ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

A. Bir Fonksiyonun Tanım Kümesi

Kuralı verilmiş bir fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş reel sayı kümesine o fonksiyonun tanım kümesi (tanım aralığı) denir

1. Polinom Fonksiyonunun Tanım Kümesi

$f(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$

şeklindeki reel katsayılı polinom fonksiyonları bütün reel sayılar için tanımlıdır.

Tanım kümesi A ile gösterilirse, polinom fonksiyonlarının tanım kümesi $A = R$ olur.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ bir polinom fonksiyonudur. Polinom fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi reel sayılar kümesi olduğuna göre, $A = R$ dir.

2. Rasyonel Fonksiyonların Tanım Kümesi

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki rasyonel fonksiyonlar

$Q(x) = 0$ için tanımsızdır. $Q(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi Ç = B ise $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi (tanım aralığı) $A = R - B$ olur.

Örnek:

$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen $f(x)$ fonksiyonu $x^3 - 4x = 0$ denklemini sağlayan x değerleri için tanımsızdır.

Buna göre,

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x.(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x.(x+2).(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -2$ veya $x = 2$ dir.

$x^3 - 4x = 0$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \{-2,0,2\}$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi,

$R - \{-2,0,2\}$ dir.

3. Çift Dereceden Köklü Fonksiyonların Tanım Kümesi

n pozitif tam sayı olmak üzere, $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonlar $g(x) \geq 0$ için tanımlıdır. $g(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi Ç= B ise $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi (tanım aralığı) $A = B$ olur.

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı $x^2 - x - 12 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir. Buna göre,

$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ veya $x = 4$ tür.

x	$-\infty$	-3		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$	+	0	-	0	+	

$x^2 - x - 12 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty,-3] \cup [4,\infty) = R - (-3,4)$ olduğuna göre,
$f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım $Ç = R - (-3,4)$ tür.

Örnek:

$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9} + \sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4}}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı

$\sqrt[4]{x^2 - 9}$ ile $\sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4}}$ nin tanımlı olduğu aralıkların kesişim kümesidir.

$\sqrt[4]{x^2 - 9}$ un tanım kümesi $x^2 - 9 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

$x^2 - 9 \geq 0$ ise $x \leq -3$ veya $x \geq 3$ tür.

$Ç_1 = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ dur.

$\sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4}}$ nin tanım aralığı $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{-4}{x.(x-4)} \geq 0 \Rightarrow 0 < x < 4$ tür.

$Ç_2 = (0,4)$ tür.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı,

$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = [3,4)$ tür.

4. Tek Dereceden Köklü Fonksiyonların Tanım Kümesi

n pozitif tam sayı olmak üzere, $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$ fonksiyonu, $g(x)$ in tanımlı olduğu her yerde tanımlıdır. $g(x)$ in tanım kümesi B ise $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi (tanım aralığı) $A = B$ dir.

Örnek:

$f(x) = \sqrt[3]{4 - x}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

Kökün derecesi tek sayı olduğu için, $f(x)$ in tanım kümesi $4 - x$ in tanım kümesiyle aynıdır. $4 - x$ in tanım aralığı reel sayılar kümesi olduğundan $f(x)$ in tanım aralığı $A = R$ dir.

B. Parçalı Fonksiyonlar

Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı birer kuralla tanımlanan fonksiyonlara parçalı fonksiyonlar adı verilir.

Örnek:

$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu parçalı fonksiyondur.

Örnek:

$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 1 \\ -x^2, & -1 < x \leq 1 \\ 0, & x \leq -1 \end{cases}$ fonksiyonu parçalı fonksiyondur.

Örnek:

f ve g fonksiyonları R den R ye tanımlıdır.

$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \geq 2 \\ 1 - x, & x < 2 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$ olduğuna

göre, $f(5) + g(-5) + (f + g)(1)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$5 \geq 2$ olduğuna göre, $f(5) = 4.5 = 20$ dir.

$-5 < 0$ olduğuna göre, $g(-5) = -5 + 1 = -4$ tür.

$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = (1 - 1) + 1^2 = 1$ dir.

Buna göre, $f(5)+g(-5)+(f+g)(1)=20-4+1=17$ dir.

Örnek:

f ve g fonksiyonları R den R ye tanımlıdır.

$f(x)=\begin{cases}4x, & x\geq 2\\ 1-x, & x<2\end{cases}$ ve $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$ olduğuna

göre, $(f-g)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$$f(x)=\begin{cases}4x, & x\geq 2\\ 1-x, & x<2\end{cases}=\begin{cases}4x, & x\geq 2\\ 1-x, & 0\leq x<2\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

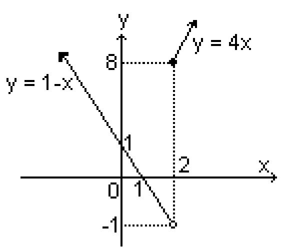
$$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ x+1, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geq 2\\ x^2, & 0\leq x<2\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\geq 2\\ -x^2-x+1, & 0\leq x<2\\ -2x, & x<0\end{cases}$$

Örnek:

$f(x)=\begin{cases}4x, & x\geq 2\\ 1-x, & x<2\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

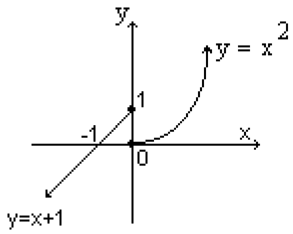
Çözüm:



Örnek:

$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:



C. Mutlak Değer Fonksiyonu

$f: A\to B$ reel değerli fonksiyon olsun.

$$|f|(x)=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\geq 0\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna mutlak değer fonksiyonu denir.

Örnek:

$f: R\to R$, $f(x)=x-2$ olduğuna göre $|f(x)|$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

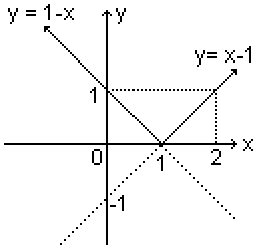
$$|f(x)|=|x-2|=\begin{cases}x-2, & x-2\geq 0\\ -(x-2), & x-2<0\end{cases}=\begin{cases}x-2, & x\geq 2\\ -x+2, & x<2\end{cases}$$

Örnek:

$f: R\to R$, $f(x)=x-1$ olduğuna göre $|f(x)|$ fonksiyonunu grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$|f(x)| = |x-1| = \begin{cases} x-1 \ , \ x \geq 1 \\ 1-x \ , \ x < 1 \end{cases}$$



Kural

Mutlak değerin tanımını ve yukarıdaki grafiği göz önüne alalım. $f(x)$ in negatif olmadığı yerde $|f(x)|$ in grafiği $f(x)$ in aynısıdır. $f(x)$ in negatif olduğu yerde $|f(x)|$ in grafiği $f(x)$ in grafiğinin Ox eksenine göre simetriğidir.

Bu durumda $y = |f(x)|$ in grafiğini iki adımda çizebiliriz.

1.Adım: $y = f(x)$ in grafiği çizilir.

2.Adım: Ox ekseninin üst tarafında kalan eğri aynen bırakılır. Ox ekseninin altında kalan kısmın Ox eksenine göre simetriği alınır.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 4$ olduğuna göre $|f(x)|$ fonksiyonunu grafiğini çizelim.

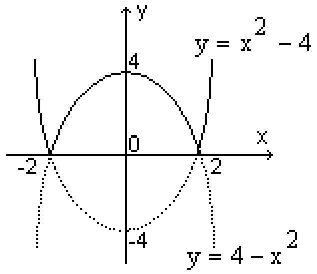
Çözüm:

$f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

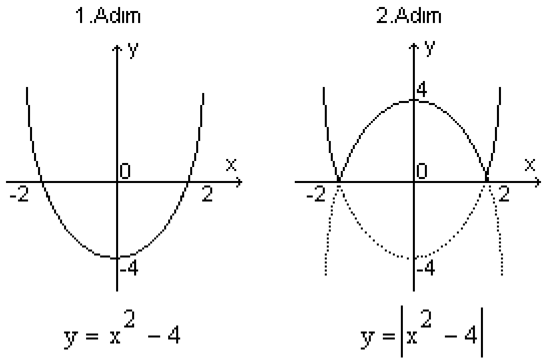
x		-2		2	
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+

$$|f(x)| = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 \ , \ x \leq -2 \ \text{ ve } \ x \geq 2 \\ 4 - x^2 \ , \ -2 < x < 2 \end{cases} \text{ olur.}$$

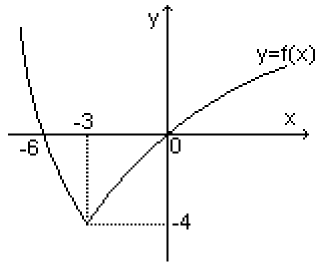
Buna göre $|f(x)| = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun grafiği aşağıda çizilmiştir.



2.Yol



Örnek:



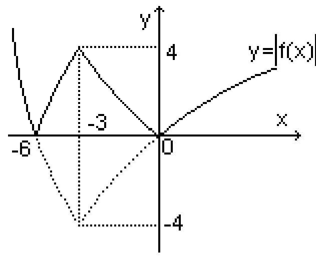
$f : R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre $y = |f(x)|$ in grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonu $-6 < x < 0$ aralığında negatif değerler, diğer yerlerde negatif olmayan değerler almıştır.

Buna göre $-6 < x < 0$ aralığındaki (x ekseni altındaki) görüntünün x eksenine göre simetriği alınarak $y = |f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çizilmiş olur.

$y = |f(x)|$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



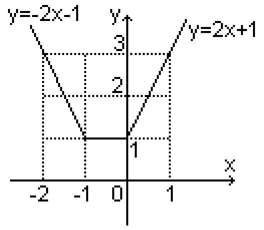
Örnek:

$f: R \to R$, $f(x) = |x| + |x+1|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

	-1	0	
$\lvert x \rvert$	-x	-x	x
$\lvert x+1 \rvert$	-x-1	x+1	x+1
f(x)	-2x-1	1	2x+1

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{olur.}$$



Örnek:

$|x| + |y| = 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

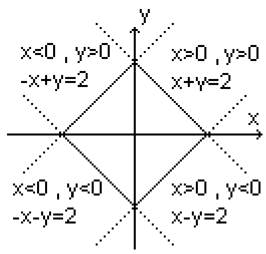
Koordinat düzleminin 1. bölgesinde $x > 0$ ve $y > 0$ olduğundan $x + y = 2$ olup bu doğrunun 1. bölgede kalan kısmı alınır.

2. bölgede $x < 0$ ve $y > 0$ olduğundan $y - x = 2$ olup bu doğrunun 2. bölgede kalan kısmı alınır.

3. bölgede $x < 0$ ve $y < 0$ olduğundan $-x - y = 2$ olup bu doğrunun 3. bölgede kalan kısmı alınır.

4. bölgede $x > 0$ ve $y > 0$ olduğundan $x - y = 2$ olup bu doğrunun 4. bölgede kalan kısmı alınır.

Buna göre, istenen grafik aşağıdaki gibi olur.



Örnek:

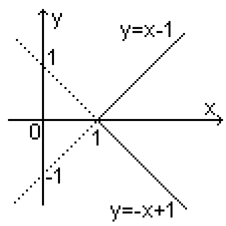
$|y| = x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$|y| = x - 1$ olduğuna göre,

$y \geq 0$ için $y = x - 1$ olur.

$y < 0$ için $-y = x - 1 \Rightarrow y = 1 - x$ olur.

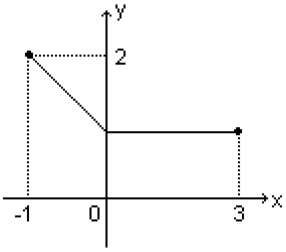


Örnek:

$f: [-1,2] \to R$, $f(x) = |x| - x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$f(x) = |x| - x + 1 = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x+1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$



Örnek:

$f : [-2\pi, 2\pi] \to R$, $f(x) = \cos x + |\cos x| + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$-2\pi \le x \le -\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x \ge 0 \Rightarrow f(x) = 2.\cos x + 1$ dir.

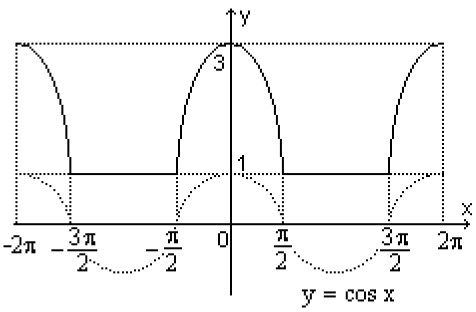
$\dfrac{-3\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow f(x) = 1$ dir.

$-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x \ge 0 \Rightarrow f(x) = 2.\cos x + 1$ dir.

$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow f(x) = 1$ dir.

$\dfrac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \Rightarrow \cos x \ge 0 \Rightarrow f(x) = 2.\cos x + 1$ dir.

Bu durumda $y = \cos x + |\cos x| + 1$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



D. İşaret Fonksiyonu

$f : A \subset R \to R$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\operatorname{sgn}(f(x)) = |f(x)| = \begin{cases} 1 \ , & f(x) > 0 \\ 0 \ , & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

fonksiyona f nin işaret fonksiyonu denir.

Örnek:

$\operatorname{sgn}(1) = 1$

$\operatorname{sgn}(-101) = -1$

$\operatorname{sgn}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

Örnek:

$\operatorname{sgn}(x^3 - x^2 - 12x) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\operatorname{sgn}(x^3 - x^2 - 12x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0$

$\Rightarrow x.(x^2 - x - 12) = 0$

$\Rightarrow x.(x - 4).(x + 3) = 0$

Ç.K. $= \{-3, 0, 4\}$ olur.

Örnek:

$\operatorname{sgn}(x^2 - 9) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\operatorname{sgn}(x^2 - 9) = -1 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3$

$\Rightarrow$ Ç.K. $= (-3, 3)$ olur.

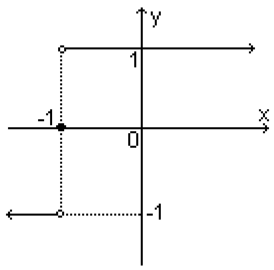
Örnek:

$f(x) = \operatorname{sgn}(x + 1)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$\operatorname{sgn}(x+1)=\begin{cases}1 \ , \ x+1>0\\ 0 \ , \ x+1=0\\ -1 \ , \ x+1<0\end{cases}=\begin{cases}1 \ , \ x>-1\\ 0 \ , \ x=-1\\ -1 \ , \ x<-1\end{cases} \text{ olur.}$$

$y=\operatorname{sgn}(x+1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Örnek:

$f: R \to R$, $f(x)=x^2+x+6$ olmak üzere $\operatorname{sgn}(f(x))$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$f(x)=x^2+x+6=0$ için,

$a=1>0$ ve $\Delta=b^2-4ac=-23<0$ olup $f(x)>0$ dır.

Buna göre $\operatorname{sgn}(f(x))=1$ dir.

Örnek:

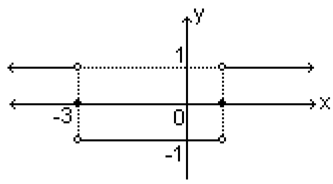
$f: R \to R$, $f(x)=x^2+2x-3$ olmak üzere $\operatorname{sgn}(f(x))$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

x		-3		1	
x^2+2x-3	+	0	-	0	+
$\operatorname{sgn}(x^2+2x-3)$	1	0	-1	0	1

$$\operatorname{sgn}(f(x))=\begin{cases}1 \ , \ x<-3 \text{ veya } x>1\\ 0 \ , \ x=-3 \text{ veya } x=1\\ -1 \ , \ -3<x<1\end{cases} \text{ olur.}$$

$y=\operatorname{sgn}(f(x))$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Örnek:

$f: R \to R$, $f(x)=\operatorname{sgn}(2-|x|)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

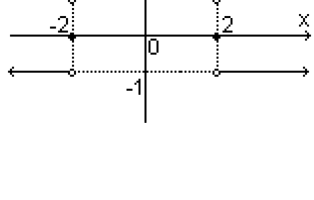
$2-|x|=0 \Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$ dir.

$2-|x|>0 \Rightarrow |x|<2 \Rightarrow -2<x<2$ dir.

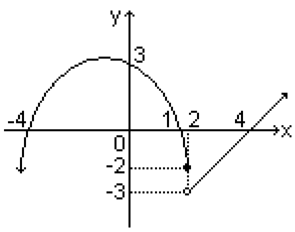
$2-|x|<0 \Rightarrow |x|>2 \Rightarrow x>2$ veya $x<-2$ dir.

$$f(x)=\operatorname{sgn}(2-|x|)=\begin{cases}1 \ , \ -2<x<2\\ 0 \ , \ x=-2 \text{ veya } x=2\\ -1 \ , \ x<-2 \text{ veya } x>2\end{cases} \text{ olur.}$$

$y=\operatorname{sgn}(2-|x|)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Örnek:



$f : R \rightarrow R$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre $y = sgnf(x)$ in grafiğini çizelim.

Çözüm:

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = -4$, $x = 1$ ve $x = 4$ için sıfıra eşit olmaktadır.

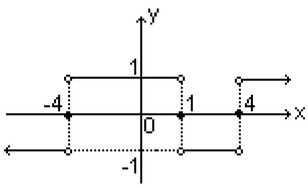
Bu nedenle, bu değerler için $sgnf(x) = 0$ olur.

$x < -4$ ve $1 < x < 4$ için $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler almaktadır.

Bu nedenle, $x < -4$ ve $1 < x < 4$ için $sgnf(x) = -1$ olur.

$-4 < x < 1$ ve $x > 4$ için $y = f(x)$ fonksiyonu pozitif değerler almaktadır.

Bu nedenle, $-4 < x < 1$ ve $x > 4$ için $sgnf(x) = 1$ olur.



Örnek:

$f : [-2\pi, 2\pi] \rightarrow R$, $f(x) = sgn(sinx)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$x = -2\pi \Rightarrow f(-2\pi) = sgn(sin(-2\pi)) = sgn(0) = 0$ dır.

$-2\pi < x < -\pi \Rightarrow sinx > 0 \Rightarrow f(x) = sgn(sin(x)) = 1$ dir.

$x = -\pi \Rightarrow f(-\pi) = sgn(sin(-\pi)) = sgn(0) = 0$ dır.

$-\pi < x < 0 \Rightarrow sinx < 0 \Rightarrow f(x) = sgn(sin(x)) = -1$ dir.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = sgn(sin(0)) = sgn(0) = 0$ dır.

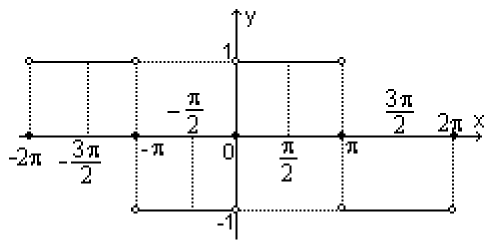
$0 < x < \pi \Rightarrow sinx > 0 \Rightarrow f(x) = sgn(sin(x)) = 1$ dir.

$x = \pi \Rightarrow f(\pi) = sgn(sin(\pi)) = sgn(0) = 0$ dır.

$\pi < x < 2\pi \Rightarrow sinx < 0 \Rightarrow f(x) = sgn(sin(x)) = -1$ dir.

$x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = sgn(sin(2\pi)) = sgn(0) = 0$ dır.

Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



E. Tam Değer Fonksiyonu

1. Tam Değer Kavramı

x bir reel sayı olmak üzere, x ten büyük olmayan en büyük tam sayıya x in tam değeri denir ve $\|x\|$ ile gösterilir.

x bir reel sayı olmak üzere, x ten küçük olan en büyük tam sayı t ise,

$$f : R \rightarrow Z \ , \ f(x) = \|x\| = \begin{cases} x \ , & x \in Z \\ t \ , & x \notin Z \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$\|8\| = 8$

$\|8{,}15\| = 8$

$\|-8{,}15\| = -9$

Kural

$\|x\| = a \Leftrightarrow a \le x < a + 1 \quad ,(a \in Z)$ dir.

Örnek:

$\left\| \frac{x-2}{3} \right\| = 4$ eşitliğini sağlayan x değerinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$$\left\| \frac{x-2}{3} \right\| = 4 \Rightarrow 4 \le \frac{x-2}{3} < 4+1 \Rightarrow 12 \le x-2 < 15$$

$$\Rightarrow 14 \le x < 17 \text{ olur.}$$

2. Tam Değer ile İlgili Özellikler

a) Her $x \in R$ ve $a \in Z$ için, $\|x+a\| = \|x\| + a$ dır.

b) Her $x, y \in R$ için $\|x+y\| \ge \|x\| + \|y\|$ dir.

Örnek:

$\|x - 3.\|x\|\| = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\|x - 3.\|x\|\| = 8 \Rightarrow \|x\| - 3.\|x\| = 8 \Rightarrow -2.\|x\| = 8$$

$$\Rightarrow \|x\| = -4 \Rightarrow -4 \le x < -4+1$$

$$\Rightarrow -4 \le x < -3 \text{ olur.}$$

Örnek:

$\|2 - |x|\| = 0$ denklemini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\|2 - |x|\| = 0 \Rightarrow 2 + \|-|x|\| = 0 \Rightarrow \|-|x|\| = -2$$

$$\Rightarrow -2 \le -|x| < -1 \Rightarrow 1 < |x| \le 2$$

$$\Rightarrow 1 < x \le 2 \text{ veya } -2 \le x < -1 \text{ olur.}$$

Buna göre x in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı; -2+2 = 0 dır.

Örnek:

$\|x^2 - 4\| = 5$ denkleminin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$$\|x^2 - 4\| = 5 \Rightarrow \|x^2\| - 4 = 5 \Rightarrow \|x^2\| = 9 \Rightarrow 9 \le x^2 < 10$$

$$\Rightarrow -\sqrt{10} < x \le -3 \text{ veya } 3 \le x < \sqrt{10} \text{ olur.}$$

Örnek:

$\|x+2\| + \|x-2\| = 4$ denkleminin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$$\|x+2\| + \|x-2\| = 4 \Rightarrow \|x\| + 2 + \|x\| - 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2.\|x\| = 4 \Rightarrow \|x\| = 2$$

$$\Rightarrow 2 \le x < 3 \text{ olur.}$$

Örnek:

$2.\|x\|^2 - 9.\|x\| + 10 = 0$ denkleminin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$\|x\| = a$ olsun. Buna göre,

$$2.\|x\|^2 - 9.\|x\| + 10 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 9a + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (a-2).(2a-5) = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

$$\|x\| = a \Rightarrow \|x\| = 2 \text{ veya } \|x\| = \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

$\|x\| = \frac{5}{2}$ olamaz. Çünkü $\|x\| \in Z$ dir.

$\|x\| = 2 \Rightarrow 2 \le x < 2+1 \Rightarrow 2 \le x < 3$ olur.

Örnek:

$\|2x+3\| < 11$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

$\|2x+3\| < 11 \Rightarrow 2.\|x\| + 3 < 11 \Rightarrow 2.\|x\| < 8 \Rightarrow \|x\| < 4$ tür.

Bu koşula uygun en büyük tam sayı 3 tür.

3. Tam Değer Fonksiyonu

$f : A \subset R \to R$, $f(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan fonksiyona tam değer fonksiyonu denir.

Örnek:

$f : [-2,1] \to R$, $f(x) = \|x\|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

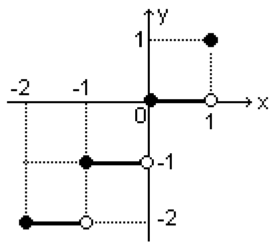
Çözüm:

$-2 \le x < -1 \Rightarrow \|x\| = -2$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow \|x\| = -1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow \|x\| = 0$

$x = 1 \Rightarrow \|x\| = 1$



Örnek:

$f : [-1,2] \to R$, $f(x) = x - \|x\|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

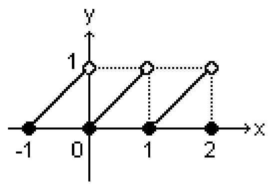
$-1 \le x < 0 \Rightarrow \|x\| = -1 \Rightarrow f(x) = x+1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow f(x) = x$

$1 \le x < 2 \Rightarrow \|x\| = 1 \Rightarrow f(x) = x-1$

$x = 2 \Rightarrow \|x\| = 2 \Rightarrow f(x) = 2-2 = 0$ olur.

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Örnek:

$f : [-2,2] \to R$, $f(x) = |x|.\|x\|.\mathrm{sgn}(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$-2 \le x < -1$ ise; $|x| = -x$, $\|x\| = -2$ ve $\mathrm{sgn}(x) = -1$

olup $f(x) = (-x).(-2).(-1) = -2x$ tir.

$-1 \le x < 0$ ise; $|x| = -x$, $\|x\| = -1$ ve $\mathrm{sgn}(x) = -1$

olup $f(x) = (-x).(-1).(-1) = -x$ tir.

$x = 0$ ise; $|x| = 0$, $\|x\| = 0$ ve $\mathrm{sgn}(x) = 0$ olup

$f(x) = 0.0.0 = 0$ dır.

$0 \le x < 1$ ise; $|x| = x$, $\|x\| = 0$ ve $\mathrm{sgn}(x) = 1$

olup $f(x) = x.0.1 = 0$ dır.

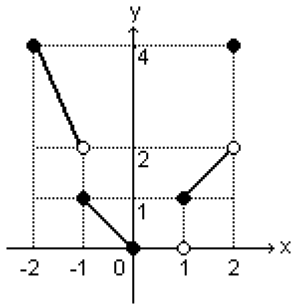
$1 \le x < 2$ ise; $|x| = x$, $\|x\| = 1$ ve $sgn(x) = 1$

olup $f(x) = x.1.1 = x$ tir.

$x = 2$ ise; $|x| = 2$, $\|x\| = 2$ ve $sgn(x) = 1$

olup $f(x) = 2.2.1 = 4$ tür.

Buna göre fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Örnek:

$f : [-2\pi, 2\pi] \to R$, $f(x) = \|\sin x\|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$x = -2\pi$ ise $f(-2\pi) = \|\sin(-2\pi)\| = \|0\| = 0$

$-2\pi < x < -\dfrac{3\pi}{2}$ ise $0 < \sin x < 1 \Rightarrow f(x) = \|\sin x\| = 0$

$x = \dfrac{-3\pi}{2}$ ise $f(-\dfrac{3\pi}{2}) = \left\|\sin(-\dfrac{3\pi}{2})\right\| = \|1\| = 1$

$-\dfrac{3\pi}{2} < x \le -\pi$ ise $0 \le \sin x < 1 \Rightarrow f(x) = \|\sin x\| = 0$

$-\pi < x < 0$ ise $-1 \le \sin x < 0 \Rightarrow f(x) = \|\sin x\| = -1$

$0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ ise $0 \le \sin x < 1 \Rightarrow f(x) = \|\sin x\| = 0$

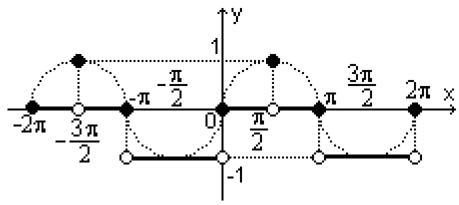
$x = \dfrac{\pi}{2}$ ise $f(\dfrac{\pi}{2}) = \left\|\sin(\dfrac{\pi}{2})\right\| = \|1\| = 1$

$\dfrac{\pi}{2} < x \le \pi$ ise $0 \le \sin x < 1 \Rightarrow f(x) = \|\sin x\| = 0$

$\pi < x < 2\pi$ ise $-1 \le \sin x < 0 \Rightarrow f(x) = \|\sin x\| = -1$

$x = 2\pi$ ise $f(2\pi) = \|\sin 2\pi\| = 0$

Bu durumda fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Örnek:

$A = \{(x,y) \in R \times R : \|x\|.\|y\| = -2\}$ bağıntısının grafiğini çizelim.

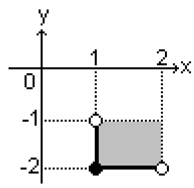
Çözüm:

$\|x\| \in Z$ ve $\|y\| \in Z$ dir. $\|x\|.\|y\| = -2$ ise,

$(\|x\| = 1 , \|y\| = -2)$ veya $(\|x\| = 2 , \|y\| = -1)$ veya

$(\|x\| = -1 , \|y\| = 2)$ veya $(\|x\| = -2 , \|y\| = 1)$ dir.

Öncelikle $\|x\| = 1$, $\|y\| = -2$ koşulunu sağlayan noktaları düzlemde gösterelim.



$\|x\| = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2$ dir.

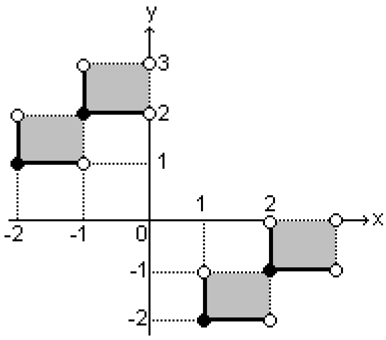
$\|y\| = -2 \Rightarrow -2 \le x < -1$ dir.

Şimdi bütün noktaları gösterelim.

$\|x\| = 2 \Rightarrow 2 \le x < 3$, $\|y\| = -1 \Rightarrow -1 \le y < 0$ dır.

$\|x\| = -1 \Rightarrow -1 \le x < 0$, $\|y\| = 2 \Rightarrow 2 \le y < 3$ tür.

$\|x\| = -2 \Rightarrow -2 \le x < -1$, $\|y\| = 1 \Rightarrow 1 \le y < 2$ dir.

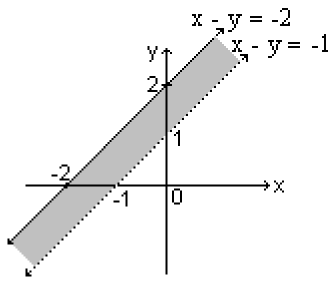


Örnek:

$A = \{(x,y) \in R \times R : \|x - y\| = -2\}$ bağıntısının grafiğini çizelim.

Çözüm:

$\|x - y\| = -2 \Rightarrow -2 \le x - y < -1$ olur.



Çözümlü Sorular

1. $f(x) = \sqrt{7 - |2x+1|}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{7 - |2x+1|}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı $7 - |2x+1| \ge 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

$7 - |2x+1| \ge 0 \Rightarrow |2x+1| \le 7 \Rightarrow -7 \le 2x+1 \le 7$

$\Rightarrow -8 \le 2x \le 6 \Rightarrow -4 \le x \le 3$ olur.

2. $f(x) = \dfrac{\log(4-x)}{x^2-4}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm:

$4 - x > 0$ ve $x^2 - 4 \ne 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$x < 4$ ve $x \ne \pm 2$ dir.

Buna göre f fonksiyonunun en geniş tanım aralığı

$(-\infty,4) - \{-2,+2\}$ olur.

3. $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + \mathrm{sgn}(x)}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm

Paydayı sıfır yapan x değerleri için f fonksiyonu tanımsızdır. Buna göre,

$1 + \mathrm{sgn}(x) = 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}\,x = -1 \Rightarrow x < 0$ olur.

$x < 0$ için f fonksiyonu tanımsızdır. Buna göre f fonksiyonunun en geniş tanım aralığı, $[0,+\infty)$ olur.

4. $f : R \to R$, $f(x) = |x| + \|x\| + \mathrm{sgn}(x)$ fonksiyonunun $[-5,-4)$ aralığındaki ifadesini bulunuz.

Çözüm

$x \in [-5,-4)$ ise, $|x| = -x$, $\|x\| = -5$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$ dir.

$x \in [-5,-4)$ ise, $f(x) = -x - 5 - 1 = -x - 6$ olur.

5. $\left\|\dfrac{x}{5} - 1\right\| = 6$ denklemini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

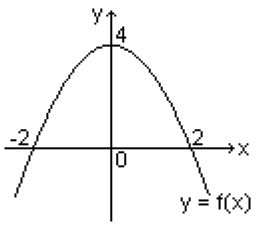
Çözüm

$$\left\|\frac{x}{5}-1\right\| = 6 \Rightarrow 6 \le \frac{x}{5} - 1 < 6+1 \Rightarrow 7 \le \frac{x}{5} < 8$$

$$\Rightarrow 35 \le x < 40 \text{ olur.}$$

Buna göre, verilen denklemi sağlayan tam sayılar 35, 36, 37, 38, 39 olmak üzere, 5 tanedir.

6.



Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = |f|(x) + f(x)$ olduğuna göre $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Verilen grafiğe göre,

$x < -2 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow |f|(x) = -f(x)$ olup,

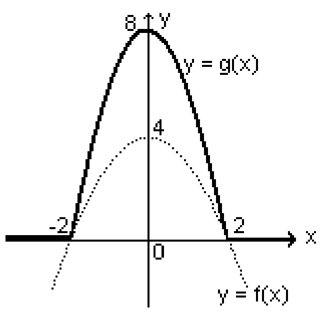
$$g(x) = -f(x) + f(x) = 0 \text{ dır.}$$

$x > 2 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow |f|(x) = -f(x)$ olup,

$$g(x) = -f(x) + f(x) = 0 \text{ dır.}$$

$-2 \le x \le 2 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow |f|(x) = f(x)$ olup,

$$g(x) = f(x) + f(x) = 2.f(x) \text{ tir.}$$



7. $f(x) = 5 - \left\|\frac{x}{5}\right\|$ olduğuna göre $f(12)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(12) = 5 - \left\|\frac{12}{5}\right\| = 5 - \|2{,}4\| = 5 - 2 = 3 \text{ tür.}$$

8. $\left\| x + \|x\| \right\| = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$\|x\| \in Z$ olduğundan $\left\| x + \|x\| \right\| = 6 \Rightarrow \|x\| + \|x\| = 6$

$$\Rightarrow 2.\|x\| \Rightarrow \|x\| = 3$$

$$\Rightarrow 3 \le x < 4 \text{ tür.}$$

9. $\left\| x + 3.\|x+2\| \right\| = -2$ denkleminin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm

$\|x+2\| \in Z$ olduğu için,

$$\left\| x + 3.\|x+2\| \right\| = -2 \Rightarrow \|x\| + 3.\|x+2\| = -2$$

$$\Rightarrow \|x\| + 3.\left(\|x\| + 2\right) = -2$$

$$\Rightarrow 4.\|x\| + 6 = -2$$

$$\Rightarrow 4.\|x\| = -8 \Rightarrow \|x\| = -2$$

$$\Rightarrow -2 \le x < -1 \text{ olur.}$$

10. $sgn(x+3) + x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x = -3$ için $\text{sgn}(-3+3) - 3 = 3 \Rightarrow \text{sgn}(0) - 3 = 3$

$0 - 3 \neq 3$ olup denklemi sağlamaz.

$x > -3$ için $\text{sgn}(x+3) = 1$ dir. Buna göre,

$\text{sgn}(x+3) + x = 3 \Rightarrow 1 + x = 3 \Rightarrow x = 2$

olup denklemi sağlar.

$x < -3$ için $\text{sgn}(x+3) = -1$ dir. Buna göre,

$\text{sgn}(x+3) + x = 3 \Rightarrow -1 + x = 3 \Rightarrow x = 4$

olup $x < -3$ olduğundan denklemi sağlamaz.

Buna göre denklemin çözüm kümesi Ç={2} dir.

11. $x \in [2,3)$ olmak üzere $\|x\|.x^{\|x\|} - 9.x + 5.\|x\| = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre, $\text{sgn}(x_1 + 1) + \text{sgn}(x_2 - 3)$ değeri kaçtır?

Çözüm

$x \in [2,3)$ ise $\|x\| = 2$ dir. Buna göre,

$$\|x\|.x^{\|x\|} - 9.x + 5.\|x\| = 0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2).(2x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \text{ ve } x_2 = \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

$$\text{sgn}(x_1 + 1) + \text{sgn}(x_2 - 3) = \text{sgn}(2+1) + \text{sgn}(\frac{5}{2} - 3)$$

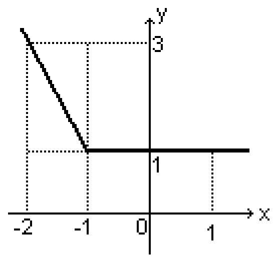
$$= \text{sgn}(3) + \text{sgn}(-\frac{1}{2})$$

$$= 1 - 1 = 0 \quad \text{olur.}$$

12. $f(x) = |x+1| - x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \geq 0\ ,\ x+1-x \\ x+1 < 0\ ,\ -x-1-x \end{cases} = \begin{cases} x \geq -1\ ,\ 1 \\ x < -1\ ,\ -2x-1 \end{cases}$$



13. $2.\|2.x\|^2 + \|2.x - 6\| = 0$ denkleminin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm

$\|2.x\| = a$ olsun.

$$2.\|2.x\|^2 + \|2.x - 6\| = 0 \Rightarrow 2a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2).(2a-3) = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ veya } a = \frac{3}{2} \notin Z$$

$$\Rightarrow \|2.x\| = -2 \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \quad \text{olur.}$$

14. $\left\|\frac{x}{4} + 3\right\| = \text{sgn}(x^2 + x + 4)$ denklemini sağlayan kaç tane tam sayı vardır?

Çözüm

$a > 0$ ve $\Delta < 0$ olduğundan dolayı her $x \in R$ için

$x^2 + x + 4 > 0$ olup $\text{sgn}(x^2 + x + 4) = 1$ dir.

$$\left\|\frac{x}{4} + 3\right\| = \text{sgn}(x^2 + x + 4) \Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\| + 3 = 1$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\| = -2 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{4} < -1 \Rightarrow -8 \leq x < -4 \text{ tür.}$$

Konu Bitmiştir.
