DİZİLER

A. Tanım

Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan her fonksiyona dizi adı verilir.

$f : Z^+ \to R$, $f(n) = a_n$ fonksiyonunda,

$f(1) = a_1$

$f(2) = a_2$

$f(3) = a_3$

…

$f(n) = a_n$

olduğuna göre $f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n)\}$ şeklinde yazılabilir. f fonksiyonu (dizisi) genel olarak

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$$

biçiminde veya kısaca (a_n) biçiminde gösterilir.

a_1 , dizinin 1. terimi,

a_2 , dizinin 2. terimi,

a_3 , dizinin 3. terimi,

…

a_n , dizinin n. terimi (genel terimi) dir.

Uyarı

1. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) biçiminde gösterilir.
2. Genel terimi belirtilmeyen sayı grupları dizi meydana getirmezler.
3. Diziler değer kümesine göre adlandırılır. Değer kümesi; reel sayılar kümesi olan dizi reel sayı dizisi, karmaşık sayılar olan dizi karmaşık sayı dizisi,… adını alır.

Örnek:

$(a_n) = (n^2)$ dizisini inceleyelim:

Dizinin ilk terimi $a_1 = 1^2 = 1$ dir.

Dizinin ikinci terimi $a_2 = 2^2 = 4$ tür.

Dizinin üçüncü terimi $a_3 = 3^2 = 9$ dur.

…

Dizinin genel terimi $a_n = n^2$ dir.

Buna göre $(a_n) = (n^2) = (1, 4, 9, ..., n^2, ...)$ olur.

Örnek:

$(5, 6, 7, 8, ...)$ ifadesi bir dizi belirtmez.

Genel terim belli olmadığı için beşinci elemanının kaç olacağı belli değildir.

Örnek:

$a_n = 2n + 1$, $b_n = \sqrt{n}$, $c_n = \dfrac{n+1}{n+2}$,

$d_n = \log n$, $e_n = \dfrac{1}{n^2 - 3n}$

bağıntılarından hangisi bir reel sayı dizisinin genel terimi olamaz?

Çözüm:

Genel terimi belli olan bir bağıntının reel sayı dizisi olması için pozitif tamsayılar kümesinden reel sayılar kümesine tanımlı olması gerekir.

$a_n = 2n + 1$ bağıntısı bir reel sayı dizisidir.

Çünkü $\forall n \in Z^+$ için $2n + 1 \in R$ dir.

$b_n = \sqrt{n}$ bağıntısı bir reel sayı dizisidir.

Çünkü $\forall n \in Z^+$ için $\sqrt{n} \in R$ dir.

$c_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ bağıntısı bir reel sayı dizisidir.

Çünkü $\forall n \in Z^+$ için $\dfrac{n+1}{n+2} \in R$ dir. $-2 \notin Z^+$ olmadığından pozitif tamsayılar kümesinde ifadeyi tanımsız yapan değer yoktur.

$d_n = \log n$ bağıntısı bir reel sayı dizisidir.

Çünkü $\forall n \in Z^+$ için $\log n \in R$ dir.

$e_n = \dfrac{1}{n^2 - 3n}$ bağıntısı bir reel sayı dizisi değildir.

Çünkü $3 \in Z^+$ için ifade tanımsızdır.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ olan dizinin beşinci terimi kaçtır?

Çözüm:

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ ise,

$a_5 = \sum\limits_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ olur.

Örnek:

Genel terimi $c_n = 1! + 2! + 3! + ... + (n+1)!$ olan dizinin dördüncü terimi kaçtır?

Çözüm:

$c_n = 1! + 2! + 3! + ... + (n+1)!$ ise,

$c_4 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$

$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153$ tür.

Örnek:

Genel terimi $b_n = \dfrac{2n+13}{n+2}$ olan dizinin kaçıncı terimi 3 tür?

Çözüm:

Dizinin x. terimi 3 olsun.

Buna göre,

$\dfrac{2x+13}{x+2} = 3 \Rightarrow 3x + 6 = 2x + 13$

$\Rightarrow x = 7$ olur.

Örnek:

Genel terimi $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ olan dizinin sekizinci terimi kaçtır?

Çözüm:

$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ ise,

$a_8 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 8^2$

$= \dfrac{8.9.17}{6} = 204$ olur.

Örnek:

Bir (a_n) dizisinde $a_1 = 5$ ve $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre a_{11} kaçtır?

Çözüm:

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}$ ise,

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{2}$$

...

$$a_{11} - a_{10} = \frac{1}{2}$$

+

$$a_{11} - a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 10.\frac{1}{2}$$

$a_{11} - a_1 = 5 \Rightarrow a_{11} - 5 = 5 \Rightarrow a_{11} = 10$ olur.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 18}{n}$ olan dizinin kaç terimi tam sayıdır?

Çözüm:

$\dfrac{n^2 - 2n + 18}{n}$ kesrinin tam sayı değerleri (a_n) dizisinin tam sayı olan terimleridir.

$a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 18}{n} = n - 2 + \dfrac{18}{n}$ olduğuna göre, n in 18'i tam bölen değerleri için (a_n) dizisi tam sayı belirtir.

Buna göre, n yerine yazılabilecek pozitif tam sayılar, 1,2,3,6,9 ve 18 dir.

Yani dizinin 6 terimi (1.,2.,3.,6.,9. ve 18. terim) tam sayıdır.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \dfrac{5n - 13}{n + 1}$ olan dizinin kaç terimi 4 ten küçüktür?

Çözüm:

$a_n < 4$ koşulunu sağlayan kaç tane n pozitif tam sayısı varsa, dizinin o kadar terimi 4 ten küçüktür.

Buna göre,

$a_n < 4 \Rightarrow \dfrac{5n - 13}{n + 1} < 4 \Rightarrow 5n - 13 < 4n + 4 \Rightarrow n < 17$ dir.

Bu eşitsizliği sağlayan 16 pozitif tam sayı vardır. Buna göre, verilen dizinin 16 terimi 4 ten küçüktür.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \dfrac{n!.2^{n+1}}{3^n}$ olan dizide $\dfrac{a_{p+1}}{a_p} = 6$ olduğuna göre p kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = 6 \Rightarrow \frac{\dfrac{(p+1)!.2^{(p+1)+1}}{3^{(p+1)}}}{\dfrac{p!.2^{p+1}}{3^p}} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{(p+1)!.2^{p+2}}{3^{p+1}}.\frac{3^p}{p!.2^{p+1}} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{(p+1).2}{3} = 6 \Rightarrow p + 1 = 9 \Rightarrow p = 8 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Genel terimi $a_n = \dfrac{2n - 15}{3n + 1}$ olan dizinin kaç teriminin negatif olduğunu bulalım.

Çözüm:

$a_n < 0$ koşulunu sağlayan kaç tane n pozitif tam sayısı varsa, dizinin o kadar terimi negatiftir.

Buna göre,

$a_n < 0 \Rightarrow \dfrac{2n - 15}{3n + 1} < 0 \Rightarrow 2n - 15 < 0 \Rightarrow n < \dfrac{15}{2}$ dir.

Bu eşitsizliği sağlayan 7 pozitif tam sayı vardır. Dolayısıyla (a_n) dizisinin 7 terimi $a_n < 0$ koşulunu sağlar.

Yani (a_n) dizisinin 7 tane terimi negatiftir.

(Yukarıda verilen eşitsizliğin çözümünde $3n+1$ ifadesi, tüm n değerleri için pozitif olduğundan ihmal edilmiştir.)

Örnek:

Genel terimi $a_n = \dfrac{7}{2n+1}$ olan dizinin, kaç terimi $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ aralığında bulunur.

Çözüm:

$$\frac{1}{3} < a_n < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{7}{2n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < \frac{2n+1}{7} < 3$$

$$\Rightarrow 14 < 2n+1 < 21 \Rightarrow \frac{13}{2} < n < 10 \text{ olur.}$$

Bu durumda, n in alabileceği değerler; 7,8,9 dur. Buna göre (a_n) dizisinin 3 tane terimi $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ aralığında bulunur.

B. Sonlu Dizi

$k \in Z^+$ ve $A_k = \{1,2,3,...,k\}$ olsun.

Tanım kümesi A_k olan dizilere sonlu dizi denir.

Bu dizi, $\big(f(1), f(2), f(3),..., f(k)\big)$ şeklindedir.

Örnek:

$A_4 = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere $f : A_4 \to R$, $f(n) = n^2 - 1$ biçiminde tanımlanan $f(n)$ dizisi sonludur ve terim sayısı 4 tür.

$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$f(4) = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

Dizinin terimleri: 0,3,8,15 tir.

Buna göre,

$(n^2 - 1) = (0,3,8,15)$ olur.

C. Sabit Dizi

Bütün terimleri birbirine eşit olan diziye sabit dizi denir.

Örnek:

$(a_n) = (-3)$ dizisi sabit bir dizidir. Çünkü dizinin bütün terimleri -3 e eşittir.

$(a_n) = (-3,-3,-3,..., -3,...)$

Örnek:

$(a_n) = \left(\dfrac{5}{6}\right)$ dizisi sabit bir dizidir. Çünkü dizinin bütün terimleri $\dfrac{5}{6}$ ya eşittir.

$(a_n) = \left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{6},..., \dfrac{5}{6},...\right)$

Örnek:

$(a_n) = \big((-1)^n\big)$ dizisi sabit bir dizi değildir. Çünkü dizinin bütün terimleri birbirine eşit değildir.

$(a_n) = \big(-1, 1, -1, 1, -1,..., (-1)^n,...\big)$

Örnek:

Genel terimi $a_n = \dfrac{3n-k}{2n-k+1}$ olan dizinin sabit dizi olabilmesi için k kaç olmalıdır?

Çözüm:

İki polinomun birbirine bölümünden oluşan bir dizinin sabit dizi olabilmesi için pay ve paydadaki aynı dereceli terimlerin kat sayıları oranının birbirine eşit olması gerekir.

Buna göre $a_n = \dfrac{3n-k}{2n-k+1}$ dizisi sabit dizi ise,

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{-k}{-k+1}$ olmalıdır.

O halde,

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{-k}{-k+1} \Rightarrow -3k+3 = -2k \Rightarrow k = 3$ bulunur.

Örnek:

x ve y birer reel sayı olmak üzere, genel terimi $a_n = (x-1).n^2 + (y-2).n + x + y$ olan dizi bir sabit dizi belirttiğine göre a_6 kaçtır?

Çözüm:

(a_n) sabit dizisinde tüm a_n değerleri için sonuç aynı reel sayıya eşit olacağı için a_n genel teriminden n ye bağlı katsayılar sıfıra eşit olur. Bu durumda,

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir.

$y-2=0 \Rightarrow y=2$ dir.

Buna göre,

$a_n = (1-1).n^2 + (2-2).n + 1 + 2 = 3 \Rightarrow (a_n) = (3)$ tür.

$\Rightarrow (a_n) = (3,3,3,...,3,...)$ olup $a_6 = 3$ tür.

D. Eşit Diziler

Her n pozitif tam sayısı için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerine eşit diziler denir.

Örnek:

Genel terimleri $a_n = 2+4+6+...+2n$ ve $b_n = n.(n+1)$ olan dizileri inceleyelim.

$b_n = n.(n+1)$ ve $a_n = 2+4+6+...+2n = n.(n+1)$ olup her n pozitif tam sayısı için $a_n = b_n$ olduğundan $\left(a_n\right) = \left(b_n\right)$ olur.

Örnek:

Genel terimleri $a_n = (-1)^n$ ve $b_n = (-1)^{n+1}$ olan dizileri inceleyelim.

$(-1)^n = (-1,\ 1,-1,\ 1,...,(-1)^n,...)$

$(-1)^{n+1} = (1,-1,\ 1,-1,...,(-1)^{n+1},...)$ olup her n pozitif tamsayısı için $a_n \neq b_n$ olduğundan $\left(a_n\right) \neq \left(b_n\right)$ olur. Buna göre verilen iki dizi birbirine eşit değildir.

E. Dizilerle Yapılan İşlemler

(a_n) ve (b_n) birer dizi, c bir reel sayı olmak üzere,

1. $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$
2. $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$
3. $(a_n).(b_n) = (a_n.b_n)$
4. $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = (\dfrac{a_n}{b_n})$, $\left(b_n \neq 0\right)$
5. $c.(a_n).(b_n) = (c.a_n)$ dir.

Örnek:

$(a_n) = (2n - 3)$, $(b_n) = (\frac{n+1}{2})$ olduğuna göre $a_5 + b_5$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$a_n = 2n - 3 \Rightarrow a_5 = 2.5 - 3 = 7$ dır.

$b_n = \frac{n+1}{2} \Rightarrow b_5 = \frac{5+1}{2} = 3$ tür.

$a_5 + b_5 = 7 + 3 = 10$ olur.

Örnek:

$(a_n) = (n^3 - 1)$, $(b_n) = (n + 1)$ olduğuna göre

$(a_n) + (b_n) = (n^3 - 1) + \left(n + 1\right) = (n^3 + n)$ olur.

Örnek:

$(a_n) = (n^3 - 1)$, $(b_n) = (n + 1)$ olduğuna göre

$(a_n).(b_n) = (n^3 - 1).\left(n + 1\right) = (n^4 + n^3 - n - 1)$ olur.

Örnek:

$(a_n) = (n^3 - 1)$, $(b_n) = (n + 1)$ olduğuna göre

$3.a_2 - 2.b_3 = 2.(2^3 - 1) - 2.\left(3 + 1\right) = 3.7 - 2.4 = 13$ olur.

F. Monoton Diziler

Genel terimi a_n olan diziyi göz önüne alalım:

Eğer her $n \in Z^+$ için,

1. $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton artan dizidir.
2. $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton azalan dizidir.
3. $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton artmayan dizidir.
4. $a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton azalmayan dizidir.
5. $a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ sabit dizidir.

Örnek:

$(a_n) = (n^3 - 1) = (1^3 - 1, 2^3 - 1, 3^3 - 1, 4^3 - 1, ..., n^3 - 1, ...)$

$= (0, 7, 26, 63, ..., n^3 - 1, ...)$

dizisinde her $n \in Z^+$ için $a_n < a_{n+1}$ olduğundan (a_n) monoton artan dizidir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{2}{3n}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{6}, \frac{2}{9}, \frac{2}{12}, \frac{2}{15}, ..., \frac{2}{3n}, ...)$ dizisinde her $n \in Z^+$ için $a_n > a_{n+1}$ olduğundan (a_n) monoton azalan dizidir.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \begin{cases} n + 1, & n \leq 5 \\ 12 & , \ n > 5 \end{cases}$ olan diziyi inceleyelim:

$(a_n) = (2,3,4,5,6,12,12,12,...)$ olduğuna göre, dizinin 6. teriminden sonraki tüm terimleri 12 dir.

Her $n \in Z^+$ için, $a_n \leq a_{n+1}$ olduğundan (a_n) dizisi monoton azalmayan dizidir.

Örnek:

Genel terimi $a_n = \frac{3^n}{n!}$ olan diziyi inceleyelim:

$(a_n) = (\frac{3^n}{2!}) = (3, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \frac{81}{40}, ..., \frac{3^n}{2!}, ...)$ olduğuna göre,

(a_n) dizisi monoton dizi değildir.

Kural

$(a_n) = (\frac{an+b}{cn+d})$ dizisinin monotonluk durumu aşağıdaki şekilde incelenir.

1. Paydanın kökü (cn+d = 0 denkleminin kökü) 1 den küçük ise dizi monotondur.

   Bu durumda,

   a. $ad - bc > 0$ ise dizi monoton artandır.

   b. $ad - bc < 0$ ise dizi monoton azalandır.

   c. $ad - bc = 0$ ise dizi sabittir.

2. Paydanın kökü (cn+d = 0 denkleminin kökü) 1 den büyük ise dizi monoton değildir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{7n-5}{3n-8})$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyelim.

Çözüm:

$3n - 8 = 0 \Rightarrow n = \frac{8}{3} > 1$ dir.

Paydanın kökü 1 den büyük olduğundan dizi monoton değildir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{3n+7}{7n-4})$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyelim

Çözüm:

$7n - 4 = 0 \Rightarrow n = \frac{4}{7} < 1$ dir.

Paydanın kökü 1 den küçük olduğundan dizi monotondur.

$ad - bc = 3.(-4) - 7.7 = -61 < 0$ olduğundan dizi monoton azalandır.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{2n+k}{3n-2})$ dizisinin monoton artan olduğu bilindiğine göre, k nın alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$3n - 2 = 0 \Rightarrow n = \frac{2}{3} < 1$ olduğundan verilen dizi monotondur.

Verilen dizi monoton artan olduğu bilindiğine göre,

$ad - bc = 2.(-2) - k.3 > 0$ dır.

$\Rightarrow -4 - 3k > 0$

$\Rightarrow -4 > 3k \Rightarrow -\frac{4}{3} > k$

$\Rightarrow k < -\frac{4}{3}$ tür.

Buna göre k nın alabileceği en büyük tam sayı değeri -2 dir.

G. Alt Dizi

Bir (a_n) dizisi verilmiş olsun.

(k_n) artan bir pozitif tam sayı dizisi olmak üzere, (a_{k_n}) dizisine (a_n) dizisinin alt dizisi denir ve $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$(a_n) = (n+1)$ dizisinin bir alt dizisinin (a_{n^2}) dizisi olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$(n^2) = (1,4,9,16,...,n^2,...)$ dizisinde her n pozitif tamsayısı için $a_n < a_{n+1}$ olduğundan (n^2) artan bir pozitif tam sayı dizisidir.

Buna göre, (a_{n^2}) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir.

$(a_n) = (n+1) = (2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...,n+1,...)$

$(a_{n^2}) = (n^2+1) = (2,5,10,...)$

Görüldüğü gibi, alt dizinin bütün terimleri (a_n) dizisinin de terimleridir.

Örnek:

$(a_{n+2}) = (\frac{2n-3}{n+1})$ olduğuna göre (a_{2n+1}) dizisinin beşinci terimi kaçtır?

Çözüm:

(a_{2n+1}) dizisinin beşinci terimi $a_{2.5+1} = a_{11}$ dir.

$(a_{n+2}) = (\frac{2n-3}{n+1})$ dizisinin genel teriminde n yerine 9 yazılırsa;

$$a_{n+2} = \frac{2n-3}{n+1} \Rightarrow a_{9+2} = \frac{2.9-3}{9+1} \Rightarrow a_{11} = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

Örnek:

$(a_{2n-3}) = (\frac{n+2}{n+1})$ olduğuna göre (a_n) dizisini bulalım.

Çözüm:

$2n-3 = k \Rightarrow n = \frac{k+3}{2}$ olur.

$(a_{2n-3}) = (\frac{n+2}{n+1})$ ifadesinde n yerine $n = \frac{k+3}{2}$ yazılırsa,

$$\left(a_{2n-3}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \Rightarrow \left(a_{2.\frac{k+3}{2}-3}\right) = \left(\frac{\frac{k+3}{2}+2}{\frac{k+3}{2}+1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(a_{k+3-3}\right) = \left(\frac{\frac{k+3+4}{2}}{\frac{k+3+2}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(a_k\right) = \left(\frac{k+7}{2} \cdot \frac{2}{k+5}\right)$$

$$\Rightarrow \left(a_k\right) = \left(\frac{k+7}{k+5}\right) \text{ tir.}$$

Buna göre $\left(a_n\right) = \left(\frac{n+7}{n+5}\right)$ olur.

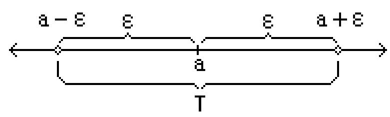
H. Dizilerin Yakınsaklığı ve Iraksaklığı

1. Komşuluk

a ve ε (epsilon) birer reel sayı ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ açık aralığına a nın ε (epsilon) komşuluğu denir.

Bu aralığı (kümeyi) T ile gösterirsek,

$T = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \,/\, |x - a| < \varepsilon,\ x \in R\}$ olur.



Örnek:

-3 sayısının 5 komşuluğu:

$T = (-3-5, -3+5) = (-8, 2)$ dir.

Örnek:

$\left(\frac{79}{40}, \frac{81}{40}\right)$ aralığı a sayısının ε komşuluğu olduğuna göre, ε kaçtır?

Çözüm:

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \left(\frac{79}{40}, \frac{81}{40}\right)$ ise,

$a-\varepsilon = \frac{79}{40}$ ve $a+\varepsilon = \frac{81}{40}$ tır.

Bu eşitliklerden $\varepsilon = \frac{1}{40}$ bulunur.

Örnek:

2 sayının $\varepsilon = \frac{1}{50}$ komşuluğunu bulunuz.

Çözüm:

$T = (2-\frac{1}{50}, 2+\frac{1}{50}) = (\frac{99}{50}, \frac{101}{50})$ dir.

Sonuç

a ve ε birer reel sayı ve $\varepsilon > 0$ ise a sayısının ε komşuluğu $T = (m, n)$ aralığı olmak üzere,

$a = \frac{m+n}{2}$ ve $\varepsilon = \frac{n-m}{2}$ dir.

2. Bir Dizinin Hemen Hemen Her Terimi

Bir dizinin sonlu sayıdaki terimi hariç, diğer terimlerine dizinin hemen hemen her terimi denir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ dizisini göz önüne alalım.

Dizinin ilk terimi hariç, diğer $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} ..., \frac{1}{n}, ...$ terimleri dizinin hemen hemen her terimidir.

Dizinin 5. terimi hariç diğer $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} ..., \frac{1}{n}, ...$ terimleri dizinin hemen hemen her terimidir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{2}{n+1}) = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, ..., \frac{2}{n+1}, ...)$ dizisini göz önüne alalım.

a. Dizinin ilk üç terimi dışında kalan

$\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} ..., \frac{2}{n+1}, ...$ terimleri dizinin hemen hemen her terimidir.

b. Dizinin $\frac{2}{99}$ dan büyük terimleri hemen hemen her terimidir.

Dizinin paydası çift sayı olan terimleri dizinin hemen hemen her terimi değildir. Çünkü, hariç tutulan terim sonlu sayıda değildir.

Örnek:

$(\frac{5n}{n+3})$ dizisinin 5 in $\frac{1}{10}$ komşuluğu dışında sonlu tane (147 tane) terimi olduğuna göre, dizinin hemen her terimi komşuluk içindedir.

Kural

1. (a_n) dizisinin, a nın ε komşuluğundaki terimleri

   $|(a_n) - a| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.

2. (a_n) dizisinin, a nın ε komşuluğu dışındaki terimleri

   $|(a_n) - a| \geq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.

Örnek:

(n^2-1) dizisinin 18 in 10 komşuluğunda kaç tane terimi vardır?

Çözüm:

18 in 10 komşuluğu $T=(18-10,18+10)=(8,28)$ dir.

$(n^2-1)=(0,3,8,15,24,35,48,...,n^2-1,...)$ olup (n^2-1) dizisinin 18 in 10 komşuluğundaki, yani $(8,28)$ aralığındaki terimleri a_4 ve a_5 olmak üzere 2 tanedir.

II.Yol

(n^2-1) dizisinin, 18 in 10 komşuluğundaki terimleri $\left|n^2-1-18\right|<10$ eşitsizliğini sağlar.

$$\left|n^2-1-18\right|<10 \Rightarrow \left|n^2-19\right|<10 \Rightarrow -10<n^2-19<10$$

$$\Rightarrow 9<n^2<29$$

Bu koşulu sağlayan n pozitif tam sayıları 4 ve 5 tir.

Örnek:

$(\frac{2n+3}{n+2})$ dizisinin $\left(\frac{19}{20},\frac{21}{20}\right)$ aralığında kaç terimi vardır?

Çözüm:

$\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)=\left(\frac{19}{20},\frac{21}{20}\right)$ ise $a=1$ ve $\varepsilon=\frac{1}{20}$ olur.

$$\left|\frac{2n+3}{n+2}-1\right|<\frac{1}{20} \Rightarrow \left|\frac{2n+3-n-2}{n+2}\right|<20$$

$\Rightarrow \left|\frac{n+1}{n+2}\right|<20$ olup $n\in Z^+$ ise,

$$\Rightarrow \left|\frac{n+1}{n+2}\right|<20 \Rightarrow \frac{n+1}{n+2}<20 \Rightarrow 20n+20<n+2$$

$\Rightarrow 19n<-18 \Rightarrow n<-\frac{18}{19}$ olur.

Bu koşulu sağlayan pozitif tam sayı yoktur. Yani, istenen koşulu sağlayan terim yoktur.

Örnek:

$(\frac{3n-1}{n+3})$ dizisinin 3 ün $\frac{1}{40}$ komşulu dışında kaç tane terimi vardır?

Çözüm:

(a_n) dizisinin, a nın ε komşuluğu dışındaki terimleri $\left|(a_n)-a\right|\geq\varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.

$\left|\frac{3n-1}{n+3}-3\right|\geq\frac{1}{40} \Rightarrow \left|\frac{-10}{n+3}\right|\geq\frac{1}{40}$ olup $n\in Z^+$ ise,

$\frac{10}{n+3}\geq\frac{1}{40} \Rightarrow n+3\leq 400 \Rightarrow n\leq 397$ olur.

Bu koşulu sağlayan 397 tane pozitif tam sayı vardır.

3. Yakınsak Diziler ve Iraksak Diziler

(a_n) bir reel sayı dizisi, a sabit bir reel sayı olsun.
Her ε pozitif reel sayısı için, (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi a nın ε komşuluğunda bulunuyorsa, (a_n) dizisi a ya yakınsıyor denir.

(a_n) dizisi a sayısına yakınsıyorsa; (a_n) dizisine yakınsak dizi denir.

Yakınsak olmayan dizilere ıraksak diziler denir.

Örnek:

$(a_n)=(\frac{2n}{2n+1})$ dizisinin 1 sayısına yakınsadığını gösterelim.

Çözüm:

$a = 1$ ve $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$ olsun.

$\left|\dfrac{2n}{2n+1} - 1\right| \geq \dfrac{1}{20} \Rightarrow \left|\dfrac{-1}{2n+1}\right| \geq \dfrac{1}{20}$ olup $n \in Z^{+}$ ise,

$\dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{20} \Rightarrow 2n+1 \leq 20 \Rightarrow n \leq \dfrac{19}{2}$ dir.

Bu koşulu sağlayan 9 tane n pozitif tam sayısı olduğuna göre (a_n) dizisinin, 1 in $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$ komşuluğu dışındaki terim sayısı 9 dur.

Dizinin 9. teriminden sonraki terimler;

$\dfrac{20}{21}, \dfrac{22}{23}, \dfrac{24}{25}, \dfrac{26}{27}, ..., \dfrac{2n}{2n+1}, ...$ olup bu terimler 1 in $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$ komşuluğunda bulunmaktadır.

Yani bu terimler sayılamayacak çokluktadır.

Bu durumda $(\dfrac{2n}{2n+1})$ dizisinin hemen hemen her terimi 1 in $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$ komşuluğunda, sonlu sayıda terimi ise 1 in $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$ komşuluğunun dışındadır.

ε sayısı ne kadar küçük seçilirse seçilsin, her $\varepsilon > 0$ için, $(\dfrac{2n}{2n+1})$ dizisinin hemen hemen her terimi 1 sayısının ε komşuluğundadır.

Buna göre $(\dfrac{2n}{2n+1})$ dizisi 1'e yakınsar. Yani bu dizi yakınsak dizidir.

Örnek:

$(\dfrac{5n}{n+3})$ dizisinin hemen hemen her teriminin 5'in $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ komşuluğunda olduğunu görmüştük. $\varepsilon > 0$ reel sayısı ne kadar küçük seçilirse seçilsin dizinin hemen hemen her teriminin komşuluk içinde kalacağı görülür.

O halde $(\dfrac{5n}{n+3})$ dizisi 5'e yakınsar. Diğer bir ifadeyle $(\dfrac{5n}{n+3})$ dizisi yakınsaktır.

Örnek:

$(a_n) = (\dfrac{2n+3}{3n+4})$ dizisinin $\dfrac{2}{3}$ sayısına yakınsadığını gösterelim.

Çözüm:

$$\left|\dfrac{2n+3}{3n+4} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{6n+9-6n-8}{9n+12}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{9n+12}\right| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{9n+12} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 9n+12 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \dfrac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon} \text{ olur.}$$

Demek ki (a_n) dizisinin $n_0 = \dfrac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}$ sayısından sonraki terimleri $\dfrac{2}{3}$ ün ε komşuluğundadır.

Örneğin $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ alınırsa,

$$n_0 = \dfrac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon} = \dfrac{1-12.\dfrac{1}{100}}{9.\dfrac{1}{100}} = \dfrac{\dfrac{88}{100}}{\dfrac{9}{100}} = \dfrac{88}{9} = 9,\overline{7}$$

olup verilen dizinin 10.teriminden sonraki ($9,\overline{7}$ nin tam kısmı) bütün terimleri $\dfrac{2}{3}$ ün $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ komşuluğundadır.

$(\dfrac{2n+3}{3n+4})$ dizisinin hemen hemen her terimi $\dfrac{2}{3}$ ün $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ komşuluğunda olduğundan bu dizi $\dfrac{2}{3}$ sayısına yakınsar. Dolayısıyla yakınsak dizidir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{n}{2n-7})$ dizisinin $\frac{1}{2}$ sayısına yakınsadığını gösterelim.

Çözüm:

$$\left|\frac{n}{2n-7} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n-2n+7}{4n-14}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{7}{4n-14}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{7}{4n-14} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 4n-14 > \frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{7+14\varepsilon}{4\varepsilon} \text{ olur.}$$

Demek ki (a_n) dizisinin $n_0 = \frac{7+14\varepsilon}{4\varepsilon}$ sayısından sonraki terimleri $\frac{1}{2}$ nin ε komşuluğundadır.

Örneğin $\varepsilon = \frac{1}{100}$ alınırsa,

$$n_0 = \frac{7+14\varepsilon}{4\varepsilon} = \frac{7+14.\frac{1}{100}}{4.\frac{1}{100}} = \frac{\frac{714}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{714}{4} = 178{,}5$$

olup verilen dizinin 179.teriminden sonraki (178,5 in tam kısmı) bütün terimleri $\frac{1}{2}$ nin $\varepsilon = \frac{1}{100}$ komşuluğundadır.

$(\frac{n}{2n-7})$ dizisinin hemen hemen her terimi $\frac{1}{2}$ nin $\varepsilon = \frac{1}{100}$ komşuluğunda olduğundan bu dizi $\frac{1}{2}$ sayısına yakınsar. Dolayısıyla yakınsak dizidir

K. Dizilerin Limiti

1. Limitin Tanımı

(a_n) bir reel sayı dizisi olsun. (a_n) dizisi sabit bir a reel sayısına yakınsıyorsa, a sayısına (a_n) dizisinin limiti denir.

$\lim(a_n) = a$ veya $(a_n) \to a$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{1}{n})$ olduğuna göre $\lim(a_n) = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$(a_n) = (\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ dizisinin 0'a (sıfıra) yakınsadığını göstermeliyiz. Bunun için dizinin hemen hemen her teriminin 0'ın ε komşuluğunda olduğunu göstermemiz gerekir.

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$ seçilirse,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \geq \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{1000} \Rightarrow n \leq 1000 \text{ olur.}$$

Buna göre (a_n) dizisinin, 0'ın $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ komşuluğu dışındaki terim sayısı 1000 dir.

Bu durumda (a_n) dizisinin, 0'ın $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ komşuluğundaki terim sayısı sayılamaz çokluktadır.

Buna göre her $\varepsilon > 0$ için (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi 0'ın ε komşuluğundadır.

Yani (a_n) dizisi 0'a yakınsıyor.

O halde $\lim(a_n) = 0$ ve $(a_n) \to 0$ dır.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{4n}{3n+1})$ olduğuna göre $\lim(a_n) = \frac{4}{3}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$(a_n) = (\frac{4n}{3n+1}) = (1, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \frac{16}{13}, \frac{5}{4}, ..., \frac{4n}{3n+1}, ...)$ dizisinin

$\frac{4}{3}$'e yakınsadığını göstermeliyiz. Bunun için dizinin hemen hemen her teriminin $\frac{4}{3}$'ün ε komşuluğunda olduğunu göstermemiz gerekir.

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$ seçilirse,

$$\left|\frac{4n}{3n+1} - \frac{4}{3}\right| \geq \frac{1}{200} \Rightarrow \left|\frac{12n-12n-4}{9n+3}\right| \geq \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-4}{9n+3}\right| \geq \frac{1}{200} \Rightarrow \frac{4}{9n+3} \geq \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{797}{9} = 88{,}5 \text{ olur.}$$

Buna göre (a_n) dizisinin, $\frac{4}{3}$'ün $\varepsilon = \frac{1}{200}$ komşuluğu dışındaki terim sayısı 88 dir.

Bu durumda (a_n) dizisinin, $\frac{4}{3}$'ün $\varepsilon = \frac{1}{200}$ komşuluğundaki terim sayısı sayılamaz çokluktadır.

Buna göre her $\varepsilon > 0$ için (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi $\frac{4}{3}$'ün ε komşuluğundadır.

Yani (a_n) dizisi $\frac{4}{3}$'e yakınsıyor.

O halde $\lim(a_n) = \frac{4}{3}$ ve $(a_n) \to \frac{4}{3}$ tür.

Kural

1. (a_n) dizisi bir a reel sayısına yakınsıyorsa, bu dizinin her (a_{k_n}) alt dizisi de a reel sayısına yakınsar.
   Bunun karşıtı doğru değildir. Yani en az bir (a_{k_n}) alt dizisi a reel sayısına yakınsayan bir (a_n) dizisi de a reel sayısına yakınsamak zorunda değildir.
2. Bir dizinin limiti varsa bir tanedir.
3. $c \in R$ olma üzere $(a_n) = (c)$ sabit dizisi için $\lim(a_n) = \lim(c) = c$ dir.
   (Her sabit dizi yakınsaktır.)

Örnek:

$(a_n) = (\frac{1}{n}) \to 0$

$(a_{3n}) = (\frac{1}{3n}) \to 0$

$(a_{5n+2}) = (\frac{1}{5n+2}) \to 0$

Görüldüğü gibi (a_n) dizisi 0 sayısına yakınsarken, bu dizinin alt dizileri olan (a_{3n}) ve (a_{5n+2}) de 0 sayısına yakınsar.

Örnek:

$(a_n) = (-3) \to 3$

$\lim(a_n) = \lim(-3) = -3$ tür.

(a_n) dizisi sabit dizi olduğundan, yakınsaktır. Sabit dizinin limiti, dizinin genel terimine eşittir

2. Limit ile İlgili Özellikler

(a_n) ve (b_n) birer dizi; a,b,c birer reel sayı olmak üzere, $\lim(a_n) = a$, $\lim(b_n) = b$ ise,

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = a + b$ dir.
2. $\lim(a_n - b_n) = \lim(a_n) - \lim(b_n) = a - b$ dir.
3. $\lim(a_n . b_n) = \lim(a_n) . \lim(b_n) = a.b$ dir.

4. $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{a}{b}$ dir. ($b_n \neq 0, b \neq 0$)

5. $\lim(c.a_n) = c.\lim(a_n) = c.a$ dır.

6. $\lim\left[(a_n)^n\right] = \left[\lim(a_n)\right]^n = a^n$ dir. ($n \in N$)

Örnek:

$(a_n) = (\frac{1}{n}) \Rightarrow \lim(a_n) = 0$ ve

$(b_n) = (\frac{2n+1}{n}) \Rightarrow \lim(b_n) = 2$ olduğuna göre,

$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = 0 + 2 = 2$ dir.

$\lim(a_n - b_n) = \lim(a_n) - \lim(b_n) = 0 - 2 = -2$ dir

$\lim(a_n.b_n) = \lim(a_n).\lim(b_n) = 0.2 = 0$ dır.

$\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{0}{2} = 0$ dır.

$\lim(\frac{a_n + 2}{b_n}) = \frac{\lim(a_n) + \lim(2)}{\lim(b_n)} = \frac{0+2}{2} = 1$ dir.

$\lim(3.b_n) = 3.\lim(b_n) = 3.2 = 6$ dır.

L. Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi

Reel sayılar kümesine, artı sonsuz $(+\infty)$ ve eksi sonsuz $(-\infty)$ kavramlarının katılmasıyla elde edilen $[-\infty,+\infty]$ aralığına (kümesine) genişletilmiş reel sayılar kümesi denir.

$(+\infty)$ ve eksi sonsuz $(-\infty)$ birer reel sayı değildir.

$K \in R$ olmak üzere $(K,+\infty)$ aralığına $(+\infty)$ un, K komşuluğu, $(-\infty,K)$ aralığına $(-\infty)$ un, K komşuluğu denir.

1. Iraksak Diziler

1. Her K reel sayısı için, (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi $(+\infty)$ un, K komşuluğunda ise (a_n) dizisinin limiti $(+\infty)$ dur veya (a_n) dizisi $(+\infty)$ 'a ıraksar denir.

2. Her K reel sayısı için, (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi $(-\infty)$ un, K komşuluğunda ise (a_n) dizisinin limiti $(-\infty)$ dur veya (a_n) dizisi $(-\infty)$ 'a ıraksar denir.

3. $(+\infty)$ 'a veya $(-\infty)$ 'a ıraksayan dizilere ıraksak diziler denir.

Örnek:

$(a_n) = (2n+1) = (3,5,7,9,...,2n+1,...)$ dizisinin limitini araştıralım.

Çözüm:

Her K reel sayısı için (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi $(+\infty)$ un, K komşuluğundadır. $(K,+\infty)$ aralığının dışında (a_n) dizisinin sonlu sayıda terimi bulunur.

Bunun için, (a_n) dizisinin limiti $(+\infty)$ olur.

$\lim(a_n) = +\infty$ dur.

Örnek:

$(a_n) = (-3n+4) = (1,-2,-5,-8,...,-3n+4,...)$ dizisinin limitini araştıralım.

Çözüm:

Her K reel sayısı için (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi $(-\infty)$ un, K komşuluğundadır. $(-\infty,K)$ aralığının dışında (a_n) dizisinin sonlu sayıda terimi bulunur.

Bunun için, (a_n) dizisinin limiti $(-\infty)$ olur.

$\lim(a_n) = -\infty$ dur.

a. Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesinde İşlemler

1. $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$

   $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$

2. $(+\infty).(+\infty) = (+\infty)$

   $(-\infty).(-\infty) = (+\infty)$

   $(+\infty).(-\infty) = (-\infty)$

3. $a + (+\infty) = (+\infty) \quad (a \in R)$

   $a + (-\infty) = (-\infty) \quad (a \in R)$

4. $a.(+\infty) = (+\infty) \quad (a \in R^+)$

   $a.(-\infty) = (-\infty) \quad (a \in R^+)$

   $a.(+\infty) = (-\infty) \quad (a \in R^-)$

   $a.(-\infty) = (+\infty) \quad (a \in R^-)$

5. $\dfrac{a}{+\infty} = 0 \quad (a \in R)$

   $\dfrac{a}{-\infty} = 0 \quad (a \in R)$

6. $(+\infty)^n = (+\infty) \quad (n \in Z^+)$

   $(-\infty)^{2n} = (+\infty) \quad (n \in Z^+)$

   $(-\infty)^{2n-1} = (-\infty) \quad (n \in Z^+)$

Uyarı

Dizilerin limitleri bulunurken elde edilen,

$(+\infty) + (-\infty)$, $0.(+\infty)$, $\dfrac{+\infty}{+\infty}, \dfrac{+\infty}{-\infty}, \dfrac{-\infty}{-\infty}, \dfrac{-\infty}{+\infty}$, $1^{+\infty}$

ifadeleri belirsizdir.

Örnek:

$(2n - 5)$ dizisinin limitini araştıralım.

Çözüm:

$\lim(2n - 5) = \lim(2n) - \lim(5) = 2.\lim(n) - \lim(5)$

$= 2.(+\infty) - 5 = +\infty - 5 = +\infty$

Örnek:

$(2 - n^2)$ dizisinin limitini araştıralım.

Çözüm:

$\lim(2 - n^2) = \lim(2) - \lim(n^2) = \lim(2) - 2.\lim(n)$

$= 2 - 2.(+\infty) = 2 - \infty = -\infty$

Kural

$P(n) = a_k.n^k + a_{k-1}.n^{k-1} + ... + a_2.n^2 + a_1.n + a_0$

$Q(n) = b_m.n^m + b_{m-1}.n^{m-1} + ... + b_2.n^2 + b_1.n + b_0$

iki polinom olmak üzere , $(c_n) = \left(\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right)$ dizisi verilsin.

a. $k = m$ ise $\lim(c_n) = \dfrac{a_k}{b_m}$ dir.

b. $k < m$ ise $\lim(c_n) = 0$ dır.

c. $k > m$ ise $\lim(c_n) = \begin{cases} +\infty, & a_k.b_k > 0 \\ -\infty, & a_k.b_k < 0 \end{cases}$ dır.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{8n+1}{2n+5})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim(\frac{8n+1}{2n+5}) = \lim(\frac{8n}{2n}) = \lim(4) = 4$ tür.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{2n^2+5}{n+4})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim(\frac{2n^2+5}{n+4}) = \lim(\frac{2n^2}{n}) = \lim(2n) = 2.\infty = \infty$ dur.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{3n^5+2n^2-1}{2-n^3})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(\frac{3n^5+2n^2-1}{2-n^3}) = \lim(\frac{3n^5}{-n^3}) = \lim(-3n^2)$$

$$= -3.\infty^2 = -\infty \text{ olur.}$$

Örnek:

$(a_n) = (\frac{3n+1}{2n^3+2n+5})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(\frac{3n+1}{2n^3+2n+5}) = \lim(\frac{3n}{2n^3}) = \lim(\frac{3}{2n^2})$$

$$= \frac{3}{2}.\lim(\frac{1}{n^2}) = \frac{3}{2}.0 = 0 \text{ olur.}$$

Örnek:

$(a_n) = (\frac{1+3+5+7+...+2n-1}{1+2+3+4+...+n})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1+3+5+7+...+2n-1}{1+2+3+4+...+n} = \frac{n^2}{\frac{n.(n+1)}{2}} = \frac{2n^2}{n^2+n}$$

$\lim(a_n) = \lim(\frac{2n^2}{n^2+n}) = \lim(\frac{2n^2}{n^2}) = \lim(2) = 2$ dir.

Kural

$(a_n) = (r^n)$ olsun.

a. $|r| < 1$ ise $\lim(a_n) = 0$ dır.

b. $r > 1$ ise $\lim(a_n) = +\infty$ dur.

c. $r = 1$ ise $\lim(a_n) = 1$ dir.

d. $r \le -1$ ise $\lim(a_n)$ yoktur.

Örnek:

$(a_n) = \left((\frac{2}{3})^n\right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ olduğuna göre,

$\lim\left((\frac{2}{3})^n\right) = 0$ olur.

Örnek:

$(a_n) = (3^{n+1})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$3 > 1$ olduğuna göre,

$\lim(3^{n+1}) = \lim(3)^n . \lim(3) = \infty.3 = \infty$

Örnek:

$(a_n) = ((-8)^n)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$-8 < -1$ olduğuna göre,

$(a_n) = ((-8)^n)$ dizisinin limiti yoktur.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{2+3^n-7^n}{5^n})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(\frac{2+3^n-7^n}{5^n}) = \lim(\frac{2}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}-\frac{7^n}{5^n})$$

$$= 2.\lim(\frac{1}{5})^n + \lim(\frac{3}{5})^n - \lim(\frac{7}{5})^n$$

$$= 2.0 + 0 - (+\infty) = -\infty$$

Örnek:

$(a_n) = (\frac{2^n+5^{n-2}}{4^{n+2}-5^{n+1}})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim\left(\frac{2^n+5^{n-2}}{4^{n+2}-5^{n+1}}\right) = \lim\left(\frac{2^n+\frac{5^n}{25}}{16.4^n-5.5^n}\right)$$

$$= \lim\left(\frac{5^n.(\frac{2^n}{5^n}+\frac{1}{25})}{5^n.(16.\frac{4^n}{5^n}-5)}\right)$$

$$= \frac{\lim(\frac{2}{5})^n + \lim(\frac{1}{25})}{16.\lim(\frac{4}{5})^n - \lim(5)}$$

$$= \frac{0+\frac{1}{25}}{16.0-5} = -\frac{1}{125}$$

Kural

(a_n) bir dizi ve c bir reel sayı olmak üzere $\lim(a_n) = a$ ise,

$\lim\left(c^{a_n}\right) = c^{\lim(a_n)} = c^a$ dır.

Örnek:

$(a_n) = (8^{\frac{1}{n}} + 6^{-n} + 1)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(8^{\frac{1}{n}} + 6^{-n} + 1) = \lim(8^{\frac{1}{n}}) + \lim(6^{-n}) + \lim(1)$$

$$= 8^{\lim\frac{1}{n}} + \lim(\frac{1}{6})^n + \lim(1)$$

$$= 8^0 + 0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2 \text{ olur.}$$

Kural

(a_n) bir dizi ve c bir reel sayı olmak üzere

$(a_n) = \left((1 + \frac{a}{bn + c})^{kn + p} \right)$ ise,

$\lim(a_n) = e^{\lim \frac{a.(kn + p)}{bn + c}} = e^{\frac{ak}{b}}$ dir.

Örnek:

$(a_n) = \left((1 + \frac{1}{n})^n \right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim \left((1 + \frac{1}{n})^n \right) = e^{\lim(\frac{1}{n}.n)} = e^1 = e$ dir.

Örnek:

$(a_n) = \left((1 - \frac{1}{n})^n \right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim \left((1 - \frac{1}{n})^n \right) = e^{\lim(-\frac{1}{n}.n)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ dir.

Örnek:

$(a_n) = \left((1 - \frac{2}{3n + 4})^{9n + 1} \right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim \left((1 - \frac{2}{3n + 4})^{9n + 1} \right) = e^{\lim \left((-\frac{2}{3n + 4}).(9n + 1) \right)}$

$= e^{\lim \left(-\frac{18n + 2}{3n + 4} \right)}$

$= e^{\lim \left(-\frac{18n}{3n} \right)}$

$= e^{\lim(-6)} = e^{-6}$

Uyarı

$(a_n) = (1^n)$ sabit dizisi ile $(a_n) = \left((1 + \frac{1}{n})^n \right)$ dizisi birbirine karıştırılmamalıdır.

1. $\lim(1^n) = 1$

2. $\lim \left((1 + \frac{1}{n})^n \right) = e$ dir.

Uyarı

Genel terimi rasyonel kesir olan dizilerin limitinin hesaplanmasında, aşağıdaki sıralama kullanılır.

$n^n > n! > 3^n > 2^n > n^3 > n^2 > n$

Örnek:

$(a_n) = \left(\frac{5n^3 + 3.n!}{2n! + n^2} \right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$n! > n^3$ ve $2n! > n^2$ olduğundan.

$\lim \left(\frac{5n^3 + 3.n!}{2n! + n^2} \right) = \lim(\frac{3n!}{2n!}) = \frac{3}{2}$ olur.

Örnek:

$(a_n) = \left(\frac{5.3^n - 2.n!}{n^n + 3.n} \right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$n! > 3^n$ ve $n^n > 3.n$ olduğundan.

$$\lim\left(\frac{5.3^n - 2.n!}{n^n + 3.n}\right) = \lim\left(\frac{-2.n!}{n^n}\right) \text{ dir.}$$

Bu son ifade de $n^n > n!$ olduğundan,

$$\lim\left(\frac{5.3^n - 2.n!}{n^n + 3.n}\right) = \lim\left(\frac{-2.n!}{n^n}\right) = 0 \text{ olur.}$$

Kural

$$\lim(a_n) = a \text{ ise, } \lim\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = a \text{ dır.}$$

Örnek:

$$(b_n) = \left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{n+2}{n+3}}{n}\right)$$ olduğuna göre (b_n)

dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$(a_n) = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{n+2}{n+3}$$ olmak üzere,

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \lim\left(\frac{n}{n}\right) = 1 \text{ dir.}$$

$$\lim(b_n) = \lim\left(\frac{a_n}{n}\right) = \lim(a_n) = 1 \text{ olur.}$$

Kural

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun. $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise

$\lim\sqrt[n]{a_n} = r$ dir.

Örnek:

$(a_n) = \left(\sqrt[n]{n+1}\right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

Verilen kuralı uygulayalım:

$b_n = n + 1$ olsun.

$$\lim\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1 \text{ olduğuna göre,}$$

$$\lim(a_n) = \lim\left(\sqrt[n]{n+1}\right) = 1 \text{ dir.}$$

3. Belirsizlik Durumları

a. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

Bu tür belirsizlikleri daha önce verdiğimiz kural yardımı ile sonuçlandırabiliriz.

Örnek:

$(a_n) = \left(\frac{8n+1}{2n+5}\right)$ ise $\lim(a_n) = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olur.

Verilen kurala göre,

$$\lim(a_n) = \lim\frac{8n}{2n} = \lim 4 = 4 \text{ olur.}$$

Örnek:

$(b_n) = \left(\frac{7n^3 - 3}{n+1}\right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim(b_n) = \lim\left(\dfrac{7n^3-3}{n+1}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olur. Verilen kurala göre,

$$\lim(b_n) = \lim\left(\frac{7n^3-3}{n+1}\right) = \lim\frac{7n^3}{n} = \lim(7n^2) = \infty \text{ olur.}$$

Örnek:

$(c_n) = \left(\dfrac{3^{n+1}+4}{5^n+7}\right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim(c_n) = \lim\left(\dfrac{3^{n+1}+4}{5^n+7}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olur.

Verilen kurala göre,

$$\lim\left(\frac{3^{n+1}+4}{5^n+7}\right) = \lim\frac{3^{n+1}}{5^n} = 3.\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n = 3.0 = 0$$

bulunur.

b. $0.\infty$ Belirsizliği

Bu tür belirsizlikler $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek limit bulunur.

Örnek:

$(a_n) = \left(\dfrac{2-n^2}{n^3+1}\right)$, $(b_n) = (1+2+3+...+n)$,

$(c_n) = (a_n).(b_n)$ olduğuna göre (c_n) dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(c_n) = \lim\left[(a_n).(b_n)\right]$$

$$= \lim\left[\left(\frac{2-n^2}{n^3+1}\right).(1+2+3+...+n)\right]$$

$$= \lim\left[\frac{2-n^2}{n^3+1}.\frac{n.(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim\left[\frac{-n^4-n^3+2n^2+2n}{2n^3+2}\right] = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim(c_n) = \lim\left[\frac{-n^4}{2n^3}\right] = \lim\left(-\frac{n}{2}\right) = -\infty \text{ olur.}$$

c. $\infty-\infty$ Belirsizliği

$\lim(b_n) = +\infty$ ve $\lim(c_n) = +\infty$ olmak üzere

$(a_n) = (b_n) - (c_n)$ ise

$\lim(a_n) = \lim(b_n) - \lim(c_n) = \infty - \infty$ olur.

Bu tip belirsizlikleri gidermek için cebirsel işlemler yapılır.

Kural

$\lim\sqrt{(b_n)} = +\infty$ ve $\lim\sqrt{(c_n)} = +\infty$ olsun.

$(a_n) = \sqrt{(b_n)} - \sqrt{(c_n)}$ ise $\lim(a_n) = \infty - \infty$ olur.

Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, (a_n) dizisinin payı ve paydası $\sqrt{(b_n)} + \sqrt{(c_n)}$ ifadesiyle genişletilir.

Örnek:

$(a_n) = (\sqrt{n^2+1} - n)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$\lim (a_n) = \lim(\sqrt{n^2+1} - n) = \infty - \infty$ belirsizliği

Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, (a_n) dizisinin payı ve paydası $\sqrt{n^2+1} + n$ ifadesiyle genişletilir.

$$\lim (a_n) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - n).(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2.(1+\frac{1}{n^2})} + n}$$

$$= \lim \frac{n^2+1-n^2}{n.\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim \frac{1}{n.\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right)} = \lim \frac{1}{n.\left(\sqrt{1}+1\right)} = 0$$

Örnek:

$(a_n) = (\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-1})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim (a_n) = \lim(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-1})$$

$$= \lim\left(\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})} + \sqrt{n^2(1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \lim\left(n.\sqrt{1+\frac{2}{n}} + n.\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \lim\left[n.\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\right] = +\infty$$

Uyarı

$(\sqrt{n^2+1} - n)$ dizisinde $\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-1})$ dizisinde belirsizlik sözkonusu değildir. Bu dizide $(+\infty) + (+\infty)$ durumu vardır.

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ olduğundan,

$(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-1})$ dizisi $+\infty$ a ıraksar.

Kural

$a > 0$ olmak üzere

$$\lim(\sqrt{an^2+bn+c}) = \lim\left(\sqrt{a}.(n+\frac{b}{2a})\right)$$ olur.

Örnek:

$(a_n) = (\sqrt{2n^2+3n-3} - \sqrt{2n^2-n+4})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(a_n) = \lim(\sqrt{2n^2+3n-3} - \sqrt{2n^2-n+4})$$

$$= \lim\left(\sqrt{2}.(n+\frac{3}{2.2}) - \sqrt{2}.(n-\frac{1}{2.2})\right)$$

$$= \lim\left(\sqrt{2}.(n-n+\frac{3}{4}+\frac{1}{4})\right)$$

$$= \lim\left(\sqrt{2}.\frac{4}{4}\right) = \lim(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$ olur.

Örnek:

$(a_n) = (\sqrt{4n^2+2n-3} - \sqrt{n^2-5})$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(a_n)=\lim(\sqrt{4n^2+2n-3}-\sqrt{n^2-5})$$

$$=\lim\left(\sqrt{4}.(n+\frac{2}{2.4})-\sqrt{1}.(n-\frac{0}{2.1})\right)$$

$$=\lim\left(2.(n+\frac{1}{4})-n\right)$$

$$=\lim\left(n+\frac{1}{2}\right)=\infty \text{ olur.}$$

Örnek:

$(a_n)=\left(\dfrac{\sqrt{4n^2+9}-\sqrt{n^2+3n}}{2n-5}\right)$ dizisinin limitini bulalım.

Çözüm:

$$\lim(a_n)=\lim\left(\frac{\sqrt{4n^2+9}-\sqrt{n^2+3n}}{2n-5}\right)$$

$$=\lim\left(\frac{\sqrt{4}.(n+\frac{0}{2.4})-\sqrt{1}.(n+\frac{3}{2.1})}{2n-5}\right)$$

$$=\lim\left(\frac{2n-n-\frac{3}{2})}{2n-5}\right)=\lim\left(\frac{n}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

M. Sınırlı Dizileri

1. Üst Sınır

Her $n\in N^+$ için $a_n\le M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (a_n) dizisine üstten sınırlıdır denir.

M reel sayısı da bu dizinin bir üst sınırı adını alır. M den büyük her reel sayı da (a_n) dizisinin bir üst sınırıdır.

Üstten sınırlı bir dizinin üst sınırlarından en küçük olanına dizinin en küçük üst sınırı (Eküs) denir.

(a_n) dizisinin en küçük üst sınırı $\text{Eküs}(a_n)$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$(a_n)=(8-n^2)=(7,4,-1,-8,-17,...,8-n^2,...)$ dizisi üstten sınırlıdır.

$\text{Eküs}(a_n)=7$ dir.

2. Alt Sınır

Her $n\in N^+$ için $m\le a_n$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (a_n) dizisine alttan sınırlıdır denir.

m reel sayısı da bu dizinin bir alt sınırı adını alır. m den küçük her reel sayı da (a_n) dizisinin bir alt sınırıdır.

Alttan sınırlı bir dizinin alt sınırlarından en büyük olanına dizinin en büyük alt sınırı (Ebas) denir.

(a_n) dizisinin en büyük alt üst sınırı $\text{Ebas}(a_n)$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$(a_n)=(n^3-n)=(0,6,24,60,120,...,n^3-n,...)$ dizisi alttan sınırlıdır.

$\text{Ebas}(a_n)=0$ dır.

3. Sınırlı Diziler

Hem alttan hem de üstten sınırlı olan dizilere sınırlı diziler denir.

Örnek:

$(a_n) = \left((-1)^n\right) = \left(-1,1,-1,1,-1,1,-1,...,(-1)^n,...\right)$ dizisi için,

$\text{Eküs}(a_n) = 1$ ve $\text{Ebas}(a_n) = 1$ olduğundan (a_n) dizisi sınırlıdır.

Uyarı

1. Sınırlı bir dizide Eküs ve Ebas olmayabilir.
2. Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, sınırlı olmasıdır.
3. Yakınsak her dizi sınırlıdır. Bu ifadenin karşıtı doğru olmayabilir.
4. Monoton ve yakınsak bir dizinin, ilk terimi ile limitinden; büyük olanı Eküs, küçük olanı Ebas tır.

Örnek:

$(a_n) = (3^n + 1)$ dizisi için,

$(a_n) = (3^n + 1) = (4,10,28,82,...,3^n + 1,...)$ olduğuna göre,

$\text{Ebas}(a_n) = 4$ ve $\text{Eküs}(a_n)$ yoktur.

Örnek:

$(b_n) = (\frac{n^3 + 1}{n})$ dizisi için,

$(b_n) = (\frac{n^3 + 1}{n}) = (2, \frac{9}{2}, \frac{28}{3}, \frac{65}{4}, ..., \frac{n^3 + 1}{n}, ...)$ olduğuna göre $\text{Ebas}(b_n) = 2$ ve $\text{Eküs}(b_n)$ yoktur.

Bu durumda (b_n) dizisi alttan sınırlı olup üstten sınırlı değildir. Dolayısıyla sınırlı değildir.

Örnek:

$(c_n) = \left((-1)^n . \frac{2n + 3}{n + 4})\right)$ dizisinin sınırlı olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$(c_{2n}) = \left(\frac{4n + 3}{2n + 4})\right) = \left(\frac{7}{6}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{19}{12}, ..., \frac{4n + 3}{2n + 4}, ...\right)$ olup

$\lim(c_{2n}) = 2$ olduğuna göre $\frac{7}{6} \le c_{2n} < 2$ dir.

$(c_{2n-1}) = \left(\frac{-4n - 1}{2n + 3})\right) = \left(-1, -\frac{9}{7}, -\frac{13}{9}, ..., \frac{-4n - 1}{2n + 3}, ...\right)$ olup

$\lim(c_{2n-1}) = -2$ olduğuna göre $-2 < c_{n-1} \le -1$ dir.

Bu iki eşitlikten $-2 < c_n \le 2$ olur.

Buna göre $\text{Ebas}(c_n) = -2$ ve $\text{Eküs}(c_n) = 2$ olur.

Bu durumda (c_n) dizisi sınırlıdır.

Örnek:

$(a_n) = (\frac{3n}{2n + 1})$ dizisi için, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A. $\lim(a_n) = \frac{3}{2}$ dir.

B. Yakınsaktır.

C. Monoton artandır.

D. Sınırlıdır.

E. $\text{Eküs}(a_n) = 1$ dir.

Çözüm:

$$(a_n) = (\frac{3n}{2n+1}) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{9}{7}, \frac{4}{3}, \frac{15}{11}, ..., \frac{3n}{2n+1}, ...\right)$$

$2n + 1 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$ dir. $-\frac{1}{2} < 1$ olduğundan dizi monotondur.

$(a_n) = (\frac{3n}{2n+1}) = \left(\frac{3.n+0}{2.n+1}\right)$ olup,

$ad - bc = 3.1 - 0.2 = 3 > 0$ olduğundan dizi monoton artandır.

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{3n}{2n+1}\right) = \lim\left(\frac{3n}{2n}\right) = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Bu durumda (a_n) dizisi yakınsaktır.

$$a_1 = \frac{3.1}{2.1+1}) = 1 \text{ dir.}$$

Monoton ve yakınsak bir dizinin, ilk terimi ile limitinden; büyük olanı Eküs, küçük olanı Ebas olacağından,

$$\text{Ebas}(a_n) = 1 \text{ ve } \text{Eküs}(a_n) = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

Yakınsak her dizi sınırlıdır.

Her $n \in Z^+$ için $1 \le \frac{3n}{2n+1} < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \le (a_n) < \frac{3}{2}$ dir.

Bu durumda, E seçeneğinde verilen $\text{Eküs}(a_n) = 1$ ifadesi yanlıştır.

Çözümlü Sorular

1. Genel terimi $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ olan dizinin kaçıncı terimi 66 dır?

Çözüm:

Dizinin n. terimi 66 olsun. Buna göre,

$$a_n = 66 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + ... + n = 66 \Rightarrow \frac{n.(n+1)}{2} = 66$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 132 = 0 \Rightarrow (n+12).(n-11) = 0$$

$$\Rightarrow n = -12 \text{ veya } n = 11$$

Bu durumda n = 11 olur.

2. Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n + k, & n \text{ tek sayı ise} \\ 3n - k, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$ olan dizide

$\frac{a_5}{a_6} = \frac{1}{3}$ olduğuna göre, bu dizinin 8. terimi kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a_5}{a_6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{10+k}{18-k} = \frac{1}{3} \Rightarrow 30 + 3k = 18 - k$$

$$\Rightarrow 4k = 12 \Rightarrow k = -3 \text{ olur.}$$

Bu durumda, $a_8 = 3.8 - (-3) = 27$ bulunur.

3. Genel terimi $a_n = \frac{3^{2n-1}}{(n+2)!}$ olan bir dizinin 10. terimi 9. teriminin kaç katıdır?

Çözüm:

$$a_{10} = \frac{3^{2.10-1}}{(10+2)!} = \frac{3^{19}}{12!} \text{ ve } a_9 = \frac{3^{2.9-1}}{(9+2)!} = \frac{3^{17}}{11!} \text{ dir.}$$

$$\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{\frac{3^{19}}{12!}}{\frac{3^{17}}{11!}} = \frac{3^2}{12} = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

4. Genel terimi a_n olan dizide $a_1 = 2$ ve her n > 1 için $a_{n+1} = a_n + 2n$ olduğuna göre a_{100} kaçtır?

Çözüm:

$a_{n+1} = a_n + 2n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2n$ denkleminde n yerine 1 den 99'a kadar değerler vererek, elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$a_2 - a_1 = 2.1$$

$$a_3 - a_2 = 2.2$$

$$a_4 - a_3 = 2.3$$

…

$$a_{100} - a_{99} = 2.99$$

+

$$a_{100} - a_1 = 2.(1 + 2 + 3 + ... + 99)$$

$$a_{100} - 2 = 2.\frac{99.100}{2} \Rightarrow a_{100} = 9902 \text{ olur.}$$

5. Genel terimi $a_n = \frac{1}{n.(n+1)}$ olan dizinin ilk 15 teriminin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ dir.}$$

$a_n = \frac{1}{n.(n+1)}$ ise dizinin ilk 15 teriminin toplamı,

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_5 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{15.16}$$

$$= \frac{15}{16}$$

olur.

6. Genel terimi $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$ olan dizinin kaç terimi 18 den küçüktür?

Çözüm:

$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$ olduğuna göre,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}.\frac{6}{5}....\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2} \text{ dir.}$$

$$\frac{n+2}{2} < 18 \Rightarrow n < 34 \text{ olur.}$$

Buna göre dizinin 33 terimi 18 den küçüktür.

7. Genel terimi $a_n = \frac{n^2 - 3n - 7}{n+2}$ olan dizinin tam sayı olan terimi kaçtır?

Çözüm:

$a_n = \frac{n^2 - 3n - 7}{n+2} = n - 5 + \frac{3}{n+2}$ olduğuna göre $n + 2$ nin 3'ü tam bölen değerleri için (a_n) dizisi tam sayı belirtir.

Yalnızca $n = 1$ değeri için (a_n) dizisi tam sayı belirtir.

Buna göre, (a_n) dizisinin tam sayı olan terimi,

$$a_n = n - 5 + \frac{3}{n+2} \text{ ise } a_1 = 1 - 5 + \frac{3}{1+2} = -3 \text{ olur.}$$

8. Genel terimi $a_n = \frac{2n+5}{3} + \frac{kn-1}{2}$ olan dizi sabit dizi belirttiğine göre, bu dizinin 8. terimi kaçtır?

Çözüm:

$a_n = \frac{2n+5}{3} + \frac{kn-1}{2} = \frac{(4+3k).n+7}{6}$ dizisi sabit dizi belirttiğine göre genel terimdeki n in katsayıları 0 (sıfır) olmalıdır. Yani $4 + 3k = 0$ olur.

$$a_8 = \frac{0.8+7}{6} = \frac{7}{6} \text{ bulunur.}$$

9. $(a_n) = \left(\dfrac{an^2+2}{3} + \dfrac{3n}{2} - \dfrac{c}{6}\right)$ ve

$(b_n) = \left(3n^2 + bn + a + b\right)$ dizileri birbirine eşit olduğuma göre, c kaçtır?

Çözüm:

$(a_n) = \left(\dfrac{a}{3}n^2 + \dfrac{3}{2}n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{c}{6}\right)$ olup

(a_n) ve (b_n) dizileri eşit olduklarına göre aynı üslü terimlerin katsayıları birbirine eşittir.

Bu durumda,

$\dfrac{a}{3} = 3 \Rightarrow a = 9$ olur.

$b = \dfrac{3}{2}$ dir.

$\dfrac{2}{3} - \dfrac{c}{6} = a + b \Rightarrow \dfrac{c}{6} = \dfrac{2}{3} - 9 - \dfrac{3}{2} \Rightarrow c = -59$ olur.

10. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, ilk n teriminin toplamı $S_n = n^2 + 5n$ olan bir dizinin 10. terimi kaçtır?

Çözüm:

$S_n = n^2 + 5n$ ise,

$S_{10} = 10^2 + 5.10 = 150$

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10} = 150$

$S_9 = 9^2 + 5.9 = 126$

$S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_9 = 126$

Bulunan bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$S_{10} - S_9 = a_{10} = 150 - 126 = 24$ bulunur.

11. Genel terimi $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-x}$ olan dizi monoton azalan olduğuna, x yerine yazılabilen tamsayıların tam sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm:

Genel terimi $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-x}$ olan dizi monoton olduğuna göre paydanın kökü 1 den küçük olmalıdır.

$2n - x = 0 \Rightarrow n = \dfrac{x}{2}$ dir. $\dfrac{x}{2} < 1 \Rightarrow x < 2$ dir.

Dizi monoton azalan olduğuna göre,

$a.d - b.c < 0 \Rightarrow 3.(-x) - 2.1 < 0 \Rightarrow x > -\dfrac{2}{3}$ olur.

Buna göre $-\dfrac{2}{3} < x < 2$ olup x yerine yazılabilecek tamsayılar 0 ve 1 olup toplamları 1 dir.

12. Genel terimi $a_n = \begin{cases} n, & n < 3 \\ \dfrac{n}{n+1}, & n \geq 3 \end{cases}$ olan dizinin kaç terimi 1 in $\dfrac{1}{100}$ komşuluğu dışında bulunur?

Çözüm:

Genel terimi $a_n = \begin{cases} n, & n < 3 \\ \dfrac{n}{n+1}, & n \geq 3 \end{cases}$ olan dizide

$a_1 = 1$ ve $a_2 = 2$ dir. Buna göre, a_1 terimi 1 in $\dfrac{1}{100}$ komşuluğunda, a_2 terimi 1 in $\dfrac{1}{100}$ komşuluğu dışındadır.

(a_n) dizisinin 1 in $\dfrac{1}{100}$ komşuluğu dışındaki terimleri,

$\left|a_n - 1\right| \geq \frac{1}{100}$ eşitsizliğini sağladığına göre,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| \geq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow n \leq 99 \text{ olur.}$$

a_2 dışında bu koşulu sağlayan 98 tane pozitif tam sayı vardır.

13. Aşağıdaki dizilerden hangisi $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$ dizisinin alt dizisi değildir?

Çözüm:

$a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$ olmak üzere,

$k_n = n^2$ alınırsa, $\left(\frac{2n^2+1}{2n^2-1}\right)$ dizisi;

$k_n = n+1$ alınırsa, $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ dizisi;

$k_n = \frac{n+1}{2}$ alınırsa, $\left(\frac{n+2}{n}\right)$ dizisi;

$k_n = 2n+1$ alınırsa, $\left(\frac{4n+3}{4n+1}\right)$ dizisi;

$k_n = 3n$ alınırsa, $\left(\frac{6n+1}{6n-1}\right)$ dizisi elde edilir.

(k_n) artan pozitif bir tam sayı dizisi olmak üzere (a_{k_n}) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir.

$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ pozitif tam sayı dizisi olmadığı için $\left(\frac{n+2}{n}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

14. $a_n = \frac{4n-5}{6n+4} + \frac{2n^3+5}{5n^5+1} + \frac{1}{3}$ olduğuna göre (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

Çözüm:

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{4n-5}{6n+4} + \frac{2n^3+5}{5n^5+1} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim\left(\frac{4n-5}{6n+4}\right) + \lim\left(\frac{2n^3+5}{5n^5+1}\right) + \lim\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

15. $\left(\frac{4n^2+3n+\sin n}{2n^2+3}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm:

Her $n \in Z^+$ için $-1 \leq \sin n \leq 1$ dir.

$\lim(a_n)$

$$= \lim\left(\frac{4n^2}{2n^2+3}\right) + \lim\left(\frac{3n}{2n^2+3}\right) + \lim\left(\frac{\sin n}{2n^2+3}\right)$$

$$= \frac{4}{2} + 0 + 0 = 2$$

16. Genel terimi $a_n = \begin{cases} n+1, & n \leq 250 \\ \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{2n^3-3}, & n > 250 \end{cases}$ olan dizinin limiti kaçtır?

Çözüm:

$$\lim\left(\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{2n^3-3}\right) = \lim\frac{\frac{n.(n+1).(2n+1)}{2}}{2n^2+3}$$

$= \lim \dfrac{2n^3}{12n^3} = \dfrac{1}{6}$

$n > 250$ koşuluna uygun n değerleri için, (a_n) terimleri $\dfrac{1}{6}$ ya yakınsamaktadır.

$n \leq 250$ koşuluna uygun n değerleri a_n terimlerinin sayısı sonlu olup hemen hemen her terim değildir.

$n > 250$ koşuluna uygun n değerleri a_n terimlerinin sayısı sonsuz olup hemen hemen her terimdir.

Buna göre, dizinin hemen hemen her terimi $\dfrac{1}{6}$ nın ε komşuluğundadır.

Yani (a_n) dizisinin limiti $\dfrac{1}{6}$ dır.

17. $(b_n) = \left((-1)^n . \dfrac{12n^2 + 2n}{3n^2 - 2} \right)$ dizisinin limiti kaçtır?

Çözüm:

$$(b_{2n}) = \left(\frac{48n^2 + 4n}{12n^2 - 2} \right) \to 4$$

$$(b_{2n-1}) = \left(-\frac{48n^2 - 44n + 10}{12n^2 - 12n + 1} \right) \to -4$$

Bir dizinin limiti varsa, alt dizilerinin limiti de aynı olacağından, (b_n) dizisinin limiti yoktur.

18. (c_n) , pozitif terimli yakınsak bir dizidir.

$c_{2n+1}.c_{n^2+1} + 4.c_{n+2} = \dfrac{12n}{n+1}$ olduğuna göre (c_n) dizisinin limiti kaçtır?

Çözüm:

$\lim(c_n) = x$ olsun.

$\lim(c_{2n+1}) = \lim(c_{n^2+1}) = \lim(c_{n+2}) = x$ olur.

Buna göre,

$$\lim\left(c_{2n+1}.c_{n^2+1} + 4.c_{n+2} \right) = \lim\left(\frac{12n}{n+1} \right)$$

$$\lim\left(c_{2n+1}\right).\lim\left(c_{n^2+1} \right) + 4.\lim\left(c_{n+2}\right) = 12$$

$x.x + 4.x = 12 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow x = -6$ veya $x = 2$ dir.

(c_n) , pozitif terimli bir dizi olduğu için,

$\lim(c_n) = 2$ dir.

19. $a_n = \left(\dfrac{2n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 1} \right)^{2n+1}$ olduğuna göre (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

Çözüm:

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{2n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 1} \right)^{2n+1}$$

$$= \lim\left(1 - \frac{3n - 1}{2n^2 + 1} \right)^{2n+1}$$

$$= e^{\lim\left(-\frac{3n-1}{2n^2+1}.(2n+1) \right)}$$

$$= e^{\lim \frac{-6n^2}{2n^2}} = e^{-3} \text{ olur.}$$

20. $a_1 = \sqrt{90}$ ve $n > 1$ olmak üzere $a_{n+1} = \sqrt{90 + a_n}$ olduğuna göre (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

Çözüm:

$\lim(a_n) = x$ ise $\lim(a_{n+1}) = x$ tir.

$a_{n+1} = \sqrt{90 + a_n}$ ise $\lim\left(a_{n+1}\right) = \lim\left(\sqrt{90 + a_n}\right)$

$\Rightarrow \lim\left(a_{n+1}\right) = \sqrt{\lim(90) + \lim(a_n)}$

$\Rightarrow x = \sqrt{90 + x} \Rightarrow x^2 - x - 90 = 0$

$\Rightarrow x = 10$ veya $x = -9$ dur.

$a_1 = \sqrt{90}$ ise her $n \in Z^+$ için $a_n \geq \sqrt{90}$ dır.

Buna göre dizinin limiti 10 dur.

Konu Bitmiştir.