

ÇARPIM SEMBOLÜ

A. Tanım

$r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k) = a_k$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. Bu düşünce ile oluşturulan $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$ terimlerinin çarpımını,

$a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_n = \prod_{k=r}^n a_k$ biçiminde gösteririz.

Bu gösterimde kullandığımız \prod sembolüne çarpım sembolü denir.

Örnek:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{n+20} = \prod_{k=1}^{n+20} a_k$$

Örnek:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots \cdot 12 = \prod_{a=1}^{12} a$$

Örnek:

$$5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 23 = \prod_{k=3}^{12} (2k-1)$$

Örnek:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{60}{61} = \prod_{k=1}^{30} \frac{2k}{2k+1}$$

Örnek:

$$\begin{aligned} \prod_{a=7}^{25} 2^{a+1} &= 2^7 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot \dots \cdot 2^{25} + 1 \\ &= 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} \cdot \dots \cdot 2^{25} \cdot 2^{26} \end{aligned}$$

Örnek:

$$\prod_{m=12}^{25} \log(3m) = \log 36 \cdot \log 39 \cdot \log 42 \cdot \dots \cdot \log 75$$

Örnek:

$$\begin{aligned} &14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 23 \cdot 26 \\ &= (3 \cdot 4 + 2) \cdot (3 \cdot 5 + 2) \cdot (3 \cdot 6 + 2) \cdot (3 \cdot 7 + 2) \cdot (3 \cdot 8 + 2) \end{aligned}$$

$$= \prod_{a=4}^8 (3a+2)$$

Örnek:

$$f(x) = 3x - 2 \text{ olduğuna göre } \prod_{k=-3}^{-1} f(2k) \text{ ifadesinin eşitini}$$

bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = 3x - 2 \text{ olduğuna göre,}$$

$$f(-6) = 3 \cdot (-6) - 2 = -20$$

$$f(-4) = 3 \cdot (-4) - 2 = -14$$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 = -8 \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \prod_{k=-3}^{-1} f(2k) &= f(-6) \cdot f(-4) \cdot f(-2) \\ &= (-20) \cdot (-14) \cdot (-8) = -2240 \end{aligned}$$

Kural

$$1. \quad \prod_{k=1}^n k = n!$$

$$2. \quad \prod_{k=a}^n k = \frac{n!}{(a-1)!}$$

Örnek:

$$\prod_{k=1}^{50} k = 1.2.3.4 \dots 50 = 50!$$

Örnek:

$$\prod_{k=21}^{57} k = 21.22.23 \dots 57 = \frac{57!}{(21-1)!} = \frac{57!}{20!}$$

Kural

$$\prod_{k=1}^n a^k = a^{1+2+3+\dots+k} = a^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

Örnek:

$$\prod_{k=1}^{12} 8^k = 8^1 \cdot 8^2 \cdot 8^3 \dots 8^{12} = 8^{\frac{12 \cdot 13}{2}} = 8^{78} = 2^{234}$$

Örnek:

$$\prod_{k=6}^{30} \left(1 - \frac{1}{k-2}\right) \text{ ifadesinin değerini bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=6}^{30} \left(1 - \frac{1}{k-2}\right) = \prod_{k=6}^{30} \frac{k-3}{k-2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{27}{28} = \frac{3}{28}$$

Örnek:

$$\prod_{k=7}^{48} \log_k (k+1) \text{ ifadesinin değerini bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{k=7}^{48} \log_k (k+1) &= \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10 \dots \log_{48} 49 \\ &= \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2 \end{aligned}$$

B. Çarpımı Sembolünün Özellikleri

Özellik

$$1. \prod_{k=1}^n a = a.a.a \dots a = a^n$$

$$2. \prod_{k=p}^n a = a^{n-p+1}$$

Örnek:

$$\prod_{k=1}^{100} 25 = 25.25.25 \dots 25 = 25^{100} = 5^{200}$$

Örnek:

$$\prod_{k=-5}^{32} 3 = 3^{32 - (-5) + 1} = 3^{38}$$

Özellik

$$\prod_{k=1}^n (b \cdot a_k) = b^n \cdot \prod_{k=1}^n a_k$$

Örnek:

$$\prod_{k=1}^4 (2k^2) \text{ çarpımının değerini bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^4 (2k^2) = 2^4 \cdot \prod_{k=1}^4 k^2 = 16 \cdot (1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2) = 9216$$

Özellik

$$\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^p a_k \cdot \prod_{k=p+1}^n a_k$$

Örnek:

$$\prod_{k=1}^{30} k = \prod_{k=1}^{12} k \cdot \prod_{k=13}^{30} k$$

Örnek:

$\prod_{k=7}^{25} (k+1)$ çarpımının değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^6 (k+1) \cdot \prod_{k=7}^{25} (k+1) = \prod_{k=1}^{25} (k+1)$$

$$\prod_{k=7}^{25} (k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{25} (k+1)}{\prod_{k=1}^6 (k+1)} = \frac{2.3.4.5 \dots 26}{2.3.4.5.6.7} = \frac{26!}{7!}$$

Özellik

1. $\prod_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k$

2. $\prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n b_k}$

Örnek:

$\prod_{k=1}^{32} (k^3 \cdot 3^k)$ çarpımının değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{32} (k^3 \cdot 3^k) &= \prod_{k=1}^{32} k^3 \cdot \prod_{k=1}^{32} 3^k \\ &= (1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \dots 32^3) \cdot (3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \dots 3^{32}) \end{aligned}$$

$$= (1.2.3 \dots 32)^3 \cdot (3^{1+2+3+\dots+32})$$

$$= (32!)^3 \cdot 3^{528}$$

Örnek:

$\prod_{k=1}^3 \left(\frac{k^2}{k+1} \right)$ çarpımının değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^3 \left(\frac{k^2}{k+1} \right) = \frac{\prod_{k=1}^3 k^2}{\prod_{k=1}^3 (k+1)} = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Özellik

1. $\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r}$

2. $\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p+r}^{n+r} a_{k-r}$

Örnek:

$\prod_{k=6}^{17} (\sqrt{2})^{k-5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=6}^{17} (\sqrt{2})^{k-5} = \prod_{k=6-5}^{17-5} (\sqrt{2})^{k+5-5}$$

$$= \prod_{k=1}^{12} (\sqrt{2})^k = (\sqrt{2})^1 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^3 \dots (\sqrt{2})^{12}$$

$$= (\sqrt{2})^{1+2+3+\dots+12} = (\sqrt{2})^{\frac{12 \cdot 13}{2}}$$

$$= (\sqrt{2})^{78} = 2^{39}$$

Örnek:

$$\prod_{k=-3}^{29} \log_{k+7}^{(k+4)} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} & \prod_{k=-3}^{29} \log_{k+7}^{(k+4)} \\ &= \log_4^1 \cdot \log_5^2 \cdot \log_6^3 \dots \log_{36}^{33} \\ &= 0 \cdot \log_5^2 \cdot \log_6^3 \dots \log_{36}^{33} = 0 \end{aligned}$$

Özellik

$$\prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^m a_{ki} \right) = \prod_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^n a_{ik} \right)$$

Örnek:

$$\prod_{m=2}^3 \prod_{n=3}^4 (m+n) \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{m=2}^3 \prod_{n=3}^4 (m+n) &= \prod_{m=2}^3 (m+3) \cdot (m+4) \\ &= [(2+3) \cdot (2+4)] [(3+3) \cdot (3+4)] \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 1260 \end{aligned}$$

Örnek:

$$\sum_{n=1}^2 \prod_{m=1}^3 (m \cdot n) \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 \prod_{m=1}^3 (m \cdot n) &= \sum_{n=1}^2 [(1 \cdot n) \cdot (2 \cdot n) \cdot (3 \cdot n)] = \sum_{n=1}^2 6 \cdot n^3 \\ &= 6 \cdot 1^3 + 6 \cdot 2^3 = 6 + 48 = 54 \end{aligned}$$

Örnek:

$$\prod_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (a+b) - \sum_{b=1}^2 \prod_{a=1}^2 (a+b) \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (a+b) &= \prod_{a=1}^2 [(a+1) + (a+2)] \\ &= \prod_{a=1}^2 (2a+3) = (2 \cdot 1 + 3) \cdot (2 \cdot 2 + 3) \\ &= 5 \cdot 7 = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^2 \prod_{a=1}^2 (a+b) &= \sum_{b=1}^2 [(1+b) \cdot (2+b)] \\ &= [(1+1) \cdot (2+1)] + [(1+2) \cdot (2+2)] \\ &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

$$\prod_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (a+b) - \sum_{b=1}^2 \prod_{a=1}^2 (a+b) = 35 - 18 = 17$$

Örnek:

$$\prod_{m=6}^9 \prod_{n=4}^6 2^{2m-3n} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{m=6}^9 \prod_{n=4}^6 2^{2m-3n} &= \prod_{m=6}^9 (2^{2m-12} \cdot 2^{2m-15} \cdot 2^{2m-18}) \\ &= \prod_{m=6}^9 (2^{6m-45}) \\ &= 2^{36-45} \cdot 2^{42-45} \cdot 2^{48-45} \cdot 2^{54-45} = 2^0 = 1 \end{aligned}$$

Çözümlü Sorular

1. $\prod_{k=1}^{50} \frac{3k+2}{3k-1}$ çarpımının değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{50} \frac{3k+2}{3k-1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{11}{8} \cdots \frac{149}{146} \cdot \frac{152}{149} = \frac{152}{2} = 76$$

2. $\left(\frac{27}{8}\right)^{36-n} = \prod_{n=0}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{36-n} = \prod_{n=0}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{108-3n} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{2}{3}\right)^9$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-108} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1+2+3+\dots+9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-108} = \left(\frac{2}{3}\right)^{45} \Rightarrow 3n-108 = 45$$

$$\Rightarrow 3n = 153 \Rightarrow n = 51 \text{ bulunur.}$$

3. $\prod_{k=-3}^{12} (k^2 - 3k - 40)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\prod_{k=-3}^{12} (k^2 - 3k - 40) = \prod_{k=-3}^{12} [(k-8)(k+5)]$$

$$= \prod_{k=1}^{16} (k-12) \cdot \prod_{k=1}^{16} (k+1)$$

$$= [(-11)(-10)\dots 0\dots 4][2.3.4\dots 17]$$

$$= 0.2.3.4\dots 17 = 0$$

4. $\frac{\prod_{k=-5}^6 2^{(k^3)}}{\sum_{k=-10}^8 8}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

$$\prod_{k=-5}^6 2^{(k^3)} = 2^{(-5^3) + (-4^3) + \dots + 4^3 + 5^3 + 6^3}$$

$$= 2^{6^3} = 2^{216}$$

$$\sum_{k=-10}^{-3} 8 = (-3+10+1) \cdot 8 = 64 = 2^6$$

$$\frac{\prod_{k=-5}^6 2^{(k^3)}}{\sum_{k=-10}^8 8} = \frac{2^{216}}{2^6} = 2^{210}$$

5. $\prod_{k=5}^{32} \frac{-8}{a} \cdot \frac{a-1}{a}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\prod_{k=5}^{32} \frac{-8}{a} \cdot \frac{a-1}{a} = \prod_{k=5}^{32} \frac{-24}{-23} \cdot \frac{-23}{-22} \cdots \frac{-8}{-7} \cdot \frac{-9}{-8}$$

$$= \prod_{k=5}^{32} \frac{-24}{-8} = \prod_{k=5}^{32} 3 = 3^{32-5+1} = 3^{28}$$

6. $\sum_{a=1}^{n+2} \prod_{b=0}^n (b+1) = 20!$ olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{a=1}^{n+2} \prod_{b=0}^n (b+1) = \sum_{a=1}^{n+2} [1.2.3\dots(n+1)]$$

$$\sum_{a=1}^{n+2} (n+1)! = (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

$$\sum_{a=1}^{n+2} \prod_{b=1}^n (b+1) = (n+2)! = 20! \Rightarrow n+2 = 20 \Rightarrow n = 18$$

7. $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\prod_{n=1}^2 (x_n + 1) = 12 \text{ olduğuna göre, } a \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\text{Kökler toplamı; } x_1 + x_2 = 2,$$

$$\text{Kökler çarpımı; } x_1 \cdot x_2 = a + 1$$

$$\prod_{n=1}^2 (x_n + 1) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$$

$$= (x_1 \cdot x_2) + (x_1 + x_2) + 1$$

$$= a + 1 + 2 + 1 = a + 4$$

$$\prod_{n=1}^2 (x_n + 1) = 12 \Rightarrow a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8 \text{ olur.}$$

8. $\prod_{k=3}^n (1 - \frac{1}{k^2})$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\prod_{k=3}^n (1 - \frac{1}{k^2}) = \prod_{k=3}^n (\frac{k^2 - 1}{k^2}) = \prod_{k=3}^n \frac{k-1}{k} \cdot \prod_{k=3}^n \frac{k+1}{k}$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n-1}{n} \right] \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{n+1}{n} \right]$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{n+1}{3} = \frac{2n+2}{3n}$$

9. $\prod_{k=2}^{25} \log_{k+1}(k^2 + 4k + 4)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\prod_{k=2}^{25} \log_{k+1}(k^2 + 4k + 4) = \prod_{k=2}^{25} \log_{k+1}(k+2)^2$$

$$= \prod_{k=2}^{25} 2 \cdot \log_{k+1}(k+2) = 2^{24} \cdot \prod_{k=2}^{25} \log_{k+1}(k+2)$$

$$= 2^{24} \cdot [\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{26} 27]$$

$$= 2^{24} \cdot \log_3 27 = 2^{24} \cdot \log_3 3^3 = 3 \cdot 2^{24}$$

10. $\prod_{k=1}^n 2^{\frac{k}{3}} < 128$ eşitsizliğini sağlayan n doğal sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^n 2^{\frac{k}{3}} < 128 \text{ olduğuna göre,}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdots 2^{\frac{n}{3}} < 128 = 2^7$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1+2+3+4+\dots+n}{3}} < 2^7$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{n(n+1)}{6}} < 2^7 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{6} < 7$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 42 < 0 \Rightarrow (n+7)(n-6) < 0$$

$$\Rightarrow -7 < n < 6 \text{ olur.}$$

Bu koşula uygun en büyük doğal sayı 5 tir.

$$11. a_n = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k} \text{ olduğuna göre } a_{10} \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$a_{10} = \prod_{k=1}^{10} \frac{2}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{10} = \frac{2^{10}}{10!} \text{ bulunur.}$$

$$12. \prod_{a=2b=1}^c \sum_{b=1}^a \frac{1}{b(b+1)} = \frac{1}{16} \text{ olduğuna göre } c \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{a=2b=1}^c \sum_{b=1}^a \frac{1}{b(b+1)} &= \prod_{a=2}^c \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{a \cdot (a+1)} \right) \\ &= \prod_{a=2}^c \frac{a}{a+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{c}{c+1} \\ &= \frac{2}{c+1} \end{aligned}$$

$$\prod_{a=2b=1}^c \sum_{b=1}^a \frac{1}{b(b+1)} = \frac{2}{c+1} = \frac{1}{16} \Rightarrow c = 31 \text{ olur.}$$

$$13. \sum_{n=-21}^{-3} \prod_{x=7}^{11} \cot(5x) \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\cot 55 = \tan 35 \text{ ise, } \cot 35 \cdot \cot 55 = \cot 55 \cdot \tan 35 = 1 \text{ dir.}$$

$$\cot 50 = \tan 40 \text{ ise, } \cot 40 \cdot \cot 50 = \cot 40 \cdot \tan 40 = 1 \text{ dir.}$$

$$\cot 45 = 1 \text{ dir.}$$

$$\sum_{n=-21}^{-3} \prod_{x=7}^{11} \cot(5x)$$

$$= \sum_{n=-21}^{-3} (\cot 35 \cdot \cot 40 \cdot \cot 45 \cdot \cot 50 \cdot \cot 55)$$

$$= \sum_{n=-21}^{-3} (1 \cdot 1 \cdot 1) = \sum_{n=-21}^{-3} 1 = (-3 + 21 + 1) \cdot 1 = 19$$

$$14. \prod_{a=1}^5 \prod_{a=1}^4 \prod_{a=1}^3 \prod_{a=1}^2 2 \text{ ifadesinin sonucunu bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\prod_{a=1}^5 \prod_{a=1}^4 \prod_{a=1}^3 \prod_{a=1}^2 2 = \prod_{a=1}^5 \prod_{a=1}^4 \prod_{a=1}^3 (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$= \prod_{a=1}^5 \prod_{a=1}^4 \prod_{a=1}^3 2^2$$

$$= \prod_{a=1}^5 \prod_{a=1}^4 (2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2)$$

$$= \prod_{a=1}^5 \prod_{a=1}^4 2^6$$

$$= \prod_{a=1}^5 (2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6)$$

$$= \prod_{a=1}^5 2^{24}$$

$$= 2^{24} \cdot 2^{24} \cdot 2^{24} \cdot 2^{24} = 2^{120}$$

$$15. \prod_{k=3}^{42} \frac{k^2 + 5k + 4}{k^2 + 7k + 6} \text{ ifadesinin sonucunu bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\frac{k^2 + 5k + 4}{k^2 + 7k + 6} = \frac{(k+1)(k+4)}{(k+1)(k+6)} = \frac{k+4}{k+6} \text{ olduğundan,}$$

$$\prod_{k=3}^{42} \frac{k^2 + 5k + 4}{k^2 + 7k + 6} = \prod_{k=3}^{42} \frac{k+4}{k+6}$$

$$= \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdot \dots \cdot \frac{44}{46} \cdot \frac{45}{47} \cdot \frac{46}{48}$$

$$= \frac{7.8}{47.48} = \frac{7}{282}$$

16. $\prod_{k=3}^n (k^2 - 4) = a \cdot \prod_{k=2}^n (k-1)$ olduğuna göre a nın n türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{k=3}^n (k^2 - 4) &= \prod_{k=3}^n (k-2) \cdot \prod_{k=3}^n (k+2) \\ &= [1.2.3 \dots (n-2)] [5.6.7 \dots (n+2)] \\ &= (n-2)! \cdot \frac{(n+2)!}{4!} \end{aligned}$$

$$\prod_{k=2}^n (k-1) = 1.2.3 \dots (n-1) = (n-1)!$$

$$\prod_{k=3}^n (k^2 - 4) = a \cdot \prod_{k=2}^n (k-1) \text{ olduğuna göre,}$$

$$\Rightarrow (n-2)! \cdot \frac{(n+2)!}{4!} = a \cdot (n-1)!$$

$$\Rightarrow a = \frac{(n-2)! \cdot (n+2)!}{4! \cdot (n-1)!} = \frac{(n-2)! \cdot (n+2)!}{4! \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(n+2)!}{4! \cdot (n-1)} \text{ bulunur.}$$

17. $\prod_{a=2}^c \sum_{b=1}^a \frac{1}{b \cdot (b+1)} = \frac{1}{16}$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\prod_{n=-8}^{12} \sum_{n=1}^{40} [(-1)^n + 2 \cdot n]$$

$$= \prod_{n=-8}^{12} (-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 39 + 40)$$

$$= \prod_{n=-8}^{12} (1+1+1+\dots+1)$$

$$= \prod_{n=-8}^{12} 20 = (12+8+1) \cdot 20 = 420$$

18. $\prod_{a=1}^5 \prod_{b=4}^6 2^{a \cdot b}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\prod_{a=1}^5 \prod_{b=4}^6 2^{a \cdot b} = \prod_{a=1}^5 (2^{4 \cdot a} \cdot 2^{5 \cdot a} \cdot 2^{6 \cdot a})$$

$$= \prod_{a=1}^5 2^{15 \cdot a}$$

$$= 2^{15 \cdot 1} \cdot 2^{15 \cdot 2} \cdot 2^{15 \cdot 3} \cdot 2^{15 \cdot 4} \cdot 2^{15 \cdot 5}$$

$$= 2^{15+30+45+60+75} = 2^{225}$$

19. $f(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ ve $g(x) = \prod_{k=1}^{f(x)} \sqrt{k}$ olduğuna göre $g(8)$ kaçtır?

Çözüm:

$$f(8) = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sum_{k=1}^8 \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{9} - \sqrt{8})$$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$$

$$g(8) = \prod_{k=1}^{f(8)} \sqrt{k} = \prod_{k=1}^2 \sqrt{k} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ olur.}$$

| | |
|--|------------------------|
| | Konu Bitmiştir. |
| | |