FAKTÖRİYEL-ASAL ÇARPANLARA AYIRMA-E.B.O.B.-E.K.O.K.

1- Faktöriyel

1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına, n! (n faktöriyel) denir.

$n! = 1.2.3.....n$ dir.

Örnek:

$1! = 1$ dir.

$2! = 1.2 = 2$ dir.

$3! = 1.2.3 = 6$ dır.

$4! = 1.2.3.4 = 24$ tür.

$5! = 5.4! = 5.4.3! = 20.6 = 120$ dir.

Örnek:

$\frac{11!+10!}{10!-9!}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{11!+10!}{10!-9!} = \frac{11.10!+10!}{10.9!-9!} = \frac{10!.(11+1)}{9!.(10-1)} = \frac{10.9!.12}{9!.9}$$

$$= \frac{10.12}{9} = \frac{40}{3} \text{ bulunur.}$$

Uyarı

$0! = 1$ dir.

Örnek:

$\frac{10!}{8!}.\frac{9!}{12!}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{10!}{8!}.\frac{9!}{12!} = \frac{10!}{8!}.\frac{9.8!}{12.11.10!} = \frac{9}{12.11} = \frac{3}{44} \text{ bulunur.}$$

Sonuç

$n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)!$ dir.

Örnek:

$x = 17!+3!$

olduğuna göre, x in 10 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

$5! = 120$, $6! = 6.120$, $7! = 7.6.120$, ...

olduğuna göre, 5 ten büyük doğal sayıların faktöriyellerinin birler basamağı daima 0 dır. Bu durumda, $n \geq 5$ olmak üzere, $n!$ sayısı 10 ile tam bölünür.

$17! = ...00$ ve $3! = 6$ olduğuna göre,

$x = 17!+3!$ eşitliğini sağlayan x in birler basamağı 6 dır.

Örnek:

$x = 17!-3$

olduğuna göre, x in 7 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

17! sayısının çarpanlarından biri 7 dir. Bu durumda 17! sayısı 7 ile tam bölünür. (17! in 7 ile bölümünden kalan 0 dır.)

$x = 17!-3 = 17!+(-3)$ ün 7 ile bölümünden elde edilen kalan, $0 + (-3)$ ün 7 ile bölümünden kalana eşittir.

$-3 = 7.(-1) + 4$ olduğu için, – 3 ün 7 ile bölümünden kalan 4 tür.

Buna göre, $17!-3$ ün 7 ile bölümünden kalan 4 tür.

Örnek:

$x = 7!$

olduğuna göre, x in rakamlarından kaç tanesi sıfırdır?

Çözüm:

$5! = 5.4! = 5.4.3! = 20.6 = 120$

$6! = 6.5! = 6.120 = 720$

$7! = 7.6! = 7.720 = 5040$

olduğuna göre, $x = 5040$ tır.

Buna göre, x sayısının rakamları, 5, 0, 4, 0 dır. Bu durumda, x in rakamlarından 2 tanesi sıfırdır.

Örnek:

m ve n doğal sayı olmak üzere,

$4! = m.2^n$

eşitliğini sağlayan en büyük n değerini bulalım.

Çözüm:

$4! = m.2^n$

$1.2.3.4 = m.2^n$

$1.2.3.2^2 = m.2^n$

$1.2^{1+2}.3 = m.2^n$

$3.2^3 = m.2^n$

eşitliğinde,

$(\ n = 0\ ,\ m = 24\ )$ veya $(\ n = 1\ ,\ m = 12\ )$ veya

$(\ n = 2\ ,\ m = 6\ )$ veya $(\ n = 3\ ,\ m = 3\ )$ olabilir.

Buna göre, verilen eşitliği sağlayan en büyük n değeri 3 tür.

Uyarı

x , m , n pozitif tam sayı ve y asal sayı olmak üzere,

$x! = m.y^n$ eşitliğini sağlayan en büyük n sayısını bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır.

a. Doğal sayılar kümesinde, x sayısı y ile bölünür. Elde edilen bölüm tekrar y ile bölünür. Bu işleme bölüm y den küçük olana kadar devam edilir.

b. Elde edilen bölümlerin toplamı, verilen eşitliği sağlayan n sayısının en büyük değeridir.

Örnek:

m ve n doğal sayı olmak üzere,

$32! = m.5^n$

eşitliğini sağlayan en büyük n değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \hline -30 & \boxed{6} \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \hline -5 & \boxed{1} \\ 1 & \end{array}$$

olduğuna göre, verilen eşitsizliği sağlayan en büyük n değeri 6 + 1 = 7 dir.

Örnek:

m ve n doğal sayı olmak üzere,

$22! = m.8^n$

eşitliğini sağlayan en büyük n değerini bulalım.

Çözüm:

$8^n = (2^3)^n = 2^{3n}$ olduğu için,

$22! = m.8^n = m.2^{3n}$ dir.

Şimdi bu koşulu sağlayan en büyük $3n$ doğal sayısını bulalım:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ \hline -22 & \boxed{11} \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \hline -10 & \boxed{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline -4 & \boxed{2} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline -2 & \boxed{1} \\ 0 & \end{array}$$

olduğuna göre, verilen eşitliği sağlayan en büyük n değeri $11 + 5 + 2 + 1 = 19$ dur. Bunun anlamı $3n$ sayısı 19 dan büyük olamaz. Ama $3n$ sayısı 19 dan küçük herhangi bir tam sayı değerini alabilir.

n doğal sayı olduğu için, $3n$ nin alabileceği en büyük değer 18 dir. Bu durumda, $3n = 18$ ise, $n = 6$ dır.

Buna göre, $22! = m.8^{n}$ eşitliğini sağlayan en büyük n doğal sayısı 6 dır.

Örnek:

m ve n doğal sayı olmak üzere,

$22! = m.6^{n}$

eşitliğini sağlayan en büyük n değerini bulalım.

Çözüm:

$6^{n} = (2.3)^{n} = 2^{n}.3^{n}$ olduğu için,

$22! = m.6^{n} = 2^{n}.3^{n}$ dir.

$$\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ \hline -22 & \boxed{11} \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \hline -10 & \boxed{5} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline -4 & \boxed{2} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline -2 & \boxed{1} \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 22 & 3 \\ \hline -21 & \boxed{7} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline -6 & \boxed{2} \\ 1 & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemlerinden anlıyoruz ki,

$22! = 2^{n}.3^{n}$ eşitliğinde 2 nin üstü en fazla $11 + 5 + 2 + 1 = 19$, 3 ün üstü en fazla $7 + 2 = 9$ dur.

2 nin ve 3 ün üstü eşit olması gerekeceği için, n in değeri en fazla 9 olabilir.

Örnek:

$x = 25!$

olduğuna göre, x sayısının sondan (birler basamağından) başlayıp farklı rakam gelinceye kadar kaç tane sıfır rakamı sayılacağını bulalım.

Çözüm:

Bir sayının sonundaki sıfırların sayısı, o sayıdaki 10 çarpanlarının sayısı kadardır.

Bu durumda,

m ve n doğal sayı olmak üzere, $x = 25! = m.10^{n}$ eşitliğini sağlayan en büyük n değerini bulmalıyız.

$x = 25! = m.10^{n} = m.2^{n}.5^{n}$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \hline -25 & \boxed{5} \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \hline -5 & \boxed{1} \\ 0 & \end{array}$$

olduğuna göre, $x = 25! = m.10^{n} = m.2^{n}.5^{n}$ eşitliğini sağlayan en büyük n doğal sayısı $5 + 1 = 6$ dır.

Buna göre, $x = 25!$ sayısının sondan(birler basamağından) başlayıp farklı rakam gelinceye kadar sayılırsa 6 tane sıfır rakamı sayılır.

2. Aralarında Asal Sayılar

1 den başka pozitif ortak böleni olmayan tam sayılara, aralarında asal sayılar denir. Bu sayıların aralarında asal olmaları için kendilerinin asal olma zorunluluğu yoktur.

Örnek:

9 un pozitif tam sayı bölenleri, 1, 3, 9
20 nin pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 4, 5, 10, 20 dir.

9 ile 20 nin 1 den başka pozitif ortak böleni yoktur. Bu nedenle 9 ile 20 aralarında asaldır.

Örnek:

9, 10, 11 sayılarının üçünü de tam bölen 1 den başka pozitif tam sayı yoktur. Bu nedenle 9, 10, 11 aralarında asaldır.

Örnek:

Üç basamaklı rakamları aralarında asal en büyük doğal sayıyı bulalım.

Çözüm:

9, 9, 8 sayılarının üçünü de tam bölen 1 den başka pozitif tam sayı yoktur. Bu nedenle 9, 9, 8 sayıları aralarında asaldır.

Buna göre, üç basamaklı rakamları aralarında asal en büyük doğal sayı, 998 dir.

Örnek:

4 ün pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 4 tür.
18 in pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 3, 6, 9, 18 dir.

4 ile 18 in 1 den başka pozitif ortak böleni vardır. Bu nedenle 4 ile 18 aralarında asal değildir.

Uyarı

x, sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere,

$\frac{0}{x} = 0$ dır.

Uyarı

$\frac{x}{0}$ ifadesi tanımsızdır.

Uyarı

x, 1 den farklı bir sayı olmak üzere, x ile 0 (sıfır) aralarında asal değildirler.

Uyarı

x, bir doğal sayı olmak üzere, x ile 1 aralarında asaldır.

Örnek:

a ile $b+1$ aralarında asal iki doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{a}{b+1} = \frac{4}{10}$$

olduğuna göre, a nın değerini bulalım.

Çözüm:

$\frac{a}{b+1} = \frac{4}{10}$ ise, $\frac{a}{b+1} = \frac{2}{5}$ tir.

a ile $b+1$ aralarında asal olarak verilmiştir. 2 ile 5 sayıları da aralarında asaldır.

Buna göre,

$\frac{a}{b+1} = \frac{2}{5}$ ise, $a = 2$ ve $b+1 = 5$ tir.

Sonuç

x ile y aralarında asal ise, $\frac{x}{y}$ kesri en sade biçimdedir.

3. Asal Çarpanlara Ayırma

A. Bir Doğal Sayının Asal Bölenleri (Çarpanları)

Bir doğal sayıyı tam olarak bölen asal sayılara, o sayının asal bölenleri denir.

Örnek:

20 nin asal bölenlerini bulalım.

Çözüm:

2o nin pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 4, 5, 10, 20 dir.
Bunlardan asal olanları, 2 ile 5 tir.

Buna göre, 20 nin asal bölenleri 2 ile 5 tir.

Uyarı

Bir çarpma işleminde çarptığımız sayılara, çarpan demiştik. Buna göre, yukarıdaki örnekte 2 ve 5 sayıları 20 nin aynı zamanda asal çarpanlarıdır.

B. Bir Sayının Asal Çarpanlarına Ayrılması

a, b, c birbirinden farklı asal sayılar; d, e, f pozitif tam sayılar olmak üzere,

$A = a^d . b^e . c^f$ olsun.

Bu durumda $a^d . b^e . c^f$ ifadesine "A pozitif tam sayısının asal çarpanlarının kuvvetleri biçiminde yazılışı" denir.

a, b, c sayılarına A pozitif tam sayısının asal çarpanları (bölenleri) denir.

Örnek:

20 sayısını asal sayıların çarpımı şeklinde yazalım.

Çözüm:

Bir doğal sayının bölenleri aynı zamanda çarpanları olduğundan, 20 yi sıra ile asal sayılara bölelim:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Buna göre, 20 sayısını asal sayıların çarpımı şeklinde yazılışı, $20 = 2.2.5$ tir.

Örnek:

x ve y birer pozitif tam sayıdır.

$$y^2 = 90.x$$

olduğuna göre, $x + y$ nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm:

90 sayısını asal çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 90 = 2.3.3.5 \text{ tir.}$$

$$y^2 = 90.x = (2.3.3.5)x = (2^1.3^2.5^1).x \text{ tir.}$$

Eşitliğin sol tarafındaki y pozitif tam sayısının üssü 2 olduğu için eşitliğin sağ tarafındaki asal sayıların üssü 2 nin katı olmalıdır. Eşitliğin sağ tarafındaki asal sayılardan 3 ün üssü 2, 5 in ve 2 nin üssü 1 dir. Buna göre, y nin pozitif tam sayı olması için, x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri $2^1.5^1$ olmalıdır. Böylece,

$$y^2 = (2^1.3^2.5^1).x = (2^1.3^2.5^1).2^1.5^1$$

$$= 2^{1+1}.3^2.5^{1+1} = 2^2.3^2.5^5$$

$$= (2.3.5)^2 = 30^2 \quad \text{olur.}$$

$y^2 = 30^2$ olduğuna göre, y nin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri 30 dur.

Buna göre, $x + y$ nin en küçük değeri,

$$2^1.5^1 + 30 = 10 + 30 = 40 \text{ tır.}$$

Örnek:

x ve y birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$2^2.3^5.5^4.7.m = n^5$$

eşitliğini sağlayan en küçük m sayısı,

$$2^3.5^1.7^4 \text{ tür.}$$

C. Bir Tam Sayının Pozitif Tam Bölenleri

24 sayısını tam olarak bölen pozitif tam sayıları bulalım:

24 sayısının pozitif tam sayı bölenleri,

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 tür.

Buna göre, 24 ü tam olarak bölen sekiz tane pozitif tam sayı vardır.

Büyük sayıların pozitif bölenlerini, burada olduğu gibi tek tek belirlemek vakit alır.

Bunun için, pozitif tam bölen sayısını aşağıdaki kuralı kullanarak belirleyeceğiz.

Kural

a, b, c birbirinden farklı asal sayılar; d, e, f pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$A = a^d.b^e.c^f$$

sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı,

$$(d+1).(e+1).(f+1) \text{ dir.}$$

Örnek:

24 ün sekiz tane pozitif tam böleni olduğunu görmüştük. Yukarıdaki kuralı kullanarak aynı sonucu bulalım:

$24 = 8.3 = 2^3.3^1$ olduğu için,

24 ün pozitif tam sayı bölenleri sayısı,

$(3+1).(1+1) = 4.2 = 8$ dir.

24 ün pozitif tam sayı bölenleri sayısını bulmak için yapılan, asal çarpanların üslerinin 1 er fazlasını çarpmaktır.

Örnek:

24 ün negatif tam sayı bölenlerini bulalım:

24 sayısının sekiz tane olan pozitif tam sayı bölenlerinin 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 olduğunu söyledik.

24 sayısının sekiz tane de negatif tam sayı böleni vardır. 24 ün negatif bölenleri: - 1, - 2, - 3, - 4, - 6, - 8, - 12, - 24 tür.

Sonuç

Bir A sayısının, pozitif tam sayı bölenlerinin toplama işlemine göre tersi olan sayılar da negatif tam sayı bölenleridir.

Bir tam sayının tam sayı bölenlerinin toplamı sıfırdır.

Örnek:

108 sayısının tam sayı bölenleri sayısını bulalım:

$108 = 2^2.3^3$ olduğu için, 108 in pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı,

$(2+1).(3+1) = 3.4 = 12$ dir.

108 in on iki tane pozitif tam sayı böleni varsa, on iki tane de negatif tam sayı böleni vardır. Bu durumda 108 sayısının $12 + 12 = 24$ tane tam sayı böleni vardır.

Örnek:

150 sayısının asal olmayan tam sayı bölenleri sayısını bulalım.

Çözüm:

$150 = 6.25 = 2^1.3^1.5^2$ dir.

150 nin asal bölenleri, 2, 3, 5 olup üç tanedir.

$150 = 6.25 = 2^1.3^1.5^2$ olduğu için,

150 nin pozitif tam sayı bölenleri sayısı,

$(1+1).(1+1).(2+1) = 2.2.3 = 12$ dir.

150 nin on iki tane pozitif tam sayı böleni varsa, on iki tane de negatif tam sayı böleni vardır. Bu durumda 150 sayısının $12 + 12 = 24$ tane tam sayı böleni vardır.

150 nin 24 tane tam sayı böleninin 3 tanesi asal sayı ise 150 sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin sayısı,

$24 - 3 = 21$ dir.

Örnek:

$20 = 2^2.5^1$ olduğundan, 20 nin asal bölenlerinin toplamı,

$2 + 5 = 7$ dir.

20 nin asal olmayan bölenlerinin toplamı,

$$\begin{aligned}&(-1) + (-2) + (-4) + (-5) + \\ &(-10) + (-20) + 1 + 4 + 10 + 20 = -7\end{aligned} \text{ dir.}$$

Sonuç

x doğal sayısının asal bölenleri toplamı A ise, asal olmayan tam sayı bölenleri toplamı – A dır.

Örnek:

108 sayısının asal olmayan bölenlerinin toplamını bulalım:

$108 = 2^2.3^3$ olduğu için, 108 in asal bölenlerinin toplamı,

$2 + 3 = 5$ tir.

Bu durumda 108 sayısının asal olmayan bölenlerinin toplamı – 5 tir.

4. E.B.O.B. ve E.K.O.K.

A. E.B.O.B. (En Büyük Ortak Bölen)

En az biri sıfırdan farklı olan iki ya da daha fazla doğal sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne, bu sayıların en büyük ortak böleni denir.

x ile y nin ortak bölenlerinin en büyüğü B ise,

$\text{e.b.o.b.}(x;y)=B$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

12 nin pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 3, 4, 6, 12 dir.

20 nin pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 4, 5, 10, 20 dir.

12 ile 20 nin ortak pozitif tam sayı bölenleri, 1, 2, 4 tür.

Buna göre, $\text{e.b.o.b.}(12;20)=4$ tür.

Sonuç

A ile B nin e.b.o.b. u hem A yı hem de B yi bölen en büyük sayıdır.

Bir önceki örnekte $\text{e.b.o.b.}(12;20)=4$ olduğuna göre, 12 sayısı da 20 sayısı da 4 ile tam bölünür.

Örnek:

$12=2^2.3^1$ ve $40=2^3.5^1$

olduğuna göre, $\text{e.b.o.b.}(12;40)=2^2=4$ tür.

Hem 12 yi hem de 40 ı tam bölen en büyük sayı 4 tür.

Sonuç

En büyük ortak böleni bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak olan asal çarpanlardan en küçük üslüler çarpılır.

Örnek:

$500=2^2.5^3$ ve $1800=2^3.3^2.5^2$ olduğuna göre,

$\text{e.b.o.b.}(500;1800)=2^2.5^2=100$ dür.

Hem 500 ü hem de 1800 ü bölen tam bölen en büyük sayı 100 dür.

B. E.K.O.K. (En Küçük Ortak Kat)

Hepsi sıfırdan farklı olan, iki ya da daha fazla doğal sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların en küçük ortak katı denir.

x ile y nin ortak katlarının en küçüğü K ise,

$\text{e.k.o.k.}(x;y)=K$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

12 nin pozitif tam sayı katlarından bazıları,

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120 dir.

20 nin pozitif tam sayı katlarından bazıları,

20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 dir.

12 ile 20 nin pozitif ortak katlarından bazıları,

60, 120, 180, 240 tır.

12 ile 20 nin en küçük ortak katı, 60 tır.

Buna göre, $\text{e.k.o.k.}(20;12)=60$ tır.

Sonuç

A ile B nin e.k.o.k. u hem A ile hem de B ile tam bölünen en küçük pozitif sayıdır.

Bir önceki örnekte $\text{e.k.o.k.}(20;12)=60$ olduğuna göre, 60 sayısı; hem 12 ile hem de 20 ile tam bölünen en küçük pozitif tam sayıdır.

Örnek:

$12=2^2.3^1$ ve $40=2^3.5^1$

olduğuna göre, $\text{e.k.o.k.}(12;40)=2^3.3^1.5^1=120$ dir.

Hem 12 ile hem de 40 ile bölünen en küçük sayı 120 dir.

Sonuç

En küçük ortak katı bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Asal çarpanlardan en büyük üslüler çarpılır.

Örnek:

$500 = 2^2.5^3$ ve $1800 = 2^3.3^2.5^2$ olduğuna göre,

$\text{e.k.o.k.}(500;1800) = 2^3.5^3.3^2 = 9000$ dir.

Hem 500 ile hem de 1800 ile tam bölünen en küçük sayı 9000 dir.

Örnek:

48 ve 64 sayılarının e.b.o.b. unu ve e.k.o.k. unu bulalım.

Çözüm:

1.Yol

$48 = 2^4.3^1$ ve $64 = 2^6$ dır.

E.b.o.b. asal çarpanlardan üssü küçük olanların çarpımı olduğuna göre,

$$\text{e.b.o.b.}(48;64) = 2^4 = 16 \text{ dır.}$$

E.k.o.k. ortak asal çarpanlardan üssü büyük olanlar ile ortak olmayan çarpanların çarpımı olduğuna göre,

$$\text{e.k.o.k.}(48;64) = 2^6.3^1 = 192 \text{ dir.}$$

2.Yol

48	64	2	*
24	32	2	*
12	16	2	*
6	8	2	*
3	4	2	
3	2	2	
3	1	3	
1			

$\text{E.b.o.b.}(48;64) = 2.2.2.2 = 16$ ve

$\text{E.k.o.k.}(48;64) = 2.2.2.2.2.2.3 = 192$ dir.

İki sayının ortak bölenlerinin yanına * (yıldız) işareti konmuştur.

E.b.o.b. yanında * işareti bulunan bölenlerin çarpımı, e.k.o.k. ise bütün bölenlerin çarpımıdır.

Sonuç

Bir önceki örnekte,

$\text{e.b.o.b.}(48;64) < 48 < 64 < \text{e.k.o.k.}(48;64)$

$$16 < 48 < 64 < 192 \text{ dir.}$$

A ile B doğal sayı ve A < B ise,

$\text{e.b.o.b.}(A;B) < A < B < \text{e.k.o.k.}(A;B)$ dir.

Sonuç

Bir önceki örnekte,

$A.B = 48.64 = 3072$,

$\text{e.b.o.b.}(48;64).\text{e.k.o.k.}(48;64) = 16.192 = 3072$ dir.

A ile B doğal sayı olmak üzere,

$\text{e.b.o.b.}(A;B).\text{e.k.o.k.}(A;B) = A.B$ dir.

Kural

A ile B aralarında asal iki doğal sayı ise,

$\text{E.b.o.b.}(A;B) = 1$ ve

$\text{E.k.o.k.}(A;B) = A.B$ dir.

Örnek:

a ile b aralarında asal sayılar olmak üzere,

$a.b + \text{e.b.o.b.}(a;b) = 301$

olduğuna göre, $\text{e.k.o.k.}(a;b)$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

a ile b aralarında asal ise, $\text{e.b.o.b.}(a;b)=1$ ve

$\text{e.k.o.k.}(a;b)=a.b$ dir. Buna göre,

$a.b+\text{e.b.o.b.}(a;b)=301$

$\text{e.k.o.k.}(a;b)+1=301$

$\text{e.k.o.k.}(a;b)=300$ dür.

Uyarı

İkiden fazla doğal sayının e.b.o.b. u ile e.k.o.k. unun çarpımı bu sayıların çarpımına eşit olmayabilir.

Örnek:

60, 90, 225 sayılarının e.b.o.b. unu ve e.k.o.k. unu bulalım.

Çözüm:

60	90	225	2
30	45	225	2
15	45	225	3 ☆
5	15	75	3
5	5	25	5 ☆
1	1	5	5
1	1	1	

Yukarıda, 60, 90, 225 sayıları yan yana yazılarak, birlikte asal çarpanlarına ayrıldı.

Buna göre,

$\text{E.b.o.b.}(60;90;225)=3.5=15$

$\text{E.k.o.k.}(60;90;225)=2.2.3.3.5.5=900$

$60.90.225\neq \text{E.b.o.b.}(60;90;225).\text{E.k.o.k.}(60;90;225)$

C. E.B.O.B. ve E.K.O.K. Kavramlarının Kullanıldığı Bazı Problemler

Örnek:

12 ile bölümünden kalan 7 ve 16 ile bölümünden kalan 11 olan en küçük doğal sayıyı bulalım.

Çözüm:

12 ile bölümünden kalan 7 olan sayı x ise,

$x=12.k+7$ dir. (k doğal sayı)

16 ile bölümünden kalan 11 olan sayı x olduğu için,

$x=16.p+11$ dir. (p doğal sayı)

Buna göre, $x=12.k+7=16.p+11$ dir.

Bu durumda,

$x+5=12.k+12=16.p+16$

$x+5=12.(k+1)=16.(p+1)$ olur.

Buradan " $x+5$ sayısı 12 ve 16 ile tam bölünmelidir." diyebiliriz.

$x+5$ in en küçük değeri $\text{e.k.o.k.}(12;16)$ dır.

12	16	4
3	4	4
3	1	3
1	1	

$\text{e.k.o.k.}(12;16)=4.4.3=48$ olduğuna göre, $x+5$ in eşit olacağı en küçük pozitif tam sayı 48 dir.

$x+5=48$ ise, $x=43$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri 43 tür.

Örnek:

Bir kutudaki cevizler; ikişer ikişer, altışar altışar ya da dokuzar dokuzar sayıldığında her seferinde 1 ceviz artıyor.

Kutudaki ceviz sayısı 55 ten az olduğuna göre, bu kutuda en fazla kaç ceviz olabileceğini bulalım.

Çözüm:

Ceviz sayısı C olsun.

$E.k.o.k.(2;6;9) = 18$ olduğuna göre, $C - 1$ sayısı;
18, 36, 54 gibi 18 in tam katları olabilir.

İstenen koşullardaki C sayısı;

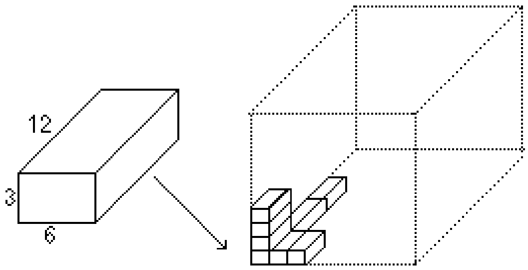
$C - 1 = 36$ ise $C = 37$ dir.

Örnek:

Boyutları 3 cm, 6 cm, 12 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kibrit kutuları kullanılarak en küçük hacimli bir küp yapılacaktır.

Buna göre en az kaç kibrit kutusunun gerektiğini bulalım.

Çözüm:



En az sayıda kibrit kutusu kullanılabilmesi için elde edilecek küpün bir kenarının uzunluğu en az olmalıdır.

Buna göre, küpün bir kenar uzunluğu kibrit kutusunun kenar uzunluğunun e.k.o.k. u yani $e.k.o.k.(3;6;12) = 12$ dir.

Demek ki küpün bir kenarının uzunluğu 12 cm dir.

Öyleyse,

$$\text{Kibrit kutularının sayısı} = \frac{\text{Küpün Hacmi}}{\text{Kibrit Kutusunun Hacmi}}$$

$$= \frac{12.12.12}{3.6.12}$$

$$= 4.2.1 = 8 \text{ dir.}$$

Buna göre bu iş için en az 8 kibrit kutusu gerekir.

Örnek:

Kenar uzunlukları 48 m ve 60 m olan dikdörtgen şeklindeki tarlanın etrafına ve köşelerine eşit aralıklarla ağaç dikilecektir.

Buna göre, en az kaç ağaç gerektiğini bulalım.

Çözüm:

Ağaç sayısı en az olacağına göre, komşu iki ağaç arasındaki uzunluk en büyük olmalıdır.

Komşu iki ağaç arasındaki uzunluk en büyük olacak ise bu uzunluk $e.b.o.b.(48;60) = 12$ dir.

Buna göre, gerekli olan ağaç sayısı:

$$\frac{\text{BahçeninCevresi}}{\text{İki Agaç ArasındakiUzaklız}} = \frac{2.(48+60)}{12} = 18 \text{ olur.}$$

Örnek:

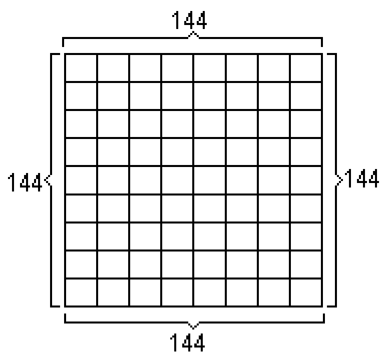
Eni 16 cm, boyu 18 cm olan dikdörtgen şeklindeki kartonlardan en az kaç tanesi ile kartonlar hiç bölünmeden yan yana getirilerek bir kare elde edilir?

Çözüm:

Kartonlardan en az sayıda kullanmak istediğimize göre, oluşacak karenin bir kenarının uzunluğu, 16 nın ve 18 in katı olan sayılardan en küçüğü yani, yani 16 ile 18 in en küçük ortak katı olmalıdır. Buna göre,

$E.k.o.k.(16;18) = 144$ olduğuna göre, oluşacak karenin bir kenarı 144 cm dir.

Bunu şekil üzerinde göstererek karton sayısını bulalım:



Şekil üzerinde saydığımızda 72 tane karton gerektiği bulunur. Bunu bu şekilde yapabileceğimiz gibi kısaca

Karton sayısı $= \dfrac{\text{OlusanKareninAlanı}}{\text{Bir KutununAlanı}}$

$$= \frac{144.144}{16.18} = 72 \text{ dir.}$$

Örnek:

Üç otomatik zil belli aralıklarla çalmaktadır. Birinci zil 15 dakikada bir, ikinci zil 18 dakikada bir, üçüncü zil ise 20 dakikada bir çalmaktadır.

Bu üç zil birlikte saat 18:00 de çaldıktan sonra tekrar üçü birlikte ilk kez saat kaçta çalacağını bulalım.

Çözüm:

$\text{E.k.o.k.}(15;18;20) = 180$ dir.

Buna göre, üç zil 180 dakikada (3 saatte) bir aynı anda çalarlar.

Bu üç zil birlikte saat 18:00 de çaldıktan sonra tekrar üçü birlikte; 18:00+ 3:00 = 21:00 de çalarlar.

Çözümlü Sorular

1. m ve n doğal sayı olmak üzere,

$$6! = m.3^n$$

eşitliğini sağlayan m, n sayıları için $m+n$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$6! = 1.2.3.4.5.6 = 1.2.3.2.2.5.2.3 = 80.3^2$ olduğuna göre,

$6! = m.3^n = 80.3^2$ dir.

m ve n doğal sayı olduğuna göre, bu eşitliği sağlayan en küçük değerler,

$m = 80$ ve $3^n = 3^2 \Rightarrow n = 2$ dir.

Buna göre,

$m + n = 80 + 2 = 82$ dir.

2. $\dfrac{12!+11!+10!}{11!+10!+9!}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{12!+11!+10!}{11!+10!+9!} = \frac{12.11.10!+11.10!+10!}{11.10.9!+10.9!+9!}$$

$$= \frac{10!.(12.11+11+1)}{9!.(11.10+10!+1)}$$

$$= \frac{10!.144}{9!.121} = \frac{10.9!.144}{9!.121}$$

$$= \frac{10.144}{121} = \frac{1440}{121}$$

3. $a+3$ ile $b-a+1$ aralarında asal iki doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{a+3}{b-a+1} = \frac{12}{25}$$

olduğuna göre, b nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$a+3$ ile $b-a+1$ aralarında asal olarak verilmiştir. 12 ile 25 sayıları da aralarında asaldır.

$\dfrac{a+3}{b-a+1} = \dfrac{12}{25}$ ise, $a+3 = 12$ ve $b-a+1 = 25$ tir.

$a+3 = 12$ ise $a = 12-3 = 9$ dur.

$b-a+1 = 25$ ve $a = 9$ ise,

$b-9+1 = 25$ ise, $b = 25+8 = 33$ tür.

4. $m+2$ ile $n-3$ aralarında asal ve 1 den farklı iki doğal sayı olmak üzere,

$$(m+2).(n-3) = 24$$

olduğuna göre $m+n$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

24 ün aralarında asal iki çarpanı 3 ve 8 dir.

Bu durumda,

$(m+2).(n-3)=3.8$ veya $(m+2).(n-3)=8.3$ tür.

$m+2=3$ ve $n-3=8$ veya $m+2=8$ ve $n-3=3$

$m=1$ ve $n=11$ veya $m=6$ ve $n=6$

Buna göre,

$m+n=1+11=12$ veya $m+n=6+6=12$ dir.

5. 1 den büyük ve asal olmayan bir tam sayının rakamlarının toplamı, sayı asal çarpanlarına ayrılarak yazıldığında, bu yazılışta bulunan tüm asal sayıların rakamlarının toplamına eşit oluyorsa bu tür sayılara Smith sayısı adı verilir.

Örneğin, 121 sayısı asal çarpanlarına

$12=11.11$ biçiminde ayrılır.

$1+2+1=1+1+1+1$

olduğundan 121 bir Smith sayısıdır.

Bu tanıma göre, aşağıdakilerden hangisi bir Smith sayısıdır?

A) 728 B) 720 C) 460 D) 21 E) 20

Çözüm:

728 sayısı asal çarpanlarına $728=2.2.2.7.13$ biçiminde ayrılır.

$7+2+8=2+2+2+7+1+3$

olduğundan 728 bir Smith sayısıdır.

6. a ve b birer tam sayı ve

$$b=\frac{8a+10}{a-1}$$

olduğuna göre a nın alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm:

$$b=\frac{8a+10}{a-1}=\frac{8a-8+18}{a-1}$$

$$b=\frac{8.(a-1)+18}{a-1}=8+\frac{18}{a-1}$$

olduğuna göre, $a-1$ sayısı 18 i tam bölmelidir.

$18=2^1.3^2$ olduğuna göre, 18 in $(1+1).(2+1)=6$ tane pozitif tam sayı böleni, 6 tane de negatif tam sayı böleni olmak üzere 6 + 6 = 12 tane tam sayı böleni vardır. Bu durumda, $a-1$ sayısı 12 farklı sayıya eşit olabilir. $a-1$ nin alacağı 12 değer varsa, a nın da alacağı 12 değer vardır.

a nın alacağı değerler,

2, 3, 4, 7, 10, 19, 0, - 1, - 2, - 5 ,- 8, - 17 dir.

7. 260 sayısının asal olmayan tam bölenlerinin sayısı kaçtır?

Çözüm:

$260=26.10=2.13.2.5=2^2.5.13$ olduğuna göre,

260 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı,

$(2+1).(1+1).(1+1)=12$ dir.

260 ın tam sayı bölenlerinin sayısı, $2.12=24$ tür.

260 sayısının 3 tane asal böleni vardır.

Buna göre, 260 sayısının asal olmayan tam bölenlerinin sayısı, $24-3=21$ dir.

8. a ve b pozitif tam sayılar ve

$a.b-2.a-14=0$

olduğuna göre, b nin en küçük değerini almasını sağlayan a, aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) [13, 15] B) [10, 12] C) [7, 8] D) [4, 6] E) [1, 3]

Çözüm:

a ve b pozitif tam sayılar olduğuna göre,

$a.b - 2.a - 14 = 0 \Rightarrow a.(b - 2) = 14$

$$\Rightarrow a = \frac{14}{b-2} \text{ dir.}$$

a pozitif tam sayı olduğu için, $b - 2$ sayısı 14, 7, 2, 1 değerlerinden birini alabilir.

Buna göre, b nin en küçük değeri almasını sağlayan a değeri,

$b - 2 = 1$ ise, $b = 3$ ve $a = \frac{14}{1} = 14$ tür.

$14 \in [13{,}15]$ tir.

9. 540 ve 720 sayılarını bölen en büyük sayı A ve bu iki sayıya bölünebilen en küçük sayı B olduğuna göre, $A + B$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{array}{cc|c} 540 & 720 & 10 \\ 54 & 72 & 18 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

540 ve 720 sayılarını bölen en büyük sayı,

$e.b.o.b.(540;720) = A$ dır.

540 ve 720 sayılarının katı olan en küçük sayı,

$e.k.o.k.(540;720) = B$ dir.

$A = e.b.o.b.(540;720) = 10.18 = 180$ ve

$B = e.k.o.k.(540;720) = 10.18.4.3 = 2160$ olduğundan,

$A + B = 180 + 2160 = 2340$ bulunur.

10. 250 den küçük, hem 8 hem de 6 ile tam bölünebilen kaç pozitif tam sayı vardır?

Çözüm:

Hem 8 hem de 6 ile bölünebilen sayılar

$E.k.o.k.(8;6) = 24$ e bölünebilir. Buna göre,

250 den küçük 24 e bölünebilen sayılar;

24, 28, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240 dır.

Bu sayıları 24 ile bölecek olursak,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 olur.

Buna göre, 250 den küçük, hem 8 hem de 6 ile tam bölünebilen pozitif tam sayılar 10 tanedir.

11. a, b, c birbirinden farklı asal sayılardır.

$A = a.b^2.c^3$ ve $B = b.c^2$

olduğuna göre, $\dfrac{e.k.o.k.(A;B)}{e.b.o.b.(A;B)}$ yi bulunuz.

Çözüm:

a, b, c birbirinden farklı asal sayılar ve

$A = a.b^2.c^3$ ve $B = b.c^2$ dir.

Buna göre,

$\dfrac{e.k.o.k.(A;B)}{e.b.o.b.(A;B)} = \dfrac{a.b^2.c}{b.c^2} = a.b.c$ bulunur.

12. $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ sayılarına bölündüğünde sonucu tam sayı olan en küçük pozitif tam sayı kaçtır?

Çözüm:

$\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ ile bölünebilen sayı a olsun.

Buna göre,

$\frac{a}{\frac{4}{5}}$, $\frac{a}{\frac{5}{6}}$, $\frac{a}{\frac{6}{7}}$ sayıları birer tam sayıdır.

Bu durumda, $\frac{5a}{4}$, $\frac{6a}{5}$, $\frac{7a}{6}$ sayıları da birer tam sayısıdır.

Öyleyse a nın en küçük değeri;

$a = e.k.o.k.(4;5;6) = 60$ tır.

13. Boyutları 24, 36, 48 olan bir dikdörtgenler prizması biçimindeki bir kutu içine, en büyük kenarlı, eşit hacimli küp biçimindeki kutulardan hiç boşluk kalmayacak şekilde en az kaç tane yerleştirilebilir?

Çözüm:

Küp biçimindeki kutunun bir kenarı a olsun.

Buna göre, a sayısı, dikdörtgenler prizması biçimindeki kutunun kenarlarının e.b.o.b. u dur.

Yani, $a = e.b.o.b.(24;36;48) = 12$ dir.

$\text{Küplerin Sayısı} = \frac{\text{Prizmanin Hacmi}}{\text{Kübün Hacmi}} = \frac{24.36.48}{12.12.12} = 24$ tür.

14. a, b, c ve x pozitif tam sayılardır.

$x = 3a + 2 = 4b + 1 = 6c - 1$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$x = 3a + 2 = 4b + 1 = 6c - 1$ olduğuna göre,

$x + 7 = 3a + 9 = 4b + 8 = 6c + 6$

$x + 7 = 3.(a + 3) = 4.(b + 2) = 6.(c + 1)$ dir.

Öyleyse, $x + 7$ sayısının en küçük değeri 3, 4 ve 6 nın e.k.o.k. u dur.

Buna göre,

$x + 7 = e.k.o.k.(3;4;6) = 12$

$x + 7 = 12 \Rightarrow x = 12 - 7 = 5$ tir.

15. Çakır, misketlerini altışar altışar, sekizer sekizer ve onar onar saydığında hep 3 misketi arttığına göre, Çakır'ın en az kaç misketi vardır?

Çözüm:

Çakır, misketlerini altışar altışar, sekizer sekizer ve onar onar saydığında hep 3 misketi arttığına göre, Çakırın misket sayısı; en az 6, 8, 10 sayılarının e.k.o.k. undan 3 fazladır.

Buna göre, $e.k.o.k.(6;8;10) = 120$

Çakır'ın misketlerinin sayısı en az $120 + 3 = 123$ tür.

16. x ve y birbirinden farklı birer doğal sayı olmak üzere,

$e.k.o.k.(x;y) = 30$

olduğuna göre, $x + y$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$E.k.o.k.(x;y) = 30$ olduğuna göre, en büyük x değeri $x = 30$ seçilirse (x ile y birbirinden farklı olduğu için) y de en çok $y = 15$ olur.

Buna göre,

$x + y$ toplamının alabileceği en büyük değer $30 + 15 = 45$ olur.

17. $2a + b$ ile $a - b$ aralarında asal iki doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{2a + b}{a - b} = \frac{21}{33}$$

olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?

Çözüm:

$2a + b$ ile $a - b$ sayıları aralarında asaldır. Fakat 21 ve 33 sayıları aralarında asal değildir.

Bunun için önce $\frac{21}{33}$ sayısını sadeleştirerek aralarında asal iki sayının oranı haline getirmeliyiz.

$$\frac{2a+b}{a-b}=\frac{21}{33} \text{ ise, } \frac{2a+b}{a-b}=\frac{7}{11} \text{ olur.}$$

7 ve 11 aralarında asal olduğuna göre,

$2a+b=7$ ve $a-b=11$ olur.

Bu iki eşitliği taraf tarafa toplayarak a yı bulalım:

$2a+b+a-b=7+11 \Rightarrow 3a=18 \Rightarrow a=6$ dır.

18. a ve b birer pozitif reel sayı olmak üzere, $a-2.b$ ile $a+b$ aralarında asaldır.

$2a=13.b$ olduğuna göre, $6.b$ kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

$$2a=13.b$$

$$5.a-3.a=10.b+3.b$$

$$5.a-10.b=3.a+3.b$$

$$5.(a-2.b)=3.(a+b)$$

$$\frac{a-2b}{a+b}=\frac{3}{5}$$

a ve b birer pozitif reel sayı olmak üzere, $a-2.b$ ile $a+b$ aralarında asal ise,

$a-2.b=3$ ve $a+b=5$ tir. Bu iki denklemden ikincisinden birincisi taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(a+b)-(a-2.b)=5-3$$

$$3b=2$$

$$6b=4 \quad \text{olur.}$$

2.Yol

$$2a=13.b$$

$\frac{a}{b}=\frac{13}{2}$ ise, ($a=13.k$ ve $b=2.k$) dir.

a ve b birer pozitif reel sayı olmak üzere, $a-2.b$ ile $a+b$ aralarında asal ise,

$$\frac{a-2b}{a+b}=\frac{13k-2.2k}{13k+2k}=\frac{9k}{15k}=\frac{3}{5} \text{ tir.}$$

Bu durumda $a-2.b=3$ ve $a+b=5$ tir. Bu iki denklemden ikincisinden birincisi taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(a+b)-(a-2.b)=5-3$$

$$3b=2$$

$$6b=4 \quad \text{olur.}$$

19. m ve n doğal sayı olmak üzere,

$$7!=m.2^n$$

eşitliğini sağlayan en büyük n değeri kaçtır?

Çözüm:

$m.2^n=7!$ ifadesinde n nin en büyük değerini alması için 7! Sayısının çarpanları arasında 2 nin kaç tane olduğunu bulmalıyız.

$$m.2^n=7!=7.6.5.4.3.2.1$$

$$=7.3.2.5.2.2.3.2.1=7.3^2.5.2^4$$

olduğuna göre, $2^n=2^4$ ise, $n=4$ olur.

20. $x=4!+6!$ olduğuna göre, x i tam bölen en büyük asal sayı kaçtır?

Çözüm:

$$x=4!+6!=4!+4!.5.6=4!.(1+30)$$

$$x=4!.31$$

olduğuna göre, x i tam bölen en büyük asal sayı 31 dir.

21. n , pozitif tam sayıdır.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

A) $n!-(n+4)!$ B) $(n+2)!+4^n$

C) $n^5+6n+n!$ D) $(n+1)!-3^n$

E) n^5+n^3+n

Çözüm:

$n=2$ için seçenekleri inceleyelim.

A) $n!-(n+4)!=2-6!=2-720=-718$ çift sayıdır.

B) $(n+2)!+4^n=24+16=40$ çift sayıdır.

C) $n^5+6n+n!=32+12+2=46$ çift sayıdır.

D) $(n+1)!-3^n=6-9=-3$ tek sayıdır.

E) $n^5+n^3+n=32+8+2=42$ çift sayıdır.

22. x ve y pozitif doğal sayılar olmak üzere,

$$24.x=y^2$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$24.x=y^2$ olmak üzere,

$24=2^2.2.3$ olduğuna göre,

$2^2.2.3.x$ in bir tam kare olması için x in en az, 2.3 olması gerekir.

Buna göre, $x=2.3=6$ olur.

Buradan,

$$y^2=2^2.2.3.(2.3)=2^2.2^2.3^2=(2.2.3)^2=12^2$$

$y^2=12^2$ ise, $y=12$ olur.

Buna göre, $x+y$ toplamı en az, $6+12=18$ dir.

23. a ve b pozitif tam sayılardır.

$$b=\frac{a^2+20}{a}$$

olduğuna göre, a nın alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm:

$$b=\frac{a^2+20}{a}=a+\frac{20}{a}$$

a ve b pozitif tam sayı olduğu için, yukarıdaki eşitlikte a sayısı 20 nin pozitif tam bölenlerinin sayısı kadar değer alabilir.

$20=2^2.5^1$ olduğu için, a sayısı $(2+1).(1+1)=6$ farklı pozitif tam sayı değeri (1, 2, 4, 5, 10, 20 değerlerini) alabilir.

Buna göre, a nın alabileceği 6 farklı değer vardır.

24. $x=2.(12)^a$ sayısını tam bölen sayılar 36 tane olduğuna göre, a doğal sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$x=2.(12)^a=2.(4.3)^a=2.(2^2.3)^a$$

$$=2.2^{2a}.3^a=2^{2a+1}.3^a$$

olduğuna göre, x in tam bölenlerinin sayısı 36 ise,

$$2.(2.a+1+1).(a+1)=36$$

$$2.(2.a+2).(a+1)=36$$

$$2.2.(a+1).(a+1)=36 \Rightarrow 4.(a+1)^2=36$$

$$\Rightarrow (a+1)^2=9$$

$$\Rightarrow a+1=3 \Rightarrow a=2 \text{ dir.}$$

25. a ve b pozitif tam sayılardır.

$$b = \frac{a^2 + 11}{a + 1}$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 11 & a + 1 \\ \underline{-\; a^2 + a} & \overline{a - 1} \\ -a + 11 & \\ \underline{-\; -a - 1} & \\ 12 & \end{array}$$

olduğuna göre, $b = \frac{a^2 + 11}{a + 1} = a - 1 + \frac{12}{a + 1}$ dir.

Buna göre, $a + 1$ sayısı 12 yi tam bölmelidir.

Bu durumda, a nın alabileceği değerler toplamı,

$11 + 5 + 3 + 2 + 1 = 22$ dir.

2.Yol

$$b = \frac{a^2 + 11}{a + 1} = \frac{a^2 - 1 + 12}{a + 1} = \frac{a^2 - 1}{a + 1} + \frac{12}{a + 1}$$

$$b = \frac{(a + 1).(a - 1)}{a + 1} + \frac{12}{a + 1} = a - 1 + \frac{12}{a + 1}$$

olduğuna göre, $a + 1$ sayısı 12 yi tam bölmelidir.

Bu durumda, a nın alabileceği değerler toplamı,

$11 + 5 + 3 + 2 + 1 = 22$ dir.

26. A ve B pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{A}{8} + B = 5$$

olduğuna göre, A nın en büyük değeri, en küçük değerinden kaç fazladır?

Çözüm:

A ve B pozitif tam sayılar olmak üzere, verilen eşitliğe göre,

B en küçük ise A en büyük değerini alır.

$B = 1$ için, $\frac{A}{8} + 1 = 5$ ise, $\frac{A}{8} = 4 \Rightarrow A = 32$ dir.

B en büyük ise A en küçük değerini alır.

$B = 4$ için, $\frac{A}{8} + 4 = 5$ ise, $\frac{A}{8} = 1 \Rightarrow A = 8$ dir.

A nın en büyük değeri, en küçük değerinden, 32 – 8 = 24 fazladır.

27. $2^{2n-1}.3^{2n+1}$ sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı 120 olduğuna göre, n doğal sayısı kaçtır?

Çözüm:

$2^{2n-1}.3^{2n+1}$ sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı 120 olduğuna göre,

$$(2n - 1 + 1).(2n + 1 + 1) = 120$$

$$2n.(2n + 2) = 120$$

$$2n.2.(n + 1) = 120$$

$$n.(n + 1) = 30$$

$$n.(n + 1) = 5.6$$

olduğu için, $n = 5$ tir

28. 360 sayısının asal olmayan tam bölenlerinin sayısı kaçtır?

Çözüm:

$360 = 10.36 = 5.2.2.2.3.3 = 2^3.3^2.5^1$

olmak üzere, 360 sayısının tam bölenlerinin sayısı,

$2.(3 + 1).(2 + 1).(1 + 1) = 48$ dir.

360 sayısının asal bölenleri 2, 3, 5 olmak üzere 3 tanedir.

Buna göre, 360 sayısının asal olmayan tam bölenlerinin sayısı $48 - 3 = 45$ tanedir.

29. 175 ve 127 sayılarını böldüğünde 7 kalanını veren en büyük doğal sayının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm:

175 ve 127 sayılarını böldüğünde 7 kalanını veren en büyük doğal sayı x olsun.

Verilen sayılardan 7 kalanını ayrı ayrı çıkardığımızda elde sayıların e.b.o.b. u, x sayısını vereceğinden,

$175 - 7 = 168$

$127 - 7 = 120$

$x = e.b.ob.(168;120) = 24$ tür.

Bu durumda x in rakamları toplamı, $2 + 4 = 6$ dır.

30. 12, 16 ve 24 ile bölündüğünde daima 7 kalanını veren en küçük doğal sayı kaçtır?

Çözüm:

12, 16 ve 24 ile bölündüğünde daima 7 kalanını veren en küçük doğal sayı x olsun.

Öyleyse, $x - 7$ sayısı 12, 16 ve 24 ile tam bölünür.

Buna göre, $x - 7$ sayısı 12, 16 ve 224 ün e.k.o.k. u dur.

$x - 7 = e.k.o.k.(12;16;24)$ ise,

$x - 7 = e.k.o.k.(12;16;24) = 48$

$x = 48 + 7 = 55$ tir.

31. 9 ile bölündüğünde 7 kalanını, 12 ile bölündüğünde 10 kalanını, 15 ile bölündüğünde 13 kalanını veren en küçük doğal sayının rakamları çarpımı kaçtır?

Çözüm:

İstenilen sayı x olsun.

Buna göre,

$9 - 7 = 2$

$12 - 10 = 2$

$15 - 13 = 2$

olduğu için, $x + 2$ sayısı hem 9 ile, hem 12 ile, hem de 15 ile tam olarak bölünür.

Yani $x + 2$ sayısı, 9, 12, ve 15 sayılarının ek.k.o.k. u dur.

Öyleyse,

$x + 2 = e.k.o.k.(9;12;15) = 178$ dir.

Buna göre, x in rakamları çarpımı, $1.7.8 = 56$ dır.

32. x, y, z pozitif tam sayılardır.

$A = 6x - 1 = 8y + 1 = 9z + 2$

olduğuna göre, üç basamaklı en küçük A sayısı kaçtır?

Çözüm:

$A = 6x - 1 = 8y + 1 = 9z + 2$ olduğuna göre,

$A + 7 = 6x + 6 = 8y + 8 = 9z + 9$

$A + 7 = 6.(x + 1) = 8.(y + 1) = 9.(z + 1)$ dir.

$A + 7$ sayısı, 6, 8, 9 sayılarının e.k.o.k. unun katıdır.

$E.k.o.k.(6;8;9) = 72$ dir.

A sayısının üç basamaklı en küçük sayı olması için, 72 nin 2 katını $A + 7$ ye eşitlemeliyiz.

$A + 7 = 2.72 \Rightarrow A + 7 = 144$

$\Rightarrow A = 144 - 7 = 137$ bulunur.

33. 36, 48 ve 54 sayıları ile bölündüğünde daima 13 kalanını veren en küçük üç basamaklı doğal sayı kaçtır?

Çözüm:

36, 48 ve 54 sayılarına bölünebilen en küçük üç basamaklı doğal sayı x olsun. Buna göre,

$x = \text{e.k.o.k.}(36;48;54)$ olur.

$$\begin{array}{ccc|c} 36 & 48 & 54 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$x = \text{e.k.o.k.}(36;48;54) = 6.2.4.3.3 = 432$ dir.

Buna göre, 36, 48 ve 54 sayıları ile bölündüğünde daima 13 kalanını veren en küçük üç basamaklı doğal sayı,

$432 + 13 = 445$ tir.

34. 36 litrelik, 54 litrelik ve 72 litrelik üç bidon su ile doludur. Bu bidonlardaki sular karıştırılmadan en büyük hacimli şişelere doldurulacaktır.

Buna göre, en az kaç şişe gerekir?

Çözüm:

Kullanılacak en büyük hacimli şişenin hacmi 36, 54 ve 72 sayılarının e.b.o.b. u dur.

Şişenin hacmi a litre olsun. Buna göre,

$a = \text{e.b.o.b.}(36;54;72) = 18$ dir.

Kullanılacak şişe adedi;

Birinci bidon için; $36 : 18 = 2$,

İkinci bidon için; $54 : 18 = 3$,

Üçüncü bidon için; $72 : 18 = 4$ tür.

Bu durumda toplam şişe adedi, $2 + 3 + 4 = 9$ dur.

35. Rakamları sıfırdan ve birbirinden farklı beş basamaklı en küçük doğal sayının, üç basamaklı en küçük doğal sayı ile bölümünden elde edilen bölüm B, kalan K dir.

Buna göre, $\text{e.b.o.b.}(B;K)$ kaçtır?

Çözüm:

Rakamları sıfırdan ve birbirinden farklı beş basamaklı en küçük doğal sayı 12345 tir. Üç basamaklı en küçük doğal sayı ise 100 dür.

$$\begin{array}{r|l} 12345 & 100 \\ \cline{2-2} -100 & 123 \\ \cline{1-1} 234 & \\ -200 & \\ \cline{1-1} 345 & \\ -300 & \\ \cline{1-1} 45 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 123 & 45 & 3 \\ 41 & 15 & 41 \\ 1 & 15 & 15 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

olduğuna göre,

$\text{E.b.o.b.}(B;K) = \text{e.b.o.b.}(123;45) = 3$ tür.

36. Boyutları 4 cm, 6 cm, 8 cm olan özdeş prizmalar kullanılarak en küçük hacimli bir küp elde ediliyor.

Buna göre, en az kaç prizma kullanılmıştır?

Çözüm:

Küpün bir kenarının uzunluğu a olsun.

Buna göre, $a = \text{e.k.o.k.}(4;6;8)$ dir.

(Küpün bir kenarının uzunluğu, prizmanın kenar uzunluklarının e.k.o.k. u dur.)

$a = \text{e.k.o.k.}(4;6;8) = 24$ tür.

Kullanılan Prizma Sayısı $= \dfrac{\text{KubunHacmi}}{\text{Pr izmaninHacmi}}$

$= \dfrac{24.24.24}{4.6.8} = 72$ dir.

37. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$5.m = 8.n$

$\text{E.b.o.b.}(m;n) = 3$

olduğuna göre, $\text{e.k.o.k.}(m;n)$ kaçtır?

Çözüm:

m, n, k pozitif tam sayılar olmak üzere,

$5.m = 8.n$ ise, $m = 8.k$ ve $n = 5.k$ dir.

$$\begin{array}{cc|c} 8.k & 5.k & k \\ 8 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

olduğuna göre,

$E.b.o.b.(m;n) = E.b.o.b.(8.k;5.k) = k$ dir.

$E.b.o.b.(m;n) = k$ ve $E.b.o.b.(m;n) = 3$ ise $k = 3$ tür.

$E.k.o.k.(m;n) = E.k.o.k.(8.k;5.k) = k.8.5 = 3.8.5 = 120$ dir.

38. k, 1 den büyük pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$E.b.o.b.(93 - k;128 - k;149 - k) = 7$

olduğuna göre, k nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$E.b.o.b.(93 - k;128 - k;149 - k) = 7$ ise,

$93 - k$, $128 - k$, $149 - k$ sayıları 7 ile tam bölünür.

$k = 2$ için,

$93 - 2 = 91 = 7.13$

$128 - 2 = 126 = 7.18$

$149 - 2 = 147 = 7.21$ olduğundan, $k = 2$ dir.

39. a ve b pozitif tam sayılarının en büyük ortak böleni 2 dir.

$a.b = 900$

olduğuna göre, kaç farklı (a,b) sıralı ikilisi vardır?

Çözüm:

a ve b sayılarının en büyük ortak böleni 2 ve c ile d aralarında asal olmak üzere,

$\frac{a}{b} = \frac{2.c}{2.d}$ ve $a = 2.c$, $b = 2.d$ dir.

$a.b = 900$

$2.c.2.d = 900 \Rightarrow c.d = 225$ tir.

Buna göre, c ve d nin alabileceği değerleri bulalım;

$c.d = 225$ ise, $c = 1$ ve $d = 225$ tir.

$c.d = 225$ ise, $c = 225$ ve $d = 1$ dir.

$c.d = 225$ ise, $c = 9$ ve $d = 25$ tir.

$c.d = 225$ ise, $c = 25$ ve $d = 9$ dur.

c ve d nin alabileceği dört değer olduğuna göre, a ve b nin de alabileceği dört değer vardır.

40. x , pozitif bir tam sayı ve

$E.b.o.b.(24;30;x) = 6$

$E.k.o.k.(24;30;x) = 360$

olduğuna göre, x in alabileceği en büyük değer, en küçük değerden kaç fazladır?

Çözüm:

$E.b.o.b.(24;30;x) = 6 = 2^1.3^1$

$E.k.o.k.(24;30;x) = 360 = 2^3.3^2.5^1$

x , pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$24 = 2^3.3^1$,

$30 = 2^1.3^1.5^1$

$x = 2^a.3^b.5^c$ dir.

24, 30, x sayılarının en büyük ortak bölenini bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak olan asal çarpanlardan en küçük üslüler çarpılır. En küçük ortak katı bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Asal çarpanlardan en büyük üslüler çarpılır.

Bu durumda,

x sayısının asal çarpanlarından 2 nin üssü olan a sayısı 1, 2, 3 olabilir.

x sayısının asal çarpanlarından 3 ün üssü olan b sayısı kesinlikle 2 olmalıdır.

x sayısının asal çarpanlarından 5 in üssü olan c sayısı 0, 1 olabilir.

Buna göre,

x sayısı en az, $x = 2^1.3^2.5^0 = 18$ dir.

x sayısı en fazla, $x = 2^3.3^2.5^1 = 360$ tır.

x in alabileceği en büyük değer, en küçük değerden $360 - 18 = 342$ fazladır.

41. Eni 240 m, boyu 600 m olan dikdörtgen biçimindeki bir arsa, birbirine eş, karesel parsellere ayrılarak parsellerin köşelerine birer tane ağaç dikilecektir.

Buna göre, en az kaç ağaç gerekir?

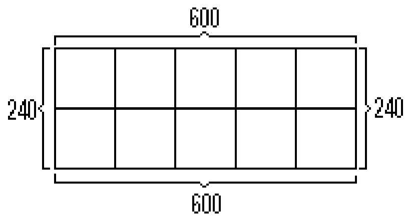
Çözüm:

Eni 240 m, boyu 600 m olan dikdörtgen biçimindeki bir arsa, birbirine eş, karesel parsellere ayrılarak parsellerin köşelerine birer tane ağaç dikilecek ise, ağaç sayısının en az olması için, parsellerden birinin bir kenar uzunluğu 240 ile 600 ün e.b.o.b. u olmalıdır.

$E.b.o.b.(240;600) = 120$ dir.

Parsel sayısı, (600 : 120) . (240 : 120) = 5. 2 = 10 dur.

Köşe Sayısı, (5 + 1) . (2 + 1) = 6 . 3 = 18 dir.



KONU BİTMİŞTİR.
