ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER

1. Aritmetik Diziler

A. Tanım

Ardışık her iki terimi arasındaki fark eşit olan diziye aritmetik dizi denir.

Yani her n pozitif tamsayısı için,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = \ldots = d$$

olacak şekilde bir $d \in R$ varsa (a_n) dizisine aritmetik dizi; d sayısına da aritmetik dizinin ortak farkı denir.

Örnek:

$(a_n) = (3n - 4)$ dizisinin aritmetik olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$a_{n+1} - a_n = \left[3.(n+1) - 4\right] - (3n - 4) = 3$ olduğuna göre, (a_n) aritmetik dizidir. Ortak farkı 3'tür.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{n+10}{5})$ dizisinin aritmetik dizi olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+11}{5} - \frac{n+10}{5} = \frac{1}{5}$ olduğuna göre (a_n) aritmetik dizidir. Ortak farkı $\frac{1}{5}$ tir.

Örnek:

$(a_n) = (n^2 + n)$ dizisinin aritmetik olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$a_{n+1} - a_n = \left[(n+1)^2 + (n+1)\right] - (n^2 + n) = 2n + 2$ olup

$2n + 2$ sayısı sabit bir reel sayı göstermediğinden (a_n) aritmetik dizi değildir.

B. Genel Terim

İlk terimi a_1 ve ortak farkı d olan (a_n) aritmetik dizisinin genel terimini a_1 ve d cinsinden bulalım:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$

....

$a_n = a_1 + (n-1).d$ dir.

Demek ki, aritmetik dizinin genel terimi:

$a_n = a_1 + (n-1).d$ dir.

Örnek:

İlk terimi -2 ve ortak farkı $\frac{3}{2}$ olan aritmetik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm:

$a_n = a_1 + (n-1).d = -2 + (n-1).\frac{3}{2} = \frac{3n-7}{2}$ dir.

Örnek:

İlk terimi 8 ve ortak farkı 2 olan aritmetik dizinin genel terimi nedir?

Çözüm:

$a_n = a_1 + (n-1).d = 8 + (n-1).2 = 2n + 6$ dır.

Örnek:

İlk terimi 4 ve ortak farkı 3 olan aritmetik dizinin 18. terimi kaçtır?

Çözüm:

$a_1 = 4$ ve $d = 3$ olduğuna göre,

$a_n = a_1 + (n-1).d \Rightarrow a_{18} = 4 + (18-1).3 = 55$ olur.

Örnek:

İlk terimi $(3x-1)$, ikinci terimi $(2x+7)$ ve üçüncü terimi $(4x-3)$ olan aritmetik dizide ortak fark kaçtır?

Çözüm:

$a_1 = 3x - 1$, $a_2 = 2x + 7$, $a_3 = 4x - 3$
olmak üzere, aritmetik dizide ardışık terimler arasındaki fark sabittir. Buna göre,

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 2x + 7 - 3x + 1 = 4x - 3 - 2x - 7$

$\Rightarrow -x + 8 = 2x - 10 \Rightarrow x = 6$ olur.

$d = a_2 - a_1 = 2x + 7 - 3x + 1 = -x + 8 = -6 + 8 = 2$ olur.

C. Aritmetik Dizinin Özellikleri

Özellik:

$p < n$ olmak üzere, bir aritmetik dizinin genel terimi,

$a_n = a_p + (n-p).d$ ve ortak farkı $d = \dfrac{a_n - a_p}{n - p}$ dir.

$d > 0$ ise dizi artandır.

$d = 0$ ise dizi sabittir.

$d < 0$ ise dizi azalandır

Örnek:

Bir aritmetik dizide; 3. terim 23 ve 7. terim 47 dir. Buna göre, bu aritmetik dizinin ortak farkı kaçtır?

Çözüm:

$d = \dfrac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \dfrac{47 - 23}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$ dır.

Örnek:

Bir aritmetik dizide; 2. terim 35 ve 9. terim 21 dir. Buna göre, bu aritmetik dizinin ilk terimi kaçtır?

Çözüm:

$d = \dfrac{a_9 - a_2}{9 - 2} = \dfrac{21 - 35}{7} = \dfrac{-14}{7} = -2$ dir. (Dizi azalan)

$a_n = a_p + (n-p).d$

$a_2 = a_1 + (2-1).(-2) \Rightarrow 35 = a_1 - 2 \Rightarrow a_1 = 37$ olur.

Örnek:

Bir aritmetik dizide ilk terim 16 ve son terim 124 tür. Ortak fark 3 olduğuna göre, bu dizinin terim sayısını bulalım.

Çözüm:

Bu dizinin terim sayısı n olsun.

$a_n = a_1 + (n-1).d \Rightarrow 124 = 16 + (n-1).3$

$\Rightarrow n = \dfrac{124 - 16}{3} + 1 = 37$ dir.

Özellik:

x ile y gibi iki reel sayı arasına n tane terim yerleştirilerek oluşturulan $n+2$ terimli aritmetik dizinin ortak fakı

$d = \dfrac{y - x}{n + 1}$ şeklindedir.

Örnek:

8 ile 32 arasına dokuz terim yerleştirilerek oluşturulan 11 terimli sonlu ve artan aritmetik bir dizinin baştan 6 terimi kaçtır?

Çözüm:

Verilenlere göre,

$$a_1 = 8 \ , \ a_{11} = 32 \ , \ d = \frac{a_{11} - a_1}{11 - 1} = \frac{32 - 8}{10} = \frac{12}{5}$$

$$a_n = a_p + (n - p).d \Rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1).\frac{12}{5} = 8 + 12 = 20$$

Özellik:

Bir aritmetik dizide, her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik ortalamasına eşittir.

$$a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2} \quad (p > k)$$

Örnek:

Bir aritmetik dizide; 12. terim m, 20. terim n dir. Buna göre bu dizinin 16. terimini bulalım.

Çözüm:

$16 - 12 = 20 - 16$ olduğundan 16. terim, 12. terim ile 20. terime eşit uzaklıktadır. Buna göre,

$$a_{16} = \frac{a_{12} + a_{20}}{2} = \frac{m + n}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere, $\dfrac{7.a_{13}}{a_{19} + a_7}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$19 - 13 = 13 - 7$ olduğundan 13. terim, 7. terim ile 19. terime eşit uzaklıktadır. Buna göre,

$$a_{13} = \frac{a_{19} + a_7}{2} \Rightarrow a_{19} + a_7 = 2.a_{13} \text{ tür.}$$

Buna göre,

$$\frac{7.a_{13}}{a_{19} + a_7} = \frac{7.a_{13}}{2.a_{13}} = \frac{7}{2} \text{ dir.}$$

Özellik:

Sonlu bir aritmetik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = 2.a_1 + (n - 1).d$$

Bu eşitlikte $a_n = a_1 + (n - 1).d$ olduğundan

$$a_n + a_1 = a_1 + (n - 1).d + a_1 = 2.a_1 + (n - 1).d \text{ yazıldı.}$$

Örnek:

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere, $a_{12} = 12$ ve $a_{18} = 30$ olduğuna göre $a_7 + a_{23}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

En son verdiğimiz özelliğe göre, $a_7 + a_{23} = a_{12} + a_{18}$ olur. Buna göre,

$$a_7 + a_{23} = a_{12} + a_{18} = 12 + 30 = 42 \text{ olur.}$$

Özellik:

Bir aritmetik dizinin ilk n terim toplamı S_n olsun. Buna göre,

$$S_n = \frac{n}{2}.\left[2.a_1 + (n - 1).d\right] \text{ veya } S_n = \frac{n}{2}.\left[a_1 + a_n\right] \text{ dir.}$$

Örnek:

İlk terimi -8 ve ortak farkı 5 olan aritmetik dizinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

Çözüm:

$a_1 = -8$ ve $d = 5$ olmak üzere,

$$S_n = \frac{n}{2}.\left[2.a_1 + (n-1).d\right]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}.\left[2.(-8) + (20-1).5\right] = 10.79 = 790 \text{ olur.}$$

Örnek:

(a_n) sonlu bir aritmetik dizi olmak üzere bu dizide ilk terimi 9 ve son terim 85 tir. Terimleri toplamı 1128 olan bu dizinin terim sayısını bulalım.

Çözüm:

(a_n) dizisinin terim sayısı n olsun.

$a_1 = 9$, $a_n = 85$ ve $S_n = 1128$ olmak üzere,

$$S_n = \frac{n}{2}.\left[a_1 + a_n\right] \Rightarrow 1128 = \frac{n}{2}.(9+85)$$

$$\Rightarrow n = \frac{2256}{94} = 24 \text{ olur.}$$

Örnek:

(a_n) bir aritmetik dizidir. Bu dizinin ilk n terim toplamı

$S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$ olduğuna göre bu dizinin genel terimini bulunuz

Çözüm:

(a_n) dizinin ilk n terim toplamından (n-1) terimi toplamı çıkarılırsa sonuç n. terime eşit olacaktır. Buna göre,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n^2 + n}{2} - \frac{3.(n-1)^2 + (n-1)}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + n}{2} - \frac{3.n^2 - 5n + 2}{2}$$

$$= \frac{6n-2}{2} = 3n - 1 \text{ olur.}$$

Örnek:

(a_n) bir aritmetik dizidir. Bu dizinin ilk n terim toplamı S_n olmak üzere,

$S_8 - S_7 = 36$ ve $S_{12} - S_{11} = 60$ olduğuna göre bu dizinin ortak farkı kaçtır?

Çözüm:

$S_8 - S_7 = 36 \Rightarrow a_8 = 36$ olur.

$S_{12} - S_{11} = 60 \Rightarrow a_{12} = 60$ olur.

$p < n$ olmak üzere $d = \frac{a_n - a_p}{n-p}$ dir.

$$d = \frac{a_{12} - a_8}{12-8} = \frac{60-36}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ olur.}$$

Örnek:

$(a_n) = (8,11,14,...,3n+5,...)$

$(b_n) = (-7,-3,1,...,4n-11,...)$ dizileri veriliyor. (a_n) dizisinin il n terim toplamı, (b_n) dizisinin ilk n terim toplamına eşit olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm:

(a_n) dizisinde $a_1 = 8$ ve $d = 3$ tür.

(b_n) dizisinde $b_1 = -7$ ve $d = 4$ tür.

Bu iki dizinin ilk n terim toplamları eşit olduğuna göre,

$$\frac{n}{2}.\left[2.a_1+(n-1).d\right]=\frac{n}{2}.\left[2.b_1+(n-1).d\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}.\left[2.8+(n-1).3\right]=\frac{n}{2}.\left[2.(-7)+(n-1).4\right]$$

$$\Rightarrow 16+3n-3=-14+4n-4$$

$\Rightarrow n=31$ olur.

Örnek:

9 ile bölündüğünde 4 kalanını veren üç basamaklı doğal sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm:

9 ile bölündüğünde 4 kalanını veren üç basamaklı doğal sayılar,

103,112,121,130,139,148,…,994 tür.

Dikkat edilirse ardışık terimler arasındaki fark sabit olup 9 dur. Buna göre, bu sayıları; ilk terimi 103, son terimi 994 ve ortak farkı 9 olan n terimli sonlu bir aritmetik dizi şeklinde düşünebiliriz.

$a_n=a_1+(n-1).d$ olduğundan,

$994=103+(n-1).9\Rightarrow n=\dfrac{994-103}{9}+1=100$ olur.

Bu durumda 9 ile bölündüğünde 4 kalanını veren üç basamaklı doğal sayıların sayısı 100 dür.

Bunların toplamı da,

$S_n=\dfrac{n}{2}.\left[a_1+a_n\right]\Rightarrow S_{100}=\dfrac{100}{2}.(103+994)=54850$ dir.

Örnek:

(a_n) bir aritmetik dizidir. Bu dizinin ilk n terim toplamı S_n olmak üzere,

$S_{22}-S_{17}=45$ olduğuna göre a_{20} kaçtır?

Çözüm:

$$a_{20}=\frac{a_{21}+a_{19}}{2}\Rightarrow a_{21}+a_{22}=2.a_{20}$$

$$a_{20}=\frac{a_{22}+a_{18}}{2}\Rightarrow a_{22}+a_{18}=2.a_{20}$$

$$S_{22}-S_{17}=45\Rightarrow a_{18}+a_{19}+a_{20}+a_{21}+a_{22}=45$$

$\Rightarrow 5.a_{20}=45\Rightarrow a_{20}=9$ bulunur.

2. Geometrik Dizi

A. Tanım

Ardışık her iki terimi arasındaki oran eşit olan diziye geometrik dizi denir.

Yani her n pozitif tam sayısı için,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=...=\frac{a_{n+1}}{a_n}=...=r \qquad (b_n\neq 0)$$

olacak şekilde bir $r\in R-\{0\}$ varsa (a_n) dizisine geometrik dizi; r sayısına da geometrik dizinin ortak çarpanı denir.

Örnek:

$(a_n)=(3^{n-1})$ dizisinin geometrik dizi olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{(n+1)-1}}{3^{n-1}}=\frac{3^n}{3^{n-1}}=3$$

olduğuna göre, (a_n) dizisi geometrik dizi olup dizinin ortak çarpanı 3 tür.

Örnek:

$(b_n) = (\frac{n!}{2})$ dizisinin geometrik dizi olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2}}{\frac{n!}{2}} = \frac{(n+1).n!}{n!} = n+1 \text{ olur.}$$

$n+1$ ifadesi sabit bir sayı belirtmediğinden, (b_n) dizisi geometrik dizi değildir.

B. Genel Terim

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimini a_1 ve r cinsinden bulalım:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1.r$

$a_3 = a_2.r = (a_1.r).r = a_1.r^2$

$a_4 = a_3.r = (a_1.r^2).r = a_1.r^3$

$a_5 = a_4.r = (a_1.r^3).r = a_1.r^4$

…

$a_n = a_1.r^{n-1}$

Örnek:

İlk terimi 0,2 ve ortak çarpanı 5 olan geometrik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm:

$a_1 = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ ve $r = 5$ olduğuna göre,

$a_n = a_1.r^{n-1} = \frac{1}{5}.5^{n-1} = 5^{n-2}$ olur.

Örnek:

İlk terimi 4 ve ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 25. terimini bulalım.

Çözüm:

$a_1 = 4$ ve $r = 2$ olduğuna göre,

$a_n = a_1.r^{n-1} \Rightarrow a_{25} = 4.2^{25-1} = 2^2.2^{24} = 2^{26}$ olur.

Örnek:

İlk terimi $(x+2)$, ikinci terimi $(2x+1)$ ve üçüncü terimi $(4x-2)$ olan geometrik dizinin ortak çarpanını bulalım.

Çözüm:

$a_1 = x+2$, $a_2 = 2x+1$, $a_3 = 4x-2$ olmak üzere, geometrik dizide ardışık terimler arasındaki oran sabittir.

Buna göre,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} = \frac{4x-2}{2x+1}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x - 2x - 4 = 4x^2 + 2x + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ olur.}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2x+1}{x+2} = \frac{2.\frac{5}{2}+1}{\frac{5}{2}+2} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

C. Geometrik Dizinin Özellikleri

$p < n$ olmak üzere, bir geometrik dizinin genel terimi,

$a_n = a_p . r^{n-p}$ ve ortak farkı $r = \sqrt[n-p]{\dfrac{a_n}{a_p}}$ dir.

$r > 0$ ise dizi artandır.

$r = 0$ ise dizi sabittir.

$r < 0$ ise dizi azalandır

Örnek:

Bir geometrik dizide; 2.terim 4, 8.terim 32 dir. Buna göre, bu geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm:

$$r = \sqrt[n-p]{\frac{a_n}{a_p}} \Rightarrow r = \sqrt[8-2]{\frac{a_8}{a_2}} = \sqrt[6]{\frac{32}{4}} = \sqrt{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

Bir geometrik dizide; 5.terim 6, 8.terim 24 tür. Buna göre, bu geometrik dizinin 11.terimini bulalım.

Çözüm:

$$r = \sqrt[8-5]{\frac{a_8}{a_5}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{24}{6}} = \sqrt[3]{4} \text{ tür.}$$

$$a_n = a_p . r^{n-p} \Rightarrow a_{11} = a_8 . r^{11-8}$$

$$\Rightarrow a_{11} = 24.(\sqrt[3]{4}.r)^3 = 24.4 = 96 \text{ olur.}$$

Örnek:

(a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir.

$a_8 - a_5 = 72$ ve $a_{10} - a_7 = 9$ olduğuna göre dizinin ortak çarpanını bulalım.

Çözüm:

$a_8 - a_5 = 72$ ve $a_{10} - a_7 = 9$ eşitliklerini taraf tarafa oranlayalım,

$$\frac{a_8 - a_5}{a_{10} - a_7} = \frac{72}{9} \Rightarrow \frac{a_5.r^{8-5} - a_5}{a_5.r^{10-5} - a_5.r^{7-5}} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{a_5.r^3 - a_5}{a_5.r^5 - a_5.r^2} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{a_5.(r^3 - 1)}{a_5.r^2.(r^3 - 1)} = 8$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ olur.}$$

II.Yol:

$$a_{10} - a_7 = 9 \Rightarrow a_8.r^{10-8} - a_5.r^{7-5} = 9$$

$$\Rightarrow r^2.(a_8 - a_5) = 9 \Rightarrow 72.r^2 = 9$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Özellik:

x ile y gibi iki reel sayı arasına n tane terim yerleştirilerek oluşturulan $n + 2$ terimli geometrik dizinin ortak çarpanı

$r = \sqrt[n+1]{\dfrac{y}{x}}$ şeklindedir.

Örnek:

6 ile 24 arasına, dokuz terim yerleştirilerek oluşturulan 11 terimli sonlu ve artan bir geometrik dizinin baştan 3. terimini bulalım.

Çözüm:

$a_1 = 6$ ve $a_{11} = 24$ olduğuna göre,

$$r = \sqrt[11-1]{\frac{a_{11}}{a_1}} = \sqrt[10]{\frac{24}{6}} = \sqrt[10]{4} = \sqrt[5]{2} \text{ olur.}$$

$$a_3 = a_1.r^{3-1} = 6.(\sqrt[5]{2})^2 = 6.\sqrt[5]{4} \text{ olur.}$$

Özellik:

Bir geometrik dizide, her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin geometrik ortalamasına eşittir.

Diğer bir deyişle, bir geometrik dizide, herhangi bir terimin karesi kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin çarpımına eşittir.

$$(a_p)^2 = a_{p-k}.a_{p+k} \text{ dır.} \quad (p > k)$$

Örnek:

Pozitif terimli bir geometrik dizide; 6.terim 3, 10. terim 12 dir. Buna göre, bu dizinin 8. terimi kaçtır?

Çözüm:

$10 - 8 = 8 - 6$ olduğundan 8. terim 10. terim ile 6. terime eşit uzaklıktadır. Buna göre,

$$(a_8)^2 = a_{10}.a_6 \Rightarrow a_8 = \sqrt{36} = 6 \text{ olur.}$$

Örnek:

Pozitif terimli bir geometrik dizinin ardışık beş terimi sırasıyla $\frac{3}{2}$, a, b, c, $\frac{8}{27}$ olduğuna göre a.b.c kaçtır?

Çözüm:

Bir geometrik dizide, herhangi bir terimin karesi kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin çarpımına eşit olacağına göre,

$$b^2 = \frac{3}{2}.\frac{8}{27} \Rightarrow b^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow b = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

$$b^2 = a.c \Rightarrow a.c = \frac{4}{9} \text{ olur.}$$

$$a.b.c = \frac{2}{3}.\frac{4}{9} = \frac{8}{27} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Bir geometrik dizide; 9.terim 8 dir. $a_{12}.a_6 = 3x + 1$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$12 - 9 = 9 - 6$ olduğundan, 9. terim 12. terim ile 6. terime eşit uzaklıktadır.
Bir geometrik dizide, her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin geometrik ortalamasına eşittir.

Buna göre,

$$(a_9)^2 = a_{12}.a_6 \Rightarrow 3x + 1 = 64 \Rightarrow x = 21 \text{ olur.}$$

Özellik:

Sonlu bir geometrik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir.

$$a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = a_3.a_{n-2} = a_4.a_{n-3} = \ldots$$

Örnek:

Bir geometrik dizinin ardışık altı terimi sırasıyla a, b, 6, $\frac{8}{3}$, c, d olduğuna göre a.b.c.d kaçtır?

Çözüm:

Bu sayıları; ilk terim a, son terim d olan 6 terimli sonlu bir geometrik dizi şeklinde düşünebiliriz. En son verdiğimiz özelliğe göre,

$$a_1.a_6 = a_2.a_5 = a_3.a_4 \Rightarrow a.d = b.c = 6.\frac{8}{3} = 16$$

$$\Rightarrow a.b.c.d = (a.d).(b.c)$$

$$\Rightarrow a.b.c.d = 16.16 = 256 \text{ olur.}$$

Özellik:

Bir geometrik dizide ilk n terim çarpımı,

$$P_n = a_1.a_2.a_3.a_4....a_n = \sqrt{(a_1.a_n)^n} \text{ dir.}$$

Örnek:

(a_n) bir geometrik dizidir

$(a_n) = (12,6,3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},...)$ olduğuna göre (a_n) dizisinin ilk 8 teriminin çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = 12 \text{ ve } r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$a_8 = a_1.r^7 = 12.\frac{1}{128} = \frac{3}{32} \text{ dir.}$$

$$P_n = \sqrt{(a_1.a_n)^n} \Rightarrow P_8 = \sqrt{(a_1.a_8)^8} = (a_1.a_8)^4$$

$$\Rightarrow P_8 = (12.\frac{3}{32})^4 = \frac{3^8}{2^{12}} \text{ olur.}$$

Örnek:

(a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir. Bu dizide ilk n terim çarpımı P_n olmak üzere ,

$\frac{P_8}{P_7} = 32$ ve $\frac{P_6}{P_5} = 16$ olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{P_8}{P_7} = 32 \Rightarrow \frac{a_8.a_7.a_6.....a_1}{a_7.a_6.....a_1} = 32 \Rightarrow a_8 = 32 \text{ olur.}$$

$$\frac{P_6}{P_5} = 16 \Rightarrow \frac{a_6.a_5.a_4.....a_1}{a_5.a_4.....a_1} = 16 \Rightarrow a_6 = 16 \text{ olur.}$$

$$r = \sqrt[n-p]{\frac{a_n}{a_p}} \Rightarrow r = \sqrt[8-6]{\frac{a_8}{a_6}} = \sqrt[2]{\frac{32}{16}} = \sqrt{2} \text{ olur.}$$

Özellik:

Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı S_n olsun.

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} \text{ dir.}$$

Örnek:

İlk terimi 4 ve ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan geometrik dizinin ilk beş teriminin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$a_1 = 4$ ve $r = \frac{1}{2}$ olduğuna göre,

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = 4.\frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}} = 4.\frac{31}{16} = \frac{31}{4} \text{ olur.}$$

Örnek:

Artan bir geometrik dizide, ilk 8 terim toplamının ilk 4 terim toplamına oranı 17 olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanını bulalım.

Çözüm:

$$\frac{S_8}{S_4} = 17 \Rightarrow \frac{a_1.\frac{1-r^8}{1-r}}{a_1\frac{1-r^4}{1-r}} = 17 \Rightarrow \frac{1-r^8}{1-r^4} = 17$$

$$\Rightarrow \frac{(1+r^4).(1-r^4)}{1-r^4} = 17 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = 2 \text{ olur.}$$

Örnek:

Ortak çarpanı 2 olan sonlu bir geometrik dizinin terimleri toplamı 765 tir.
Bu dizinin son terimi 384 olduğuna göre, ilk terimi kaçtır?

Çözüm:

Verilen koşulu sağlayan dizi (a_n) olsun. (a_n) dizisinde ilk terim a_1, son terim a_n ve terimler toplamı S_n olsun.

$a_n = a_1.r^{n-1}$ dir.

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_1.r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_1.r^{n-1}.r}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_n.r}{1-r} \text{ dir.}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n.r}{1-r} \Rightarrow 765 = \frac{a_1 - 384.2}{1-2}$$

$$\Rightarrow a_1 = -765 + 768 = 3 \text{ olur.}$$

Uyarı

x, y, z sayıları hem aritmetik hem de geometrik dizi oluşturuyorsa $x = y = z$ dir.

Hem aritmetik hem de geometrik olan dizi, sabit dizidir.

Sabit dizi farkı 0 (sıfır) olan aritmetik bir dizi ve ortak çarpanı 1 olan geometrik bir dizidir.

Örnek:

a ile b sıfırdan farklı birer reel sayıdır.

$(4.a.b,\ a+b,\ a^2.b)$ dizisi hem aritmetik hem de geometrik dizi özelliğini sağladığına göre, b kaçtır?

Çözüm:

Hem aritmetik hem de geometrik olan dizi, sabit dizidir.
Sabit dizinin terimleri birbirine eşittir.

Buna göre, $4.a.b = a + b = a^2.b$ dir.

$4.a.b = a^2.b \Rightarrow a = 4$ tür.

$a = 4$ ve $4.a.b = a + b$ ise $4.4.b = 4 + b \Rightarrow b = \frac{4}{15}$ olur.

Örnek:

$(m, \frac{n}{2} - 1, 2)$ dizisi geometrik dizi, $(m, n, 12)$ dizisi aritmetik dizi belirttiğine göre $m + n$ kaçtır?

Çözüm:

$(m, n, 12)$ dizisi aritmetik dizi olduğuna göre,

$$\frac{m+12}{2} = n \Rightarrow m = 2n - 12 \text{ dir.}$$

$(m, \frac{n}{2} - 1, 2)$ dizisi geometrik dizi olduğuna göre,

$$(\frac{n}{2} - 1)^2 = 2m \Rightarrow \frac{n^2}{4} - n + 1 = 2m$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{4} - n + 1 = 2.(2n - 12)$$

$$\Rightarrow n^2 - 20n + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (n-10)^2 = 0 \Rightarrow n = 10 \text{ olur.}$$

$m = 2n - 12 \Rightarrow m = 2.10 - 12 = 20 - 12 = 8$ olur.

$m + n = 8 + 10 = 18$ bulunur.

Çözümlü Sorular

1. Yaşları toplamı 80 olan beş kardeşin yaşları bir aritmetik dizinin ardışık beş terimidir. En büyük kardeş 20 yaşında olduğuna göre, en küçük kardeşin yaşı kaçtır?

Çözüm:

Bu kardeşlerin yaşları ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin ardışık beş terimine karşılık gelsin. Buna göre, kardeşlerin yaşları en küçükten en büyüğe doğru;

$x,\ x+d,\ x+2d,\ x+3d,\ x+4d$ olur.

En büyük kardeşin yaşı 20 olduğuna göre,

$x+4d=20$ dir.

Kardeşlerin yaşları toplamı 80 olduğuna göre,

$x+(x+d)+(x+2d)+(x+3d)+(x+4d)=80$

$\Rightarrow 5x+10d=80 \Rightarrow x+2d=16$

$x+4d=20$ ve $x+2d=16$ eşitliklerinin çözümünden

$x=12$ bulunur.

2. $(a_n)=(2x+3,\ x+14,\ 4x+5,...)$ dizisi bir aritmetik dizidir. Buna göre, bu dizinin 8. terimi kaçtır?

Çözüm:

$a_1=2x+3$, $a_2=x+14$, $a_3=4x+5$ olup bir aritmetik dizide, her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik ortalamasına eşittir.

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2} \Rightarrow x+14=\frac{2x+3+4x+5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x+28=6x+8 \Rightarrow x=5 \text{ tir.}$$

Buna göre $a_1=13$, $a_2=19$, $a_3=25$ olup dizinin ortak farkı, $d=a_2-a_1=19-13=6$ dır.

$a_n=a_1+(n-1).d \Rightarrow a_8=13+7.6=55$ olur

3. (a_n) dizisi bir aritmetik dizidir. $a_3+a_4=26$ ve $a_{10}-a_7=15$ olduğuna göre a_1 kaçtır?

Çözüm:

$a_n=a_p+(n-p).d \Rightarrow a_{10}=a_7+(10-7).d$

$a_{10}-a_7=15 \Rightarrow a_7+3d-a_7=15 \Rightarrow d=5$ olur.

$a_3+a_4=26 \Rightarrow a_1+2.d+a_1+3.d=26$

$$\Rightarrow 2.a_1+5.d=26 \Rightarrow 2.a_1=26-25$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

4. Pozitif terimli bir aritmetik dizide ilk beş terim toplamı 50 dir. 2. terim ile 4. terim çarpımı 64 olduğuna göre 5. terim kaçtır?

Çözüm:

3. terime x dersek, ilk beş terim;

$x-2d,\ x-d,\ x,\ x+d,\ x+2d$ olur.

Bu terimlerin toplamı 50 ise,

$x-2d+x-d+x+x+d+x+2d=50 \Rightarrow x=10$ olur.

2. terim ile 4. terim çarpımı 64 olduğuna göre,

$(x-d).(x+d)=64 \Rightarrow x^2-d^2=64 \Rightarrow 10^2-d^2=64$

$$\Rightarrow d^2=36 \Rightarrow d=6 \text{ olur.}$$

$a_5=x+2d=10+2.6=22$ bulunur.

5. $(a_n)=(k+2m,\ 3k+m,\ 2k+3m,\ 42,...)$ dizisi bir aritmetik dizidir. Buna göre bu dizinin genel terimini bulunuz.

Çözüm:

$a_1 = k + 2m$, $a_2 = 3k + m$, $a_3 = 2k + 3m$ olsun. Bu aritmetik dizide, her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik ortalamasına eşittir.

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 3k + m = \frac{(k + 2m) + (2k + 3m)}{2}$$

$$\Rightarrow 6k + 2m = 3k + 5m \Rightarrow k = m \text{ dir.}$$

Buna göre, dizinin ilk üç terimi,

$a_1 = 3m$, $a_2 = 4m$, $a_3 = 5m$ olur. Bu durumda ortak fark m olacağından, dördüncü terim 6m olacaktır?

$a_4 = 6m = 42 \Rightarrow m = 7$ olur.

Buna göre dizinin genel terimi,

$$a_n = a_1 + (n-1).d \Rightarrow a_n = 3m + (n-1).m = 21 + (n-1).7$$

$$= 17n + 14 \text{ tür.}$$

6. Bir aritmetik dizide ilk terim –26 dır. İlk n terim toplamı S_n olmak üzere $S_{12} - S_8 = 24$ olduğuna göre, dizinin ortak farkı kaçtır?

Çözüm:

Dizinin ilk terimi $a_1 = -26$ ve ortak farkı d olsun.

Aritmetik dizinin ilk n terim toplamı,

$S_n = \frac{n}{2}.\left[2.a_1 + (n-1).d\right]$ olup,

$S_{12} - S_8 = 24$ olduğuna göre,

$$\frac{12}{2}.\left[2.(-26) + 11.d\right] - \frac{8}{2}.\left[2.(-26) + 7.d\right] = 24$$

$$6.(-52 + 11.d - 4.(-52 + 7.d) = 24 \Rightarrow 38.d = 128$$

$$\Rightarrow d = \frac{64}{19} \text{ olur.}$$

7. ilk terimi $\frac{5}{3}$, ikinci terimi $\frac{3}{2}$ olan bir aritmetik dizinin baştan kaç terim toplamı 0 (sıfır) olur?

Çözüm:

ilk terimi $\frac{5}{3}$, ikinci terimi $\frac{3}{2}$ olan aritmetik dizide ortak fark,

$d = a_2 - a_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{6}$ dır.

$S_n = \frac{n}{2}.\left[2.a_1 + (n-1).d\right]$ olduğundan,

$$0 = \frac{n}{2}.\left[2.\frac{5}{3} + (n-1).(-\frac{1}{6})\right] \Rightarrow 0 = \frac{n}{2}.\left[\frac{10}{3} + \frac{1-n}{6}\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{10}{3} - \frac{1-n}{6}$$

$$\Rightarrow n = 21 \text{ olur.}$$

8. $x^3 - 6x^2 + 2x + a = 0$ denkleminin kökleri, bir aritmetik dizi oluşturan tam sayılardır. Buna göre, a kaçtır?

Çözüm:

$a.x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin kökleri, x_1, x_2, x_3 ise,

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$ dır.

Kökler aritmetik dizi oluşturuyorsa, $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ dır

Buna göre, $x^3 - 6x^2 + 2x + a = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ise,

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \Rightarrow x_1 + x_3 = 2.x_2 \text{ dir.}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-6}{1} = 6 \text{ dır.}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow 2.x_2 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$ olur.

Bir denklemin kökü denklemi daima sağlayacağına göre,

$x^3 - 6x^2 + 2x + a = 0 \Rightarrow 2^3 - 6.2^2 + 2.2 + a = 0$

$\Rightarrow 8 - 24 + 4 + a = 0 \Rightarrow a = 12$ dir.

9. (a_n) dizisi bir aritmetik dizidir.

$a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} = 240$ olduğuna göre (a_n) dizisinin ilk 18 teriminin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} = 240$ olduğuna göre,

$a_1 + 4d + a_1 + 7d + a_1 + 10d + a_1 + 13d = 240$

$\Rightarrow 4a_1 + 34d = 240 \Rightarrow 2a_1 + 17d = 120$ olur.

$S_n = \frac{n}{2}.\left[2.a_1 + (n-1).d\right] \Rightarrow S_{18} = 9.\left[2.a_1 + 17.d\right]$

$\Rightarrow S_{18} = 9.120 = 1080$ olur.

10. (a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir. $a_1 = 3$ ve

$\frac{a_4}{a_2} = 16$ olduğuna göre, bu dizinin 5. terimi kaçtır?

Çözüm:

Bir geometrik dizide $a_n = a_p.r^{n-p}$ ise,

$a_4 = a_2.r^{4-2} \Rightarrow a_4 = a_2.r^2$ dir.

$\frac{a_4}{a_2} = 16 \Rightarrow \frac{a_2.r^2}{a^2} = 16 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ tür.

$a_5 = a_1.r^{n-1} \Rightarrow a_5 = 3.4^4 = 768$ olur.

11. (a_n) dizisinde ilk terim 243 olmak üzere,

$4.a_n = 3.a_{n+1}$ bağıntısı olduğuna göre, bu dizinin ilk 8 teriminin çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$4.a_n = 3.a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{3}$ tür. Ardışık terimleri arasındaki oran sabit olduğu için verilen dizi geometriktir. Bu dizide ortak oran $r = \frac{4}{3}$ tür. Buna göre,

$a_8 = a_1.r^7 \Rightarrow a_8 = 243.(\frac{4}{3})^7 \Rightarrow a_8 = \frac{2^{14}}{9}$ olur.

Geometrik dizide ilk n terim çarpımı P_n olmak üzere,

$P_n = \sqrt{(a_1.a_n)^n} \Rightarrow P_8 = \sqrt{\left(243.\frac{2^{14}}{9}\right)^8} = 2^{56}.3^{12}$ dir.

12. (a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir.

$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} + ... = 40$ ve

$a_3 + a_5 + a_7 + ... + a_{2n+1} + ... = 24$ olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm:

$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} + ... = 40$

$a_3 + a_5 + a_7 + ... + a_{2n+1} + ... = 24$

$a_n = a_1.r^{n-1}$ olduğuna göre,

$a_1.r + a_1.r^3 + a_1.r^5 + ... + a_1.r^{2n-1} + ... = 40$ ve

$$a_1.r^2 + a_1.r^4 + a_1.r^6 + ... + a_1.r^{2n} + ... = 24$$

$$\Rightarrow r.\left(a_1.r + a_1.r^3 + a_1.r^5 + ... + a_1.r^{2n-1} + ...\right) = 24$$

$$\Rightarrow r.40 = 24 \Rightarrow r = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} \Rightarrow r = \frac{3}{5} \text{ olur.}$$

13. İlk terimi $\frac{1}{2}$ ve son terimi $\frac{8}{81}$ olan sonlu bir geometrik dizinin terimleri toplamı $\frac{211}{162}$ dir. Buna göre dizinin ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm:

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{8}{81}$ ve $S_n = \frac{211}{162}$ olmak üzere,

$$a_n = a_1.r^{n-1} \Rightarrow \frac{8}{81} = \frac{1}{2}.r^{n-1} \Rightarrow r^{n-1} = \frac{16}{81}$$

$$\Rightarrow r^n = \frac{16r}{81} \text{ olur.}$$

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow \frac{211}{162} = \frac{1}{2}.\frac{1-\frac{16r}{81}}{1-r} \Rightarrow \frac{422}{162} = \frac{81-16r}{81-81r}$$

$$\Rightarrow 211 = \frac{81-16r}{1-r} \Rightarrow r = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

14. (a_n) bir geometrik dizidir. (a_n) dizisinin 2. terimi 12, 8. terimi 324 tür. Buna göre, bu dizinin ilk altı terim toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$r^{p-k} = \frac{a_p}{a_k} \Rightarrow a_8 = a_2.r^6 \Rightarrow r^6 = \frac{324}{12} \Rightarrow r = \sqrt{3} \text{ tür.}$$

$$a_n = a_1.r^{n-1} \Rightarrow a_2 = a_1.r \Rightarrow 12 = a_1.\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 4\sqrt{3}$$

olur.

$$S_n = a_1.\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_6 = 4\sqrt{3}.\frac{1-(\sqrt{3})^6}{1-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_6 = 4\sqrt{3}.\frac{-26}{1-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_6 = 4\sqrt{3}.\frac{-26.(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3}).(1+\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow S_6 = 4\sqrt{3}.\frac{-26.(1+\sqrt{3})}{-2}$$

$$\Rightarrow S_6 = 156 + 52\sqrt{3}$$

15. $(a_n) = (2.9^n)$ geometrik dizisinin ilk n teriminin çarpımını bulunuz.

Çözüm:

$$a_n = 2.9^n \Rightarrow a_1 = 2.9^1 = 18 \text{ dir.}$$

$$P_n = a_1.a_2.a_3...a_n = \sqrt{(a_1.a_n)^n} = \sqrt{(18.2.9^n)^n}$$

$$P_n = \sqrt{(2^2.9^{n+1})^n} = 2^n.3^{n^2+n} \text{ olur.}$$

16. (a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir. $a_5 = a_3 + 36$ ve $a_3 + a_4 = 12$ olduğuna göre, dizinin ilk terimi kaçtır?

Çözüm:

$$a_5 = a_3 + 36 \Rightarrow a_5 - a_3 = 36 \Rightarrow a_1.r^4 - a_1.r^2 = 36$$

$$\Rightarrow a_1.r^2.(r^2-1) = 36$$

$$a_3 + a_4 = 12 \Rightarrow a_1.r^2 + a_1.r^3 = 12 \Rightarrow a_1.r^2(1+r) = 12$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{a_1.r^2.(r^2-1)}{a_1.r^2.(1+r)} = \frac{36}{12} \Rightarrow \frac{(1+r).(1-r)}{1+r} = 3 \Rightarrow r = 4 \text{ olur.}$$

$$a_1.r^2.(r^2-1) = 36 \Rightarrow a_1.4^2.(4^2-1) = 36$$

$$\Rightarrow a_1.16.15 = 36 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{20} \text{ olur.}$$

17. (a, b, c) dizisi üç terimden oluşan azalan bir geometrik dizidir. a, b ve c pozitif tam sayılarının aritmetik ortalaması 7, geometrik ortalaması 6 olduğuna göre, c kaçtır?

Çözüm:

a, b ve c pozitif tam sayılarının aritmetik ortalaması 7 olduğuna göre,

$$\frac{a+b+c}{3} = 7 \Rightarrow a+b+c = 21 \text{ olur.}$$

a, b ve c pozitif tam sayılarının geometrik ortalaması 6 olduğuna göre,

$$\sqrt[3]{a.b.c} = 6 \Rightarrow a.b.c = 216 \text{ olur.}$$

Dizi geometrik olduğuna göre, $b^2 = a.c$ olacağından,

$a.b.c = 216 \Rightarrow b^3 = 216 \Rightarrow b = 6$ bulunur.

$b = 6$ ve $a+b+c = 21 \Rightarrow a+c = 15$ tir.

$b = 6$ ve $a.b.c = 216 \Rightarrow a.c = 36$ dır.

Bu durumda a ile c den biri 3, diğeri 12 dir. (a, b, c) dizisi azalan dizi olduğundan $a = 12$ ve $c = 3$ tür.

18. (a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir. $\frac{a_5 + a_8}{a_5 + a_6} = 43$ olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm:

$a_n = a_1.r^{n-1}$ dir.

$\frac{a_5 + a_8}{a_5 + a_6} = 43$ ise,

$$\Rightarrow \frac{a_1.r^4 + a_1.r^7}{a_1.r^4 + a_1.r^5} = 43 \Rightarrow \frac{a_1.r^4.(1+r^3)}{a_1.r^4.(1+r)} = 43$$

$$\Rightarrow \frac{1+r^3}{1+r} = 43 \Rightarrow \frac{(1+r).(1-r+r^2)}{1+r} = 43$$

$$r^2 + r - 42 = 0 \Rightarrow (r-7).(r+6) = 0 \Rightarrow r = 7 \text{ dir.}$$

(Dizi pozitif terimli olduğundan $r = -6$ olamaz.)

19. (a_n) pozitif terimli bir geometrik dizidir.

$a_3 + a_5 = \frac{a_2 + a_4}{3}$ dir. (a_n) dizisinin 6. terimi 81 olduğuna göre, ilk terimi kaçtır?

Çözüm:

$$a_3 + a_5 = \frac{a_2 + a_4}{3} \Rightarrow a_1.r^2 + a_1.r^4 = \frac{a_1.r + a_1.r^3}{3}$$

$$\Rightarrow r.(a_1.r + a_1.r^3) = \frac{a_1.r + a_1.r^3}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

(a_n) dizisinin 6. terimi 81 olduğuna göre,

$$a_n = a_1.r^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1.r^5 \Rightarrow 81 = a_1.(\frac{1}{3})^5$$

$$\Rightarrow a_1 = 81.3^5 = 3^4.3^5 = 3^9 \text{ olur.}$$

Konu Bitimi.