SERİLER

A. Seriler

Tanım

(a_n) reel terimli bir dizi olmak üzere,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ toplamına seri denir.

a_n'ye serinin genel terimi denir.

Örnek:

$(a_n) = (3^{n-1}) = (1,3,3^2,3^3,3^4,...,3^{n-1},...)$ reel sayı dizisi olduğu için,

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{n-1} + ...$

sonsuz toplamı bir seridir.

Serinin genel terimi, 3^{n-1} dir

Örnek:

$(a_n) = (n^3) = (1^3,2^3,3^3,4^3,5^3,...,n^3,...)$ reel sayı dizisi olduğu için,

$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 + ...$

sonsuz toplamı bir seridir.

Serinin genel terimi, n^3 tür.

Tanım

Serinin ilk n teriminin toplamı olan,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

ifadesine serinin n. kısmi toplamı denir.

$(S_n) = (S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...)$

dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi denir

Örnek:

$(a_n) = (n+1) = (2,3,,4,5,6,...,n+1,...)$ dizisi reel sayı dizisidir. Buna göre,

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n + 1 + ...$

sonsuz toplamı, genel terimi n +1 olan seridir. Bu serinin n. kısmi toplamı:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 2 + 3 + ... + n + 1$

$= \frac{(n+1).(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n}{2}$ dir.

Serinin kısmi toplamlar dizisi

$(S_n) = (S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...)$

$= (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n, ...)$

$= (2, 2+3, 2+3+4, ..., 2+3+...+n+1, ...)$ dir.

Uyarı

Serinin genel terimi ile kısmi toplamlar dizisinin genel terimi aynı ifadedir

Örnek:

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + n^2 + ...$

- Serisinin genel terimi $a_n = n^2$ dir.
- n. kısmi toplamı,

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + n^2$

$= \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ dır.

- Kısmi toplamlar dizisi,

$$(S_n) = \left(\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}\right) \text{ dır.}$$

Kural

Bir serinin değeri (toplamı), kısmi toplamlar dizisinin limitine eşittir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim(S_n)$$

Örnek:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin

genel terimi,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + ... + \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{1.2}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Buna göre, serinin değeri

$$\lim(S_n) = \lim\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Tanım

Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan seriye yakınsak seri, kısmi toplamlar dizisi ıraksak olan seriye ıraksak seri denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar serisi (S_n) olsun.

1. (S_n) dizisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

2. (S_n) dizisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

Örnek:

$\sum_{k=1}^{\infty} k$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\lim(S_n) = \lim\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right) = \lim\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \infty$$

olduğu için, kısmi toplamlar dizisi ıraksaktır. Buna göre,

$\sum_{k=1}^{\infty} k$ serisi ıraksaktır.

Örnek:

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3^n-1}{3^n}}{3-3.\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3^n-1}{3^n}}{2} = \frac{3^n-1}{2.3^n} \text{ olur.}$$

$$\lim(S_n) = \lim\left(\frac{3^n-1}{2.3^n}\right) = \frac{1}{2} \text{ olur. Buna kısmi toplamlar}$$

dizisi yakınsaktır.

Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ serisi de yakınsaktır.

Dolayısıyla serinin değeri (toplamı);

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim(S_n) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Kural

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim(a_n) = 0$ dır.

2. $\lim(a_n) = 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olmayabilir.

3. $\lim(a_n) \neq 0$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek:

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ serisinin ıraksak olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$\lim\left(\ln(\frac{n+2}{n+1})\right) = \ln\left(\lim(\frac{n+2}{n+1})\right) = \ln 1 = 0$ olduğu halde,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{4}{3}) + ... + \ln(\frac{n+2}{n+1})$$

$$= \ln(\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{n+1}{n}.\frac{n+2}{n+1}) = \ln(\frac{n+2}{2})$$

$\lim(S_n) = \lim\left(\ln(\frac{n+2}{2})\right) = \infty$ olup $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ serisi ıraksaktır.

Örnek:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{2k^2+2}$ serisinin yakınsak olup olmadığını gösterelim.

Çözüm:

$a_n = \frac{3n^2+1}{2n^2+2}$ iken $\lim a_n = \lim\frac{3n^2+1}{2n^2+2} = \frac{3}{2} \neq 0$

olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{2k^2+2}$ serisi ıraksaktır.

B. Aritmetik Seriler

(a_n) dizisi bir aritmetik dizi ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine aritmetik seri denir.

Aritmetik serinin n. kısmi toplamı:

$$S_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}.\left[2.a_1 + (n-1).d\right] \text{ dir.}$$

Örnek:

$\sum_{k=1}^{\infty} (3n-1)$ serisini inceleyelim.

Çözüm:

$\sum_{k=1}^{\infty} (3n-1)$ serisinde $a_n = 3n-1$ dir.

$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3$ tür.

Serinin genel terimi, aritmetik dizi koşulunu sağladığına göre, verilen seri aritmetik seridir.

$\lim a_n = \lim(3n-1) = \infty$ dur. $\lim a_n \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

Uyarı

(0) sabit dizisi hariç tüm aritmetik seriler ıraksaktır.

C. Geometrik Seriler

(a_n) dizisi bir geometrik dizi ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine geometrik seri denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_1.r^{n-1}\right)$ geometrik serisinin n. kısmi

toplamı:

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} \text{ dir.}$$

Uyarı

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1.r^{n-1}\right)$ geometrik serisinde;

- $|r| \geq 1$ ise seri ıraksaktır.
- $|r| < 1$ ise seri yakınsaktır.
- Yakınsak ise, serinin toplamı(değeri)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1.r^{n-1}\right) = a_1.\frac{1}{1-r} \text{ dir.}$$

Örnek:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{4^n}$ serisini inceleyelim.

Çözüm:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{4^n}$ serisinde $a_n = \frac{3^{n+1}}{4^n}$ dir.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{4^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{4^n}} = \frac{\frac{3.3^{n+1}}{4.4^n}}{\frac{3^{n+1}}{4^n}} = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Serinin genel terimi, geometrik dizi koşulunu sağladığı için, verilen seri geometrik seridir.

$\lim(a_n) = \lim(\frac{3^{n+1}}{4^n}) = \lim\left[3.\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 3.0 = 0$ olduğu

için, seri yakınsak olabilir. Buna göre, serinin kısmi toplamlar dizisinin limitine bakalım.

Serinin kısmi toplamı:

$a_1 = \frac{9}{4}$ ve $r = \frac{3}{4}$ olduğuna göre,

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_n = \frac{9}{4}.\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 9.\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

Kısmi toplamlar dizisinin limiti:

$$\lim(S_n) = \lim\left[9.\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right] = 9.(1-0) = 9 \text{ olur.}$$

Kısmi toplamlar dizisinin limiti bir reel sayı olduğuna göre, verilen seri yakınsaktır.

Buna göre, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{4^n} = \lim(S_n) = 9$ olur.

Örnek:

$\sum_{n=1}^{\infty}5^{n+1}$ serisini inceleyelim.

Çözüm:

$\sum_{n=1}^{\infty}5^{n+1}$ serisinde $a_n = 5^{n+1}$ dir.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+2}}{5^{n+1}} = 5$ tir. Serinin genel terimi, geometrik dizi koşulunu sağladığı için, verilen seri geometrik seridir.

$\lim(a_n) = \lim(5^{n+1}) = \infty \neq 0$ olduğundan seri

ıraksaktır. Buna göre serinin değeri (toplamı) ∞ dur.

Örnek:

$0,\overline{3} = 0,3333...$ devirli ondalık açılımının değeri kaçtır?

Çözüm:

$$0,333...3... = \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{100}+...+\frac{3}{10^n}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$$

Bu serinin ortak çarpanını ve ilk terimini belirleyip, değerini bulalım:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{10^{n+1}}}{\frac{3}{10^n}} = \frac{3}{10.10^n}.\frac{10^n}{3} = \frac{1}{10}$$ olduğuna

göre verilen seri geometrik seridir. $|r| < 1$ olduğundan seri yakınsaktır. Bu durumda serinin değeri;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1.r^{n-1}\right) = a_1.\frac{1}{1-r}$$ ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n} = \frac{3}{10}.\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$ olur.

Örnek:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+...+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+...$$

Serinin genel terimi, geometrik dizi koşulunu sağladığı için verilen seri geometrik seridir. Ortak çarpanı $r = -\frac{1}{2}$ dir. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = a_1.\frac{1}{1-r} = 1.\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$ olur.

Örnek:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{3^{n+2}} = 6$$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{3^{n+2}} = \frac{a}{3^3}+\frac{a}{3^4}+\frac{a}{3^5}+...+\frac{a}{3^{n+2}}+...$$

Serinin genel terimi, geometrik dizi koşulunu sağladığı için verilen seri geometrik seridir. Ortak çarpanı $r = \frac{1}{3}$ tür. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{3^{n+2}} = 6 \Rightarrow a_1.\frac{1}{1-r} = 6 \Rightarrow \frac{a}{27}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{a}{27}.\frac{3}{2} = 6 \Rightarrow \frac{a}{18} = 6 \Rightarrow a = 108$$ dir.

Örnek:

$|a| < 1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{5}{6}$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ...$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{5}{6}$$ ise $1.\frac{1}{1-a} = \frac{5}{6} \Rightarrow 5-5a = 6 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$ tir.

Örnek:

$\ln\sqrt[3]{x} + \ln\sqrt[9]{x} + \ln\sqrt[27]{x} + ... + \ln\sqrt[3^n]{x} + ... = 4$ olduğuna göre x in değeri kaçtır?

Çözüm:

$\ln\sqrt[3]{x} + \ln\sqrt[9]{x} + \ln\sqrt[27]{x} + ... + \ln\sqrt[3^n]{x} + ... = 4$ ise

$$\Rightarrow \frac{1}{3}.\ln x + \frac{1}{9}.\ln x + \frac{1}{27}\ln x + ... + \frac{1}{3^n}.\ln x + ... = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}.\ln x + \frac{1}{9}.\ln x + \frac{1}{27}\ln x + ... + \frac{1}{3^n}.\ln x + ... = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}.\ln x = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}.\ln x = 4 \Rightarrow \ln x = 8$$

$$\Rightarrow x = e^8$$ olur.

Örnek:

$0^o < x < 90^o$ olmak üzere, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n = 2$ olduğuna göre x kaç derecedir?

Çözüm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n = 1 + \sin x + \sin^2 x + ... + \sin^n x + ...$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n = 2 \text{ ise, } 1.\frac{1}{1-\sin x} = 2 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 2 - 2.\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ olur. } 0^o < x < 90^o$$

olduğundan,

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^o \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\prod_{n=1}^{\infty} 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\prod_{n=1}^{\infty} 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^0}.4^{\left(\frac{1}{2}\right)^1}.4^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}.4^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}...$$

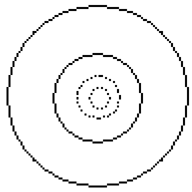
$$= 4^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...}$$

$$= 4^{1.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 4^2 = 16 \text{ olur.}$$

Örnek:

Yarıçapı 10 birim olan çemberin içine, her birinin yarıçapı bir öncekinin yarısı olacak şekilde sonsuz çoklukta çemberler çiziliyor. Çizilen çemberlerin alanları toplamı kaç birim karedir?

Çözüm:



Çemberlerin alanları dışarıdan içeriye doğru sırasıyla,

$$\pi.10^2, \pi.5^2, \pi.\left(\frac{5}{2}\right)^2, \pi.\left(\frac{5}{4}\right)^2, \pi.\left(\frac{5}{16}\right)^2, ... \text{ olur.}$$

Buna göre çizilen çemberlerin alanları toplamı,

$$\pi.10^2 + \pi.5^2 + \pi.\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \pi.\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \pi.\left(\frac{5}{16}\right)^2 + ...$$

$$= \pi.10^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ...\right) = 100\pi.1.\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 100\pi.\frac{4}{3} = \frac{400\pi}{3} \text{ olur.}$$

Örnek:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.3^{1-n}$ serisinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.3^{n-1}$ serisinin değeri S olsun. Buna göre,

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + ...$$

$$\frac{1}{3}.S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \frac{6}{3^6} + ...$$

İlk eşitlikten ikincisi taraf tarafa çıkarılırsa,

$$S - \frac{1}{3}.S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + ...$$

$$\Rightarrow \frac{2S}{3} = 1.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{2.S}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \frac{9}{4} \text{ olur.}$$

Sonuç

$-1 < r < 1$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n.r^{n-1}\right) = \frac{1}{(1-r)^2}$ dir.

Çözümlü Sorular

1. $1 + \frac{2^3}{1+2} + \frac{3^4}{1+2+3} + \frac{4^5}{1+2+3+4} + \ldots$ serisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm:

$$1 + \frac{2^3}{1+2} + \frac{3^4}{1+2+3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{1+2+3+\ldots+n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.n^n}{\frac{n.(n+1)}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.n^n}{n+1} \text{ olduğu için serinin}$$

genel terimi $a_n = \frac{2.n^n}{n+1}$ dir.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+6k+8}$ serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{1}{k^2+6k+8} = \frac{1}{(k+4).(k+2)} = \frac{A}{k+4} + \frac{B}{k+2} \text{ ise,}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+4).(k+2)} = \frac{A.(k+2)+B.(k+4)}{(k+4).(k+2)}$$

$$\Rightarrow A.(k+2) + B.(k+4) = 1$$

$$\Rightarrow (A+B).k + (2A+4B) = 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+4B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ ve } B = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\frac{1}{k^2+6k+8} = \frac{-\frac{1}{2}}{k+4} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} = -\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+2}\right) \text{ dir.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+6k+8} = -\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+2}\right) \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+6k+8} = -\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] \text{ olur.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+6k+8} = \lim(S_n)$$

$$= \lim\left(-\frac{1}{2}.(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4})\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.\left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{7}{24} \text{ tür.}$$

3. 0,454545...45... devirli ondalık açılımının değeri kaçtır?

Çözüm:

$$0,454545...45... = \frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \ldots + \frac{45}{10^{2n}} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{10^{2n}}$$

Bu serinin ortak çarpanını ve ilk terimini belirleyip, değerini bulalım:

$$r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{45}{10^{2n+2}}}{\frac{45}{10^{2n}}}=\frac{45}{100.10^{2n}}.\frac{10^{2n}}{45}=\frac{1}{100}$$

olduğuna göre verilen seri geometrik seridir. $|r|<1$ olduğundan seri yakınsaktır. Bu durumda serinin değeri;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1.r^{n-1}\right)=a_1.\frac{1}{1-r} \text{ ise,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{45}{10^{2n}}=\frac{45}{100}.\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{45}{100}.\frac{100}{99}=\frac{5}{11} \text{ olur.}$$

4. $1<a<b$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2b}\right)^n$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm:

$$1<a<b\Rightarrow 0<\frac{a}{b}<1\Rightarrow 0<\frac{a}{2b}<\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2b}\right)^n=\frac{a}{2b}+\left(\frac{a}{2b}\right)^2+\left(\frac{a}{2b}\right)^3+\ldots \text{ olduğuna}$$

göre, $a_1=\frac{a}{2b}$ ve $r=\frac{a}{2b}$ dir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2b}\right)^n=\frac{a}{2b}.\frac{1}{1-\frac{a}{2b}}=\frac{a}{2b}.\frac{2b}{2b-a}=\frac{a}{2b-a} \text{ olur.}$$

5. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-10}$ serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-10}\Rightarrow a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-10} \text{ dur.}$$

$$r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-7}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8} \text{ dir.}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}+\frac{1}{2^{11}}+\ldots$$

olduğuna göre $a_1=\frac{1}{4}$ tür.

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-10}=a_1.\frac{1}{1-r}=\frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7} \text{ olur.}$$

6. $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}.3^{2-2k}$ serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}.3^{2-2k}\Rightarrow a_n=(-1)^{n+1}.3^{2-2n} \text{ dir.}$$

$$r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^{n+2}.3^{-2n}}{(-1)^{n+1}.3^{2-2n}}=-\frac{1}{9} \text{ dur.}$$

Buna göre seri geometrik seridir.

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}.3^{2-2k}=a_1.\frac{1}{1-r}$$

$$=-\frac{1}{9}.\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=-\frac{1}{10}$$

olur.

7. $1 < a < 4$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 1}{4^n} = \frac{22}{3}$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$1 < a < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{a}{4} < 1 \text{ dir.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{4}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{4 - a} + \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 1}{4^n} = \frac{22}{3} \Rightarrow \frac{a}{4 - a} + \frac{1}{3} = \frac{22}{3} \Rightarrow \frac{a}{4 - a} = 7$$

$$\Rightarrow 28 - 7a = a \Rightarrow 8a = 28 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

8. $\sum\limits_{n=a}^{\infty} 3^{2-n} = \frac{3}{2}$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=a}^{\infty} 3^{2-n} = \sum_{n=a}^{\infty} \frac{9}{3^n} = \frac{9}{3^a} + \frac{9}{3^{a+1}} + \frac{9}{3^{a+2}} + \ldots$$

$$= \frac{9}{3^a} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{9}{3^a} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2.3^a} \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\sum_{n=a}^{\infty} 3^{2-n} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{27}{2.3^a} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3^{a+1} = 27 \Rightarrow a = 2 \text{ dir.}$$

9. $a_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right)$ serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n + 3 - 1}{n + 1 + 2} - \frac{3n - 1}{n + 2} = \frac{3n + 2}{n + 3} - \frac{3n - 1}{n + 2}$$

$$= \frac{3n^2 + 2n + 6n + 4 - 3n^2 + n - 9n + 3}{(n + 2).(n + 3)}$$

$$= \frac{7}{(n + 2).(n + 3)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(n + 2).(n + 3)} \text{ olur.}$$

Buna göre serinin n. kısmi toplamı,

$$S_n = \frac{7}{3.4} + \frac{7}{4.5} + \frac{7}{5.6} + \ldots + \frac{7}{(n + 2).(n + 3)}$$

$$= 7.\left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{(n + 2).(n + 3)}\right)$$

$$= 7.\left(\frac{n + 2}{n + 3} - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) = 7.\left(\frac{n + 2}{n + 3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(n + 2).(n + 3)} = \lim(S_n)$$

$$= \lim\left[7.\left(\frac{n + 2}{n + 3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\right]$$

$$= 7.\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{3} \text{ olur.}$$

10. $x > 1$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-n} + 3^{1-n} + x^{1-n}\right) = \frac{14}{3}$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{1-n}+3^{1-n}+x^{1-n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{1-n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{1-n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{1-n}\right)$$

$$=1.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+1.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+1.\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=2+\frac{3}{2}+\frac{x}{x-1} \text{ olur.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{1-n}+3^{1-n}+x^{1-n}\right)=\frac{14}{3} \text{ ise,}$$

$$2+\frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}=\frac{14}{3}\Rightarrow\frac{x}{x-1}=\frac{7}{6}\Rightarrow x=7 \text{ olur.}$$

11. $x^2<x$ olmak üzere $\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+...=\frac{9}{2}$ olduğuna göre x kaç olabilir?

Çözüm:

$$\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+...=\frac{9}{2} \text{ ise,}$$

$$\frac{1}{x}.\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+...\right)=\frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{x}.1.\frac{1}{1-x}=\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{1}{x-x^2}=\frac{9}{2}\Rightarrow 9x^2-9x+2=0$$

$$\Rightarrow(3x-1).(3x-2)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ veya } x=\frac{2}{3} \text{ olabilir.}$$

12. $|r|<1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty}a_1.r^{n-1}=3$ ve $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2+...=12$ olduğuna göre r kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_1.r^{n-1}=3\Rightarrow a_1.\frac{1}{1-r}=3\Rightarrow\frac{a_1}{1-r}=3$$

$$\Rightarrow\frac{a_1^2}{(1-r)^2}=9 \text{ olur.}$$

Serinin terimlerinin kareleri toplamı 12 olduğuna göre,

$$\Rightarrow a_1^2+(a_1.r)^2+(a_1.r^2)^2+(a_1.r^3)^2+...=12$$

$$\Rightarrow a_1^2+a_1^2.r^2+a_1^2.r^4+a_1^2.r^6+...=12$$

$$\Rightarrow a_1^2\left[1+(r^2)^1+(r^2)^2+(r^2)^3+...\right]=12$$

$$\Rightarrow a_1^2.1.\frac{1}{1-r^2}=12\Rightarrow\frac{a_1^2}{1-r^2} \text{ olur.}$$

$\frac{a_1^2}{(1-r)^2}=9$ ve $a_1^2.1.\frac{1}{1-r^2}=12$ eşitlikleri oranlanırsa,

$$\frac{\frac{a_1^2}{(1-r)^2}}{\frac{a_1^2}{1-r^2}}=\frac{9}{12}\Rightarrow\frac{1-r^2}{(1-r)^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow 7r^2-6r-1=0$$

$$\Rightarrow(r-1).(7r+1)=0\Rightarrow r=1 \text{ veya } r=-\frac{1}{7} \text{ olur.}$$

Seri yakınsak olduğundan $|r|<1$ olacaktır. Dolayısıyla $r=-\frac{1}{7}$ bulunur.

13. $\sum_{n=a}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}<\frac{1}{72}$ olduğuna göre, a nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3^{2a+1}} + \frac{1}{3^{2a+3}} + \frac{1}{3^{2a+5}} + ...$$

$$= \frac{1}{3^{2a+1}}.\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + ...\right)$$

$$= \frac{1}{3^{2a+1}}.1.\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{3^{2a-1}.8}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} < \frac{1}{72} \Rightarrow \frac{1}{3^{2a-1}.8} < \frac{1}{72}$$

$$\Rightarrow 3^{2a-1} > 3^2 \Rightarrow 2a-1 > 2$$

$$\Rightarrow a > \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

a tam sayı olduğuna göre, verilen koşulu sağlayan a nın alabileceği en küçük tam sayı değeri 2 dir.

14. $x^2 < x$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{1}{2}$ olduğuna göre, $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2\left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2.1.\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1).(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ veya } x = -1 \text{ olur.}$$

$x = -1$ için seri ıraksak olacağından $x = \frac{1}{2}$ dir.

$$x = \frac{1}{2} \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

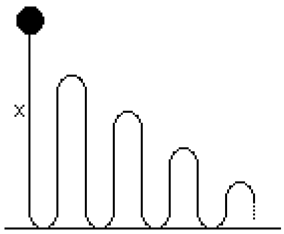
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + ...$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + ...$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}.\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

15. bir top x metre yükseklikten bırakılıyor. Top yere her çarpışında düştüğü yüksekliğin $\frac{5}{6}$ sı kadar yükseliyor. Topun aldığı toplam dikey yol 44 metre olduğuna göre, x kaçtır?

Çözüm:



Şekildeki top x metre yükseklikten bırakılıyor. Top yere her çarpışında düştüğü yüksekliğin $\frac{5}{6}$ sı kadar yükseliyor.

Topun aldığı toplam dikey yol 44 metre olduğuna göre,

$$x + 2.x.\frac{5}{6} + 2.x.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} + 2.x.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} + ... + 2.x.\left(\frac{5}{6}\right)^n + ... = 44$$

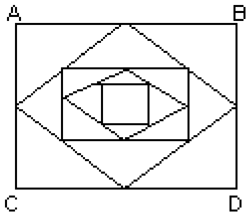
$$x + 2.x.\frac{5}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + ... + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + ...\right) = 44$$

$$x + 2.x.\frac{5}{6}.1.\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 44$$

$$x+2.x.\frac{5}{6}.1.\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=44 \Rightarrow x+2x.\frac{5}{6}.\frac{6}{1}=44$$

$x+10x=44 \Rightarrow 11x=44 \Rightarrow x=4$ olur.

16.



Şekildeki ABCD dikdörtgeninin boyutları 6a birim ve 8a birimdir. Bu dikdörtgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen çiziliyor. Bu kez içteki dörtgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen çiziliyor. En içteki dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirmeye devam edilirse sonsuz sayıda dörtgen oluşur. Bu sonsuz sayıdaki dörtgenin çevrelerinin toplamı kaç birimdir?

Çözüm:

Verilen şekil sırasıyla, bir dikdörtgen bir eşkenar dörtgen şeklindedir.

Herhangi bir dikdörtgenin çevresi, kendisinden bir önce çizilen dikdörtgenin çevresinin yarısına eşittir.

Benzer durum eşkenar dörtgenler için de geçerlidir.

Buna göre, dikdörtgenlerin çevreleri toplamı,

$$28a+28a.\frac{1}{2}+28a.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+28a.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+...+28a.\left(\frac{1}{2}\right)^n+...$$

$$=28a\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n+..\right)$$

$$=28a.1.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=56a \text{ birim olur.}$$

Eşkenar dörtgenlerin çevreleri toplamı,

$$20a+20a.\frac{1}{2}+20a.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+20a.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+...+20a.\left(\frac{1}{2}\right)^n+...$$

$$=20a\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n+..\right)$$

$$=20a.1.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=40a \text{ birim olur.}$$

Buna göre, oluşan tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı,

$56a+40a=96a$ bulunur.

Konu Bitmiştir…