to0}\frac{x+\tan4x}{x-\sin2x}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\tan4x}{x-\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{x.(1+\frac{\tan4x}{x})}{x.(1-\frac{\sin2x}{x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{\tan4x}{x}}{1-\frac{\sin2x}{x}}=\frac{1+\frac{4}{1}}{1-\frac{2}{1}}=\frac{5}{-1}=-5 \text{ olur.}$$

Konu Bitmiştir.