TÜME VARIM

Doğal Sayılar Kümesinin Bazı Alt Kümeleri

Doğal Sayılar Kümesi, $N = \{0,1,2,3,...,n,n+1,...\}$ dir.

Sayma Sayıları Kümesi, $N^+ = \{1,2,3,...,n,n+1,...\}$ dir.

Tek Doğal Sayılar Kümesi, $T = \{1,3,5,...,2n-1,...\}$ dir.

Çift Doğal Sayılar Kümesi, $Ç = \{0,2,4,...,2n,...\}$ dir.

Her doğal sayının bir ardışığı vardır.

0 (sıfır) ın ardışığı 1 ,

1'in ardışığı 2,

…

n'in ardışığı n+1 dir.

En küçük doğal sayı 0 (sıfır) dır. Her doğal sayının 1 fazlası, yeni bir doğal sayı olduğundan en büyük doğal sayıdan söz edilemez.

Bir a doğal sayısı için, a ve a dan büyük olan doğal sayıların kümesini N_a ile gösterelim.

$N_a = \{x \;/\; x \in N,\ x \geq a,\ a \in N\}$

$N_a = \{a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ ...\}$ olur.

Buna göre,

$N_6 = \{6,7,8,9,10,11,12,...\}$ dir.

$N_8 = \{8,9,10,11,12,13,14,...\}$ tür.

Tümevarım Yöntemi

Doğal sayılarla ilgili açık önermelerin doğruluğunu ispatlamaya yarayan bu yöntem aşağıdaki teoremden çıkmıştır.

Teorem

$a \in N^+$ ve $D \subset N_a$ olmak üzere;

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a \in D \\ 2) & k \in D \Rightarrow (k+1) \in D \end{array}\right\} \text{ ise } D = N_a \text{ dır.}$$

Ispat

$$\begin{array}{ll} 1) & a \in D \\ 2) & k \in D \Rightarrow (k+1) \in D \end{array}$$ koşullarını sağlansın.

$D = N_a$ olduğunu göstereceğiz.

$D \neq N_a$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $D - N_a \neq \phi$ ve $D' \subset N_a$ elde edilir.

Doğal sayılar kümesi iyi tanımlı olduğundan her alt kümesinin en küçük elemanı vardır.

Özellikle $D' \subset N_a$ olduğundan D' kümesinin en küçük elemanı vardır.

$t \in D'$ elemanı D' kümesinin en küçük elemanı olsun.

Bu durumda,

D' kümesinde t elemanından daha küçük bir eleman yoktur.

$t - 1 < t$ olduğundan $(t-1) \in D'$ dir.

$(t-1) \in D' \Rightarrow (t-1) \in D$ dir.

Hipotez (2) gereğince,

$(t-1) \in D \Rightarrow \left[(t-1)+1\right] = t \in D$ dir.

$t \in D'$ ve $t \in D$ olması bir çelişkidir.

Bu çelişkiye $D \neq N_a$ olduğunu kabul etmemizden kaynaklandı.

Şu halde $D = N_a$ olur.

Doğruluk Kümesi

Bir açık önermeyi doğrulayan değerlerin oluşturduğu kümeye doğruluk kümesi denir.

Örnek:

Sayma sayıları kümesi, $N^{+} = \{1,2,3,...,n,n+1,...\}$ dir

$n \in N^{+}$ bir sayma sayısı olmak üzere,

$P(n) : 2^{n} < 2n + 10$ açık önermesinin doruluk kümesini bulalım.

Çözüm :

$n = 1$ için $P(1) : 2^{1} < 2.1 + 10$ (doğru)

$n = 2$ için $P(2) : 2^{2} < 2.2 + 10$ (doğru)

$n = 3$ için $P(3) : 2^{3} < 2.3 + 10$ (doğru)

$n = 4$ için $P(4) : 2^{4} < 2.4 + 10$ (doğru)

$n = 5$ için $P(5) : 2^{5} < 2.5 + 10$ (yanlış)

$n = 6$ için $P(6) : 2^{6} < 2.6 + 10$ (yanlış)

Görüldüğü gibi; P(1), P(2), P(3), P(4) önermeleri doğrudur.

Buna göre, doğruluk kümesi

D = {1,2,3,4}'tür.

Tümevarım Prensibi

$P(n)$ açık önermesini doğru önerme yapan en küçük sayma sayısı a ve $P(n)$ açık önermesinin doğruluk kümesi D olsun.

$\forall n \in N_a$ için $P(n)$ açık önermesinin doğruluğunu tümevarım yöntemi ile göstermede aşağıdaki yol izlenir.

1. $P(a)$ nın doğru olduğu gösterilir. $(a \in D)$
2. $P(k)$ nın doğru olduğu kabul edilir. $(k \in D)$
3. $P(k)$ nın doğruluğundan hareketle $P(k+1)$ in doğruluğu gösterilir. $(k + 1 \in D)$

Bu durumda, tümevarım yöntemine göre, $D = N_a$ olur.

Başka bir ifadeyle, $\forall n \in N_a$ için $P(n)$ açık önermesinin doğru olur.

$P(n)$ açık önermesini doğru önerme yapan en küçük sayma sayısı a = 1 ise $N_a = N_1 = N^{+}$ olduğundan, $P(n)$ açık önermesinin $\forall n \in N^{+}$ için doğruluğu gösterilir.

Böylece $D = N^{+}$ olduğu gösterilir.

Örnek:

$\forall n \in N^{+}$ için $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n = 1$ için $P(1) : 1 = \frac{1.2}{2} = 1$ doğru, yani $1 \in D$ dir.

b. $n = k$ için $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ olsun. Yani

$k \in D$ olsun.

c. $n = k + 1$ için
$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + ... + (k+1) = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$
önermesinin doğru olduğunu, yani $k + 1 \in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına $k + 1$ eklenirse eşitlik bozulmaz. O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $k + 1$ ilave edersek,

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k.(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$1 + 2 + 3 + ... + (k+1) = \frac{k.(k+1) + 2.(k+1)}{2}$$

$1+2+3+...+(k+1)=\dfrac{(k+1).(k+2)}{2}$ bulunur.

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k+1 \in D$ dir.

Tümevarım yöntemine göre $D=N^+$ olup önerme doğrudur.

Örnek:

$\forall n \in N^+$ için $P(n): 2+4+6+...+2n=n.(n+1)$ önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n=1$ için $P(1): 2=1.(1+1)=2$ doğru, yani $1 \in D$ dir.

b. $n=k$ için $P(k): 2+4+6+...+2k=k.(k+1)$ olsun.

Yani $k \in D$ olsun.

c. $n=k+1$ için

$P(k): 2+4+6+...+2.(k+1)=(k+1).(k+2)$ önermesinin doğru olduğunu, yani $k+1 \in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına $2k+2$ eklenirse eşitlik bozulmaz. O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $2k+2$ ilave edersek,

$2+4+6+...+2k+2.k+2=k.(k+1)+2k+2$

$2+4+6+...+2k+2.(k+2)=k.(k+1)+2.(k+2)$

$2+4+6+...+2.(k+1)=(k+1).(k+2)$ bulunur.

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k+1 \in D$ dir.

Tümevarım yöntemine göre $D=N^+$ olup önerme doğrudur.

Örnek:

$\forall n \in N^+$ için $P(n): 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n=1$ için $P(1): 1=1^2=1$ doğru, yani $1 \in D$ dir.

b. $n=k$ için $P(k): 1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ olsun.

Yani $k \in D$ olsun.

c. $n=k+1$ için

$P(k+1): 1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$
önermesinin doğru olduğunu, yani $k+1 \in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına $2k+1$ eklenirse eşitlik bozulmaz. O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $2k+1$ ilave edersek,

$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$

$1+3+5+...+(2k+1)=(k+1)^2$ bulunur.

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k+1 \in D$ dir.

Tümevarım yöntemine göre $D=N^+$ olup önerme doğrudur.

Örnek:

$\forall n \in N^+$ için $P(n): 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n=1$ için $P(1): 1^2=\dfrac{1.(1+1).(2.1+1)}{6}=1$ doğru, yani $1 \in D$ dir.

b. $n=k$ için

$P(k): 1^2+2^2+3^2+...+k^2=\dfrac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$ olsun.

Yani $k \in D$ olsun.

c. $n = k + 1$ için

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

önermesinin doğru olduğunu, yani $k + 1 \in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına $(k+1)^2$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $(k+1)^2$ ilave edersek,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1).\left[\frac{k.(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

$$= (k+1).\left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}\right] = (k+1).\left(\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}\right)$$

$$= (k+1).\left(\frac{(k+2).(2k+3)}{6}\right) = \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k + 1 \in D$ dir.

Tümevarım yöntemine göre $D = N^+$ olup önerme doğrudur.

Örnek:

$$\forall n \in N^+ \text{ için } P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$$

önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n = 1$ için $P(1) : 1^3 = \left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2 = 1$ doğru, yani $1 \in D$ dir.

b. $n = k$ için $P(k) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k.(k+1)}{2}\right]^2$ olsun. Yani $k \in D$ olsun.

c. $n = k + 1$ için

$$P(k+1) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1).(k+2)}{2}\right]^2$$

önermesinin doğru olduğunu, yani $k + 1 \in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına $(k+1)^3$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $(k+1)^3$ ilave edersek,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k + (k+1)^3 = \left[\frac{k.(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{k^2.(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2.(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2.(k+2)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1).(k+2)}{2}\right]^2$$

Bu da aranan sonuçtur. O halde $k + 1 \in D$ dir.

O halde önerme doğrudur.

Örnek:

$\forall n \in N^{+}$ için $2^2 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^2$ toplamını veren ifadeyi çıkaralım.

Çözüm :

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$$

$$= (2.1)^2 + (2.2)^2 + (2.3)^2 + (2.4)^2 + ... + (2.n)^2$$

$$= 2^2.(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$$

$$= 4.\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} = \frac{2n.(n+1).(2n+1)}{3}$$

olup, bu ifadenin doğruluğu tümevarım yöntemi ile kanıtlanabilir.

Örnek:

$\forall n \in N^{+}$ için $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$ toplamını veren ifadeyi çıkaralım.

Çözüm :

$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = x$ olsun.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ ve

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2 = \frac{2n.(n+1).(2n+1)}{3}$$

ifadeleri göz önünde bulundurularak,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 + (2n)^2 = \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6}$$

$$x + 2^2 + 4^2 + 6^2 ... + (2n)^2 = \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6}$$

$$x + \frac{2n.(n+1).(2n+1)}{3} = \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6}$$

$$x = \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6} - \frac{2n.(n+1).(2n+1)}{3}$$

$$x = \frac{2n.(2n+1).(4n+1) - 4.n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$x = \frac{(2n+1).(8n^2 + 2n - 4n^2 - 4n)}{6}$$

$$x = \frac{(2n+1).(4n^2 - 2n)}{6}$$

$$x = \frac{(2n+1).(2n^2 - n)}{3}$$

$$x = \frac{n.(2n-1).(2n+1)}{3}$$

$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n.(2n-1).(2n+1}{3}$ bulunur.

Bu ifadenin doğruluğu tümevarım yöntemi ile kanıtlanabilir.

Örnek:

$\forall n \in N^{+}$ için

$$P(n) : 1.2 + 3.4 + 5.6 + ... + (2n-1).2n = \frac{n.(n+1).(4n-1)}{3}$$

önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n = 1$ için $P(1) : 1.2 = \frac{1.(1+2).(4.1-1)}{3} = 2$ doğru, yani $1 \in D$ dir.

b. $n = k$ için

$$P(k) : 1.2 + 3.4 + 5.6 + ... + (2k-1).2k = \frac{k.(k+1).(4k-1)}{3}$$

olsun. Yani $k \in D$ olsun.

c. $n = k + 1$ için

$$1.2 + 3.4 + 5.6 + ... + (2k+1).(2k+2) = \frac{(k+1).(k+2).(4k+3)}{3}$$

önermesinin doğru olduğunu, yani $k + 1 \in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına $(2k+1).(2k+2)$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $(2k+1).(2k+2)$ ilave edersek,

$$1.2+3.4+5.6+...+(2k+1).(2k+2)$$

$$=\frac{k.(k+1).(4k-1)}{3}+(2k+1).(2k+2)$$

$$=\frac{k.(k+1).(4k-1)+3.(2k+1).(2k+2)}{3}$$

$$=\frac{(k+1).(4k^2-k+12k+6)}{3}$$

$$=\frac{(k+1).(4k^2+11k+6)}{3}$$

$$=\frac{(k+1).(k+2).(4k+3)}{3}$$

$$1.2+3.4+5.6+...+(2k+1).(2k+2)=\frac{(k+1).(k+2).(4k+3)}{3}$$

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k+1\in D$ dir. O halde önerme doğrudur.

Örnek:

$r\in R$, $r\neq 0$ ve $r\neq 1$ olmak üzere $\forall n\in N^+$ için $P(n): 1+r+r^2+r^3+...+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n=1$ için $P(1): 1+r^1=\frac{1-r^{1+1}}{1-r}=\frac{(1-r).(1+r)}{1-r}=1+r$ doğru, yani $1\in D$ dir.

b. $n=k$ için $P(k): 1+r+r^2+r^3+...+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ olsun. Yani $k\in D$ olsun.

c. $n=k+1$ için

$$P(k): 1+r+r^2+r^3+...+r^k+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

önermesinin doğru olduğunu, yani $k+1\in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki tarafına r^{k+1} eklenirse eşitlik bozulmaz.

O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına r^{k+1} ilave edersek,

$$1+r+r^2+r^3+...+r^k+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}+r^{k+1}$$

$$1+r+r^2+r^3+...+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+1}+r^{k+1}-r^{k+2}}{1-r}$$

$$1+r+r^2+r^3+...+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k+1\in D$ dir. O halde önerme doğrudur.

Örnek:

$\forall n\in N^+$ için $P(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ önermesinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Çözüm :

Önermenin doğruluk kümesi D olsun.

a. $n=1$ için $P(n): \frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ doğru, yani $1\in D$ dir.

b. $n=k$ için $P(k): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k.(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ olsun. Yani $k\in D$ olsun.

c. $n=k+1$ için

$$P(k+1): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

önermesinin doğru olduğunu, yani $k+1\in D$ olduğunu ispatlamalıyız.

b. deki eşitliği doğru kabul etmiştik. Bu eşitliğin her iki

tarafına $\frac{1}{(k+1).(k+2)}$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

O halde b. deki eşitliğin her iki tarafına $\frac{1}{(k+1).(k+2)}$ ilave edersek,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k.(k+2)+1}{(k+1).(k+2)}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1).(k+2)}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1).(k+2)}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$P(k+1):\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$ olup

Bu da aranan sonuçtur.

O halde $k+1\in D$ dir. O halde önerme doğrudur.

Konu Bitmiştir.