OLASILIK

Olasılık Terimleri

1. Deney

Bir madeni para atıldığında yazı mı ya da tura mı geleceğini, bir zar atıldığında sonucun ne olacağını, … tespit etme işlemine deney denir.

2. Sonuç

Bir deneyin her bir görüntüsüne(çıktısına) sonuç denir. Örneğin bir madeni paranın atılması deneyinde olası sonuçlar, yazı ile turadır. (yazı: Y, tura: T ile gösterilirse) iki madeni paranın birlikte atılması deneyinde olası sonuçlar (Y,Y), (Y,T), (T,Y), (T,T) dır.

Bir zarın atılması deneyinde olası sonuçlar 1,2,3,4,5,6 dır. Her sonuç bir örnek nokta olarak adlandırılır.

3. Örnek Uzay

Bir deneyin bütün sonuçlarını eleman kabul eden kümeye örnek uzay denir. Diğer bir ifadeyle örnek noktaların tamamını eleman kabul eden kümeye örnek uzay denir. Örnek uzay E ile gösterilir. Örnek uzaya evrensel küme de denilir.
Örnek uzayın her elemanına örnek nokta denir.

Örnek:

- Bir madeni paranın atılması deneyinde; sonuçlar: Y (Yazı) ve T(Tura)
  Örnek uzay: $E=\{Y,T\}$ olup $s(E)=2$ dir.
- Bir madeni paranın iki kere havaya atılması veya iki madeni paranın birlikte havaya atılması deneyinde örnek uzay;

  $E=\{(Y,Y),(Y,T),(T,Y),(T,T)\}$ olup $s(E)=2.2=4$ tür. (Çarpma Kuralı)
- Bir madeni paranın art arda n defa (veya n tane madeni paranın aynı anda) atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı $s(E)=2.2.....2=2^n$ dir.

Örnek:

- Bir zarın havaya atılması deneyinin örnek uzayı;

  $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ olup $s(E)=6$
- iki zarın birlikte atılması veya bir zarın art arda iki kez atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı;

  $s(E)=6.6=36$ dır.

Örnek:

Bir madeni para atıldıktan sonra ardından bir zar atılması veya bir zar atıldıktan sonra ardından bir madeni para atılması ya da ikisinin birlikte atılması deneyinin örnek uzayı,

$E=\{(Y,1),(Y,2),...,(Y,6),(T,1),...,(T,6)\}$ olup örnek uzayın

eleman sayısı:

$s(E)=2.6=12$ dir. (Çarpma Kuralı)

Örnek:

İçinde 7 tane bilye bulunan bir torbadan, çekilen bilye torbaya geri atılarak, art arda iki kez birer bilye çekilmesi deneyinin örnek uzayı,

$E=\{(b_1,b_1),(b_1,b_2),...,(b_7,b_7)\}$ olup $s(E)=7.7=49$ dur.

Örnek:

İçinde 7 tane bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç bilye çekilmesi (veya çekilen bilye torbaya geri atılmadan art arda üç kez birer bilye çekilmesi) deneyinin örnek uzayı,

$E=\{(b_1,b_2,b_3),(b_1,b_2,b_4),...,(b_5,b_6,b_7)\}$ olup

$s(E)=\binom{7}{3}=21$ dir.

4. Olay

Bir Örnek uzayın her bir alt kümesine olay denir. Örneğin bir zar atıldığında 3 ten küçük gelme olayı; $\{1,2\}$ dir.

İki madeni paranın birlikte atılması veya bir madeni paranın 2 kez atılması deneyinde sonuçların aynı gelmesi olayı;

$\{(Y,Y),(T,T)\}$ dır.

5. İmkansız Olay

E örnek uzayı için boş olan her alt kümeye imkansız (olanaksız) olay denir.

Örneğin bir zar atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının 6 dan büyük olması olayı imkansız olaydır.

6. Kesin Olay

E örnek uzayının kendisine eşit olan her alt kümesine kesin olay(mutlak) denir.

Örneğin bir zar atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının 7 den küçük pozitif sayı olması olayı kesin olaydır.

Örnek:

Bir zarın atılması deneyinde, $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve üst yüze gelen sayının;

- Asal sayı olması olayı: A ise $A = \{2,3,5\} \subset E$ dir.
- "7" olma olayı: B ise $B = \{\ \} \subset E$ olduğundan B olayı imkansız olaydır.

7. Ayrık Olaylar

A ve B, E örnek uzayının iki olayı olsun. Eğer $A \cap B = \varphi$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir.

Ayrık olayların aynı anda gerçekleşmesi mümkün değildir.

Örneğin bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze; tek sayı gelmesi olayı A, çift sayı gelmesi olayı B olsun.

$A = \{1,3,5\}$ ve $B = \{2,4,6\}$ olup $A \cap B = \phi$ olduğu için, A ve B olayları ayrık olaylardır.

Örnek:

İki madeni paranın birlikte atılması veya bir madeni paranın iki kez atılması deneyinde üst yüzlere; en az bir tura gelmesi olayı C, en az bir yazı gelmesi olayı D olsun.

$C = \{(T,T),(Y,T),(T,Y)\}$ ve

$D = \{(Y,Y),(Y,T),(T,Y)\}$ olup

$C \cap D = \{(Y,T),(T,Y)\} \neq \phi$ olduğundan C ile D olayları ayrık olaylar değildirler.

Örnek:

Bir kutuda bulunan 10 tane ampulden 3'ü bozuk, 7'si sağlamdır. Bu kutudan aynı anda iki ampul alınması deneyinde, seçilen iki ampulden en az birinin sağlam olması olayı A, seçilen iki ampulün de bozuk olması olayı B ise bu olayların ortak elemanı olmadığından ayrık olaylardır.

Olasılık Fonksiyonu

E örnek uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme K olsun.

$P : K \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan P fonksiyonuna olasılık fonksiyonu denir. $A \in K$ ise $P(A)$ reel sayısına A olayının olasılığı adı verilir.

P fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar.

1. Her $A \in K$ için, $0 \le P(A) \le 1$ dir. Yani E örnek uzayının her olayının olasılığı 0 ile 1 arasındadır.
2. Örnek uzayın (Evrensel kümenin) olasılığı, $P(E) = 1$ dir.
3. İmkansız olayların olasılığı, $P(\phi) = 0$ dır.
4. $A \in K$ ve $B \in K$ iki olay olsun. Eğer bu olaylar ayrık olaylar ise yani $A \cap B = \phi$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir. $P(A \cup B)$ ye A <u>veya</u> B olayının olasılığı denir.

Örnek:

Bir zar atıldığında üst yüze 9 gelmesi olayı A ise A imkansız olay olduğundan $P(A) = 0$ dır.

Örnek:

Bir zar atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının 7 den küçük pozitif sayı olması olayı B ise B olayı kesin olay olduğundan $P(B) = 1$ dir.

Özellik

E örnek uzayında iki olay A ve B olsun. A olayının tümleyeni A' olmak üzere,

1. $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir.

2. $P(A) + P(A') = 1$ dir. Yani bir olayın olasılığı ile tümleyeninin olasılığı toplamı 1 dir.

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

Örnek:

E örnek uzay olmak üzere, $A \subset E$ dir.

$P(A) = \frac{3}{7}$ olduğuna göre $P(A')$ kaçtır?

Çözüm:

$P(A) + P(A') = 1$ olduğundan

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ bulunur.

Örnek:

E örnek uzayında A ve B iki olay olmak üzere, $P(A) = \frac{5}{6}$,

$P(B) = \frac{3}{4}$ ve $P(A \cap B) = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $P(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olduğundan

$P(A \cup B) = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{10 + 9 - 8}{12} = \frac{11}{12}$ bulunur.

Örnek:

Bir deney için A,B,C gibi 3 ayrı sonuç olasıdır.

$P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ ve $P(B \cup C) = \frac{7}{10}$ olduğuna göre $P(B)$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

A,B,C ayrık olaylar olduğundan,

$P(A) + P(B) + P(C) = 1$ dir.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5}$ olup bu değer birinci eşitlikte yazılırsa,

$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{5} + P(C) = 1$ olup buradan

$P(C) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ bulunur.

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{7}{10}$ ise

$P(B) + \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$ bulunur.

Eş Olumlu Örnek Uzay

Sonlu bir $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ uzayı için $P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = ... = P(e_n)$ ise yani E örnek uzayındaki her örnek noktanın olasılıkları eşit ise E örnek uzayına eş olumlu uzay denir. E eş olumlu örnek uzayı ve $A \subset E$ ise A olayının olasılığı,

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$ dir.

Örnek:

Bir zar havaya atılıyor. Üst yüze gelen sayının 2 den büyük sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Bu deneyde örnek uzay $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ olup $s(E)=6$ dır.

Üst yüze 2 den büyük sayı gelme olayı A olsun.

Buna göre $A=\{3,4,5,6\}$ olup $s(A)=4$ tür.

Buna göre üst yüze gelen sayının 2 den büyük sayı olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Örnek: 1999-ÖSS

Bir düzgün dörtyüzlünün (üçgen piramit) iki yüzünde A, iki yüzünde de T harfleri yazılıdır. Bu düzgün dörtyüzlü bir kez atıldığında yan yüzlerinde, sırasına bakılmaksızın A,T,A harflerinin görülme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Düzgün dörtyüzlünün yan yüzlerinde A,T,A harflerinin görülmesi için yere gelen yüzü T harfinin olması gerekir. Yere gelen yüzün T harfi olması olayını A ile gösterirsek,

$E=\{A,A,T,T\}$ olup $s(E)=4$ tür.

$A=\{T,T\}$ olup $s(A)=2$ dir.

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Bir sınıfta 18 erkek öğrenci, 15 kız öğrenci vardır. Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin erkek olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Sınıfta 18 erkek öğrenci, 15 kız öğrenci olduğu için örnek uzayın eleman sayısı,

$s(E)=18+15=33$ olur.

Seçilen öğrencinin erkek olma olayı B olsun.

Buna göre $s(B)=18$ dir. Bu durumda, B olayının olasılığı,

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{18}{33}=\frac{6}{11} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

İki madeni para birlikte havaya atıldığında üstlere farklı yüzlerin gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Bu deneyin örnek uzayının eleman sayısı çarpma kuralına göre $s(E)=2.2=4$ tür.

İstenen olay A ise,

$A=\{(Y,T),(T,Y)\}$ olup $s(A)=2$ dir. Böylece

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Madeni bir para art arda iki kez havaya atıldığında üst yüze en az bir yazı gelme olasılığı kaçtır?

1.Çözüm:

Bu deneyin örnek uzayının eleman sayısı çarpma kuralına göre $s(E)=2.2=4$ tür.

İstenen olay A ise, $A=\{(Y,T),(T,Y),(Y,Y)\}$ olup $s(A)=3$ tür. Böylece $P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{3}{4}$ bulunur.

2.Çözüm:

En az bir yazı gelme olayı A ise, hiç yazı gelmeme olayı A' olup, $A'=\{(T,T)\}$ dir.

$$P(A')=\frac{s(A')}{s(E)}=\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

$P(A)+P(A')=1$ olduğundan,

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Madeni bir para art arda 5 kez atıldığında üçünün tura, ikisinin yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 2^5 = 32$ dir.

Üç yazı (Y,Y,Y) ve iki tura (T,T) gelme olayı Y,Y,Y,T,T nın sıralanışı kadardır. Tekrarlı permütasyondan bu sıralanışın sayısı $\frac{5!}{3!.2!} = 10$ dur. İstenen olay A ise $s(A) = 10$ olup A'nın olasılığı

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$ olur.

Örnek:

4 kız, 6 erkek öğrencinin bulunduğu bir okul kafilesinden rastgele 2 öğrenci seçilirse öğrencilerden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Toplam 10 öğrenci arasından 2 öğrenci seçilmesi örnek uzay (E);

4 kız, 6 erkek öğrenciden bir kız, bir erkek öğrenci seçme olayı da A olsun. Buna göre

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\binom{4}{1}.\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4.6}{\frac{10.9}{2}} = \frac{8}{15}$$ bulunur.

Örnek:

Bir çift zar havaya atılıyor. Zarların üstündeki sayıların aynı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Bir zarın atılması deneyinde 6 sonuç vardır. Bunlar $\{1,2,3,4,5,6\}$ dır. İki zar atıldığında ise 36 sonuç vardır.

Çünkü; $s(AxA) = 6.6 = 36$ dır. Bunu tabloda daha açık görelim;

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

Zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olması olayı D ise,

$D = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ dır.

$$P(D) = \frac{s(D)}{s(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$ dır.

Örnek:

İki zar birlikte havaya atılıyor. Üst yüzlere gelen sayıların toplamının 7 olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

İki zar atıldığından örnek uzayın eleman sayısı

$s(E) = 6. = 36$ dır.

Üst yüzlere gelen sayıların toplamının 7 olması olayı A ise,

$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ olup

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$ bulunur.

Örnek:

Bir torbada aynı büyüklükte 4 kırmızı, 5 beyaz, 7 yeşil kalem vardır. Rastgele alınan bir kalemin kırmızı <u>veya</u> beyaz olma olasılığı nedir?

Çözüm:

$E = \{k_1,...,k_4,b_1,...,b_5,y_1,...,y_7\}$

$K = \{k_1,k_2,k_3,k_4\}$, $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$

ve $K \cap B = \phi$ olduğundan

$$P(K \cup B) = P(K) + P(B) = \frac{4}{4+5+7} + \frac{5}{4+5+7}$$

$$P(K \cup B) = \frac{9}{16}$$ bulunur.

Örnek:

Bir torbada aynı büyüklükte 5 mavi, 3 kırmızı ve 2 yeşil bilye vardır. Rastgele alınan bir bilyenin mavi veya yeşil olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Örnek uzay E olmak üzere,

$E = \{m_1, ..., m_5, k_1, ..., k_3, y_1, y_2\}$ dir.

Mavi gelme olayı A ise

$A = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ tir.

Yeşil gelme olayı B ise, $B = \{y_1, y_2\}$ dir.

$A \cap B = \phi$, $s(E) = 5 + 3 + 2 = 10$, $s(A) = 5$ ve

$s(B) = 2$ olduğuna göre, torbadan rastgele alınan bir bilyenin mavi veya yeşil gelme olasılığı,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$ olur.

Örnek:

İki zar birlikte atılıyor. Üst yüzlere gelen sayıların toplamının 7 den büyük olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

İki zarın atılması deneyinde çıktıların toplamını tablo ile gösterelim,

+	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	**8**
3	4	5	6	7	**8**	**9**
4	5	6	7	**8**	**9**	**10**
5	6	7	**8**	**9**	**10**	**11**
6	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Tabloda üst yüze gelen sayıların toplamının 7 den büyük olduğu kısımlar koyu yazılmıştır. Bu olaya K dersek, $s(K) = 15$ tir. Bu durumda

$$P(K) = \frac{s(K)}{s(E)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$ bulunur.

Uyarı

İki zarın birlikte atılması veya bir zarın art arda iki kez atılması deneyinde üst yüzlere gelen sayıların toplamı için;

Toplamlar :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Adet :	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

şeklinde bir durum vardır.

Örnek:

İki zar birlikte atılıyor. Üst yüzlere gelen sayıların toplamının en az 9 olması olasılığı kaçtır?

Çözüm:

İstenen olay A ise;

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{5}{18}$$ bulunur.

Örnek:

1'den 100'e kadar olan doğal sayılar arasından seçilen bir sayının 6 veya 8 ile tam bölünebilmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm:

1'den 100'e kadar olan doğal sayıların sayısı 100 olduğundan $s(E) = 100$ dür.

Seçilen sayının 6 ile bölünebilme olayı F olsun.

Buna göre, $F = \{6, 12, 24, .., 96\}$ olup, $s(F) = 16$ dır.

Seçilen sayının 8 ile bölünebilme olayı G olsun. Buna göre,

$G = \{8, 16, 24, .., 96\}$ olup $s(G) = 12$ dir

Bu durumda, hem 6 ile hem de 8 ile bölünebilen doğal sayıların (24 ile bölünebilen sayılar) kümesi

$F \cap G = \{24,48,72,96\}$ olup $s(F \cap G) = 4$ tür.

Buna göre 1'den 100'e kadar olan doğal sayılar arasından seçilen bir sayının 6 veya 8 ile tam bölünebilmesi olasılığı,

$P(F \cup G) = P(F) + P(G) - P(F \cap G)$ olduğundan

$P(F \cup G) = \frac{16}{100} + \frac{12}{100} - \frac{4}{100} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$ tir

Örnek:

Bir torbada, 4 sarı ve 6 pembe bilye vardır. Bu torbadan aynı anda üç bilye çekiliyor. Bilyelerin aynı renkli olma olasılığını bulunuz.

Çözüm:

4 + 6 = 10 bilye arasından 3 bilye $\binom{10}{3} = 120$ farklı şekilde seçilebileceğinden örnek uzayın eleman sayısı,

$s(E) = 120$ dir.

Çekilen bilyelerin aynı renkli olması olayına A diyelim. 4 sarı bilye arasından 3 sarı bilye $\binom{4}{3} = 4$ farklı şekilde seçilebilir.

6 pembe bilye arasından 3 pembe bilye $\binom{6}{3} = 20$ farklı şekilde seçilebilir.

Toplama kuralı gereği $s(A) = 4 + 20 = 24$ olur.
Buna göre istenen olayın olasılığı,

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ olarak bulunur.

Örnek:

5 mavi, 3 yeşil bilye arasından aynı anda 3 bilye seçiliyor. Seçilenlerden en az birinin mavi olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

5 + 3 = 8 bilye arasından 3 bilye $\binom{8}{3} = 56$ farklı şekilde seçilebileceğinden örnek uzayın eleman sayısı,

$s(E) = 56$ dir.

Seçilenler arasında en az birinin mavi olduğu olay M olsun. Oluşabilecek bütün üçlü grupların sayısından, üçünün de yeşil olduğu grupların sayısı çıkarılırsa en az bir mavi bilyenin olduğu üçlü grupların sayısı bulunur.

$s(M) = \binom{8}{3} - \binom{3}{3} = 56 - 1 = 55$ olur.

Buna göre M olayının olasılığı,

$P(M) = \frac{s(M)}{s(E)} = \frac{55}{56}$ bulunur.

Örnek:

Bir madeni para 6 kez havaya atılıyor. 3 yazı, 3 tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Bu deneyde örnek uzayın eleman sayısı

$s(E) = 2^6 = 64$ tür.

"3 yazı ve 3 tura" gelme olayına C dersek, C olayının eleman sayısı; Y,Y,Y,T,T,T nin farklı sıralanışlarının sayısıdır.

Buna göre,

$s(C) = \frac{6!}{3!.3!} = 20$ olur.

Bu durumda Bir madeni para 6 kez havaya atıldığında 3 yazı, 3 tura gelme olasılığı,

$P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ elde edilir.

Örnek:

7 basamaklı 2351425 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılabilen 7 basamaklı doğal sayılardan biri seçiliyor. Seçilen sayının çift sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

7 basamaklı 2351425 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek,

$\frac{7!}{2!.2!} = 1260$ farklı doğal sayı yazılabildiği için bu deneyde örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 1260$ olur.

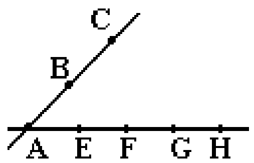
Yazılabilen çift sayıların kümesine D dersek,

$s(D) = \frac{6!.3}{2!.2!} = 540$ olur.

Buna göre seçilen sayının çift olma olasılığı,

$P(D) = \frac{s(D)}{s(E)} = \frac{540}{1260} = \frac{3}{7}$ bulunur.

Örnek:



Yandaki şekil üzerinde seçilen üç noktanın üçgen oluşturma olasılığı nedir?

Çözüm:

Şekildeki 7 noktadan 3 nokta $\binom{7}{3} = 35$ farklı şekilde seçilebildiğinden örnek uzayın eleman sayısı, $s(E) = 35$ tir.

Seçilen noktaların üçgen oluşturması olayına K dersek,

$s(K) = \binom{7}{3} - \binom{3}{3} - \binom{5}{3} = 24$ olur.

Buna göre K olayının olasılığı, $P(K) = \frac{s(K)}{s(E)} = \frac{24}{35}$ olur.

Örnek:

Bir gruptaki erkek sayısının kadın sayısına oranı $\frac{2}{3}$ tür.

Erkeklerin % 20'si, kadınların % 30'u keman çalabilmektedir. Bu gruptan seçilen bir kişinin erkek veya keman çalabilme olasılığı nedir?

Çözüm:

Gruptaki kişi sayısı 100 alınırsa,
Erkek sayısı: 40,
Keman çalabilen erkek sayısı: 8,
Kadın sayısı: 60,
Keman çalabilen kadın sayısı: 18,
Keman çalabilen kişi sayısı toplamı: 26

Buna göre, seçilen bir kişinin erkek veya keman çalabilme olasılığı,

$P(E \cup K) = P(E) + P(K) - P(E \cap K)$

$P(E \cup K) = \frac{40}{100} + \frac{26}{100} - \frac{8}{100} = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$ olur.

Örnek:

Anne, baba, babaanne ve 4 çocuktan oluşan bir aile yuvarlak bir masa etrafında oturacaktır. Babaannenin anne ile baba arasında olma olasılığı nedir?

Çözüm:

7 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafında,

$(7-1)! = 6!$ farklı şekilde oturabildiklerinden bu deneyin örnek uzayının eleman sayısı $s(E) = 6!$ dir.

Babaannenin anne ile baba arasında bulunduğu olaya A dersek, $s(A) = 4!.2!$ olur.

Buna göre A olayının olasılığı,

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{4!.2!}{6!} = \frac{1}{15}$ olur.

Örnek:

3 kız ve 3 erkek öğrenciden 3'ü spor koluna, diğer 3'ü kızılay koluna seçilecektir. Kolların her birinde en az bir kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

6 öğrenciden 3'ü spor koluna, geriye kalan 3 öğrenciden 3'ü kızılay koluna, $\binom{6}{3}.\binom{3}{3} = 20$ farklı şekilde seçilebildiğinden örnek uzayın eleman sayısı, $s(E) = 20$ dir.

Kollardan biri belirlenirse diğer kol otomatik olarak belirlenmiş olacaktır. Her kolda en az bir kız olacağına göre, kollardan birine 1 kız 2 erkek veya 2 kız 1 erkek şeklinde olacaktır. Bir kola 3 kız seçilemez çünkü diğer kola kız öğrenci seçilmemiş olur.

Buna göre istenen şartlarda kollar,

$s(K) = \binom{3}{1}.\binom{3}{2} + \binom{3}{2}.\binom{3}{1} = 3.3 + 3.3 = 18$ farklı şekilde oluşur.

Bu durumda istenen olasılık,

$P(K) = \frac{s(K)}{s(E)} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ olur.

Örnek:

$B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinden seçilen iki farklı sayının toplamının çift sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

7 sayı arasında 2 sayı $s(E) = \binom{7}{2} = 21$ yolla,

İki sayının toplamının çift sayı olması için ikisinin de tek veya ikisinin de çift olması gerekir. Bu olaya C dersek,

$s(C) = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 3 = 9$ olur.

Buna göre C olayının olasılığı,

$P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ bulunur.

Örnek:

Doktor ve hemşirelerden oluşan bir sağlık grubunun 6'sı hemşiredir. Bu gruptan seçilen 2 kişiden birinin hemşire diğerinin doktor olma olasılığı $\frac{1}{2}$ dir. Doktorların sayısı hemşirelerden fazla olduğu bilndiğine göre, gruptaki doktor sayısı kaçtır?

Çözüm:

Gruptaki doktor sayısı a olsun. Buna göre gruptaki kişi sayısı a+6 olup, örnek uzayın eleman sayısı,

$s(E) = \binom{a+6}{2} = \frac{(a+6).(a+5)}{2.1}$ olur.

Seçilenlerden birinin hemşire, diğerinin doktor olması olayına A dersek,

$s(A) = \binom{a}{1}.\binom{6}{1} = 6.a$ olur.

Buna göre,

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6.a}{\frac{(a+6).(a+5)}{2}} = \frac{1}{2}$ dir.

$\frac{12.a}{(a+6).(a+5)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - 13.a + 30 = 0$ olup bu

denklemden a = 10 veya a = 3 bulunur. Ancak a = 3 olamaz.

O halde doktor sayısı 10 dur.

Örnek:

Sena ile Nedim'in de aralarında bulunduğu bir öğrenci grubundan 4 kişilik bir yarışma ekibi seçilecektir. Ekipte 2 kız öğrenci ile 2 erkek öğrenci olması istenmektedir. Grup 7 erkek öğrenci ile 8 kız öğrenciden oluştuğuna göre, seçilecek ekipte Sena'nın olması, Nedim'in olmaması olasılığı kaçtır?

Çözüm:

7 erkek öğrenciden 2 erkek öğrenci ve 8 kız öğrenciden 2 kız öğrenci,

$s(E) = \binom{7}{2}.\binom{8}{2} = 21.28 = 588$ farklı şekilde

seçilebildiğinden, $s(E) = 588$ olur.
Sena'nın seçildiği, Nedim'in seçilmediği olaya B dersek,

$$s(B) = \binom{6}{2}.\binom{7}{1} = 15.7 = 105 \text{ olur.}$$

Buna göre, B olayının olasılığı,

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{105}{588} = \frac{5}{28} \text{ olur.}$$

Örnek:

Bir torbanın içinde 1'den 10'a kadar numaralandırılmış toplar vardır. Üzerinde 1 yazan top sayısı 1, üzerinde 2 yazan top sayısı 2, üzerinde 3 yazan top sayısı 3,…, üzerinde 10 yazan top sayısı 10 dur. Bu torbadan seçilen bir topun üzerindeki numaranın tek sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Top sayısı,

1+2+3+…+10 = 55 olup $s(E) = 55$ tir.

Tek sayı seçme olayı B ise,

$s(B) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ tir. Buna göre, B olayının olasılığı,

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11} \text{ olur.}$$

Ardışık Denemeler (Deneyler)

Bir deney art arda n defa ya da belirli n tane olayın art arda gerçekleşmesinden oluşuyorsa

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1).P(A_2).\ldots.P(A_n) \text{ olur.}$$

Örnek:

Bir zar art arda üç kez atıldığında üçünün de farklı gelme olasılığını bulalım.

1.Çözüm:

Birincide (I) 6 sayıdan herhangi biri; İkincide (II) birinciden gelenden farklı bir sayı (dolayısıyla 6 sayıdan 5'i); Üçüncüde (III) ilk ikisinde de gelenden farklı bir sayı (dolayısıyla 6 sayıdan 4'ü) gelmelidir. Buna göre,

$$P(I, II, III) = P(I).P(II).P(III) = \frac{6}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6} = \frac{5}{9} \text{ olur.}$$

2.Çözüm:

Üç atışta da farklı sayı gelme olayına A diyelim. Buna göre,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \frac{\binom{6}{1}.\binom{5}{1}.\binom{4}{1}}{6.6.6} = \frac{6.5.4}{6.6.6} = \frac{5}{9} \text{ olur.}$$

Örnek: 1998-ÖYS

Bir torbada 2 tane mavi, 5 tane yeşil mendil vardır. Bu torbadan geri atılmamak koşulu ile iki kez birer mendil çekiliyor. Bu iki çekilişin birincisinde mavi, ikincisinde de yeşil mendil çekme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$$P(M, Y) = P_1(M).P_2(Y) = \frac{2}{7}.\frac{5}{6} = \frac{5}{21} \text{ dir.}$$

Örnek: 1982-ÖYS

Bir zar ve bir madeni para birlikte atılıyor. Zarın 4 veya 4 ten küçük ve paranın tura gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

Zarın 4 veya 4 ten küçük gelmesi olayına A, Paranın tura gelmesi olayına B diyelim.

$$P(A, B) = P(A).P(B) = \frac{4}{6}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek: 1995-ÖYS

Bir torbada 6 beyaz, 4 siyah bilye vardır. Bu torbadan rastgele çekilen 3 bilyeden birinin beyaz, diğer ikisinin siyah olma olasılığı nedir?

1.Çözüm:

Torbadan aynı anda 3 bilye çekme deneyinin sonuçları ile çekilen bilye torbaya geri atılmadan art arda üç çekiliş yapma deneyinin sonuçları aynıdır. O halde, ardışık üç çekiliş yapılması şeklinde düşünülürse;

$$P(B,S,S)=\frac{6}{10}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{3!}{2!}=\frac{3}{10} \text{ tir. } \left(BSS\rightarrow\frac{3!}{2!}\right)$$

2.Çözüm:

Çekilen 3 bilyeden birinin beyaz, diğer ikisinin siyah olması olayına A diyelim.

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{\binom{6}{1}.\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10} \text{ bulunur.}$$

Bağımsız ve Bağımlı Olaylar

A ve B aynı örnek uzaya ait iki olay olsun. Bu olaylardan birinin elde edilmesi diğerinin elde edilmesini etkilemiyorsa A ve B olaylarına bağımsız olaylar denir. Eğer iki olay bağımsız değil ise, bu olaylara bağımlı olaylar denir.

Uyarı

A ve B bağımsız iki olay, $P(A)\neq 0$ ve $P(B)\neq 0$ ise,
A ve B'nin gerçekleşme olasılığı

$P(A\cap B)=P(A).P(B)$ dir.

A veya B'nin gerçekleşme olasılığı

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ dir.

Örnek:

Bir zarı havaya atalım. Üst yüze 5 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ dır. İlk atılışta hangisi gelirse gelsin, zarın ikinci kez havaya attığımızda üst yüze 5 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ dır. Yani iki olay birbirini etkilememiştir. Buna göre bu iki olay bağımsızdır.

Örnek:

Bir kişinin 4 maçın sonucunu doğru tahmin etme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Her bir maçın 3 muhtemel sonucu vardır. Maçlar birbirinden bağımsız olduğu için 4 maçın 4'ünü de doğru tahmin etme olasılığı,

$$P(M)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{81} \text{ dir.}$$

Örnek:

2 yüzü mavi, 1 yüzü pembe, 3 yüzü turuncu olan bir zar art arda 2 kez atılıyor. Zarın üst yüzüne 1.atışta mavi, 2. atışta turuncu gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Her iki atışın sonucu birbirini etkilemediğinden bu olaylar bağımsız olaylardır. Birinci atışta zarın üst yüzüne mavi gelmesi olayı A olsun. Buna göre,

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Zarın ikinci atılışında üst yüze turuncu gelmesi olayı B olsun. Buna göre,

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A ve B olayları bağımsız olaylar olduğundan, zarın üst yüzüne 1. atışta mavi, 2. atışta turuncu gelme olasılığı,

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Engin'in bir hedefi vurma olasılığı $\frac{5}{6}$ dır. Engin'in bu hedefi en çok dört atışta vurma olasılığı nedir?

Çözüm:

Engin'in hedefi <u>vuramama</u> olasılığı $\frac{1}{6}$ dır. Engin'in bu hedefi en çok dört vuruşta vurma olayı A olsun. Bu durumda dört atışta da vuramama olayı A' dır.

$P(A)+P(A')=1$ ise

$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{6^4-1}{6^4}$ olur.

Örnek:

Bir zar ve bir madeni para birlikte havaya atılıyor. Zarın 4'ten büyük ve paranın tura gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm:

Zarın 4'ten büyük gelme olayı A ise,

$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ tür.

Paranın tura gelme olayı B ise,

$P(B)=\frac{1}{2}$ tür.

A ve B olayları bağımsız olduğundan A <u>ve</u> B nin meydana gelme olasılığı,

$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ bulunur.

Örnek:

Bir sınıftaki 24 öğrenciden 9'u erkektir. Bu sınıftan art arda iki öğrenci seçelim. İlk öğrencinin erkek olma olasılığı $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$ dir.

İlk seçtiğimiz öğrenci erkek olsun. Son durumda sınıfta 8'i erkek olmak üzere 23 öğrenci kalmıştır.

Bu sınıftan ikinci kez öğrenci seçtiğimizde erkek olma olasılığı $\frac{8}{23}$ tür. İlk seçme işleminde seçilen öğrencinin erkek olma olasılığı $\frac{3}{8}$ iken, ikinci seçme işleminde bu olasılığın $\frac{8}{23}$ olduğu görülmektedir.

Buna göre yapılan seçme işleminde 2. olayın olasılığının 1. olayın sonucuna bağlı olduğunu görüyoruz. Bu durumda, bu iki olay bağımlı olaylardır.

Örnek:

Bir kutudaki 12 bilyenin 5'i mavi, 4'ü yeşil, 3'ü turuncudur.

Bu kutudan geri bırakılmak koşulu ile art arda iki bilye çekiminde 1. bilye çekme olayı K, ikinci bilyeyi çekme olayı M olsun.

Bu durumda K olayının gerçekleşmesi M yi etkilemediğinden K ve M olayları bağımsız olaylardır.

Örnek:
Bir kutudaki 12 bilyenin 5'i mavi, 4'ü yeşil, 3'ü turuncudur. Bu kutudan seçilen bir bilyenin mavi ve yeşil olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Seçilen bilyenin mavi olma olayı A, yeşil olma olayı B olsun. İstenen iki olay aynı deneye ait olduklarından bağımsız olmalarından söz edilemez. (Dolayısıyla bağımsız olaylarda kullandığımız $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ formülünü kullanamayız)

A ve B ayrık olaylar olduğundan ortak elemanları yoktur. Yani aynı anda gerçekleşmeleri mümkün değildir. Buna göre, istenen olayın olasılığı, $P(A\cap B)=0$ dır.

Örnek:

Bir soruyu; Tolga'nın çözme olasılığı $\frac{3}{8}$, Berkay'ın çözme olasılığı $\frac{5}{12}$ dir. Bu iki olay birbirinden bağımsız olduğuna göre, sorunun çözülme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$P(T)=\frac{3}{8}$ ve $P(B)=\frac{5}{12}$ olarak veriliyor.

Bu iki olay bağımsız olduklarından ve soruyu ya Tolga veya Berkay çözeceğine göre T veya B olayının gerçekleşme olasılığı,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-\frac{3}{8}.\frac{5}{12}=\frac{61}{96}\text{ bulunur.}$$

Örnek:

A sınıfında 12 erkek, 15 kız öğrenci; B sınıfında 12 erkek, 8 kız öğrenci vardır. Aynı anda her iki sınıftan birer öğrenci seçiliyor. Seçilen öğrencilerin kız olma olasılığı nedir?

Çözüm:

A sınıfından bir kız öğrenci seçilmesi olayı T; B sınıfından kız öğrenci seçilmesi olayı Z olsun. Buna göre,

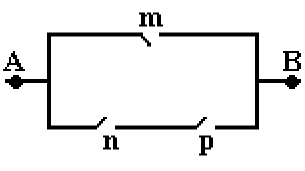
$$P(T)=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}\text{ olur.}$$

$$P(Z)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}\text{ olur.}$$

T olayı ve Z olayı Bağımsız olaylar olduklarından, T ve Z olayının birlikte gerçekleşme olasılığı,

$$P(T\cap Z)=P(T).P(Z)=\frac{5}{9}.\frac{2}{5}=\frac{2}{9}\text{ olur.}$$

Örnek:



Şekildeki devrede m,n ve p anahtarlarının kapalı olma olasılıkları $\frac{3}{4}$ olduğuna göre, A ile B noktaları arasında akım olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

M anahtarının kapalı olma olayı C, n anahtarının kapalı olma olayı D ve p anahtarının kapalı olma olayı F olsun.

$P(C)=P(D)=P(F)=\frac{3}{4}$ olarak verilmiştir.

A ile B noktaları arasında akım olması için m anahtarı veya (n ve p) anahtarlarının kapalı olması gerekir.C,D ve F bağımsız olay olduklarından dolayı A ile B noktaları arasında akım olması olasılığı,

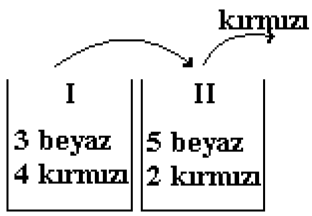
$$P[C\cup(D\cap F)]=P(C)+P(D\cap F)-P[C\cap(D\cap F)]$$

$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}.\frac{3}{4}\right)-\left[\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{4}.\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{57}{64}\text{ olur.}$$

Örnek:

İki kutudan birincisinde 3 beyaz 4 kırmızı, ikincisinde 5 beyaz 2 kırmızı bilye vardır. Birincisinden rastgele bir bilye çekiliyor ve ikincisine atılıyor. İkinci kutudan kırmızı bilye çekme olasılığı kaçtır?

Çözüm:



Birinci durumda;
Birinci kutudan rastgele bir bilye çekildiğinde, çekilen bilyenin beyaz gelme olasılığı $\frac{3}{7}$ olup bu beyaz bilyeyi ikinci kutuya attığımızda ikinci kutuda 6 beyaz 2 kırmızı bilye olur.

Bu durumda ikinci kutudan kırmızı bilye çekme olasılığı

$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ tür.

İkinci durumda ise;
Birinci kutudan rastgele bir bilye çekildiğinde, çekilen bilyenin kırmızı gelme olasılığı $\frac{4}{7}$ olup bu kırmızı bilyeyi

ikinci kutuya attığımızda ikinci kutuda 5 beyaz 3 kırmızı bilye olur. Bu durumda ikinci kutudan kırmızı bilye çekme olasılığı $\frac{3}{8}$ tür.

Çarpma ve toplama kuralına göre,

$$P(A) = \frac{3}{7}.\frac{1}{4} + \frac{4}{7}.\frac{3}{8} = \frac{3}{28} + \frac{6}{28} = \frac{9}{28}$$ bulunur.

Örnek:

A kutusunda 10 sağlam, 5 bozuk; B kutusunda 9 sağlam, 6 bozuk limon vardır. Aynı anda her iki kutudan birer limon alınıyor. Alınan limonlardan birinin sağlam diğerinin bozuk olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Her iki kutudan birer limon alma olayları birbirini etkilemediğinden bu olaylar bağımsız olaylardır.

Kutulardan sağlam limon alma olayı S, bozuk limon alma olayı B olsun.
İstenen durum; birinci kutudan sağlam, ikinci kutudan bozuk <u>veya</u> birinci kutudan bozuk, ikinci kutudan sağlam limon alma şeklindedir.

Buna göre, istenen durumun olasılığı,

$$P(S \cap B) + P(B \cap S) = P(S).P(B) + P(B).P(S)$$

$$P(S \cap B) + P(B \cap S) = \frac{10}{15}.\frac{6}{15} + \frac{5}{15}.\frac{9}{15} = \frac{7}{15}$$ tir.

Örnek:

Bir atışta bir hedefi vurma olasılıkları; Taner'in $\frac{2}{5}$, Şener'in $\frac{2}{3}$ tür. Taner ile Şener bu hedefe birer atış yapıyorlar. Buna göre, hedefi yalnızca Taner'in vurma olasılığı nedir?

Çözüm:

Hedefi yalnızca Taner'in vurması, Taner'in vurup Şener'in vurmaması anlamına gelir. Ayrıca olaylar bağımsızdır.

$$P(T) = \frac{2}{5}$$

$P(Ş) = \frac{2}{3}$ ise $P(Ş') = \frac{1}{3}$ olup istenen durumun olasılığı,

$$P(T \cap Ş') = P(T).P(Ş') = \frac{2}{5}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$ olur.

Örnek:

Bir kutuda 4 yeşil, 3 mavi bilye vardır. Bu kutudan geri konulmak şartı ile art arda 2 bilye çekiliyor. Buna göre çekilen bilyelerin aynı renkli olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Çekilen bilyeler kutuya geri konulduğu için bu iki olay bağımsızdır. İstenen durum ilk çekilen yeşil, ikinci çekilen yeşil veya ilk çekilen mavi, ikinci çekilen mavi şeklindedir.

Buna göre istenen durumun olasılığı,

$$P(Y \cap Y) + P(M \cap M) = \frac{4}{7}.\frac{4}{7} + \frac{3}{7}.\frac{3}{7} = \frac{25}{49}$$ tir.

Koşullu Olasılık

A ile B, E örnek uzayında iki olay olsun. $P(B) > 0$ olmak üzere; B olayının gerçekleşmiş olması halinde A olayının olasılığına, A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı veya kısaca A nın B koşullu olasılığı denir ve $P(A/B)$ ile gösterilir.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ olur.

Örnek:

Bir zar atılıyor. Üst yüze gelen sayının çift sayı olduğu bilindiğine göre asal sayı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm:

Bu deneyde E örnek uzayının eleman sayısı $S(E) = 6$ dır.
Üst yüze gelen sayının çift sayı gelme olayı B olsun.

$B=\{2,4,6\}$ olur.

$P(B)=\dfrac{s(B)}{s(E)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ dir.

Üst yüze asal sayı gelme olayı A olsun.

$A=\{2,3,5\}$ olur.

Bu durumda $A\cap B=\{2\}$ dir

$P(A\cap B)=\dfrac{s(A\cap B)}{s(E)}=\dfrac{1}{6}$ olup

Üst yüze gelen sayının çift sayı olduğu bilindiğine göre asal sayı olma olasılığı,

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ bulunur.

Örnek:

Bir madeni para art arda 3 kez atılıyor. Birinci atışın tura geldiği bilindiğine göre ikinci ve üçüncü atışta yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Bu deneyde örnek uzay $S(E)=2^3=8$ elemanlıdır.

Birinci atışta tura gelme olayı B ise,

$B=\{(T,Y,Y),(T,Y,T),(T,T,Y),(T,T,T)\}$

$P(B)=\dfrac{s(B)}{s(E)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ dir.

İkinci ve üçüncü atışta yazı gelme olayı A ise

$A=\{(T,Y,Y),(Y,Y,Y)\}$ olur.

$A\cap B=\{(T,Y,Y)\}$ olup,

$P(A\cap B)=\dfrac{s(A\cap B)}{s(E)}=\dfrac{1}{8}$ dir.

Buna göre,

Birinci atışın tura geldiği bilindiğine göre ikinci ve üçüncü atışta yazı gelme olasılığı

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$ bulunur.

2.Çözüm:

Paralardan birinin tura geldiği bilindiğine göre örnek uzay,

$E_T=\{(T,Y,Y),(T,Y,T),(T,T,Y),(T,T,T)\}$

seçilirse, istenen olay tura gelen ikililerden ikinci bileşeni ve üçüncü bileşeni yazı olan,

$A_T=\{(T,Y,Y)\}$ olacaktır. O halde istenen olayın olasılığı,

$P(A_T)=\dfrac{s(A_T)}{s(E_T)}=\dfrac{1}{4}$ bulunur.

Örnek:

Bir zar atılıyor. Üst yüze gelen sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre asal sayı olma olasılığını bulunuz.

1.Çözüm:

Bu deneyde E örnek uzayının eleman sayısı $S(E)=6$ dır. Üst yüze gelen sayının tek sayı gelme olayı T olsun.

$T=\{1,3,5\}$ olur.

$P(T)=\dfrac{s(T)}{s(E)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ dir. Asal sayı gelme olayı A olsun.

$A=\{2,3,5\}$ olup

Bu durumda $A\cap B=\{3,5\}$ dir

$P(A\cap T)=\dfrac{s(A\cap T)}{s(E)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ tür.

Üst yüze gelen sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre asal sayı olma olasılığı,

$$P(A/T)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$ bulunur.

2.Çözüm:

Üst yüze gelen sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre örnek uzay $E_T=\{1,3,5\}$ seçilirse, istenen olay

$A_T=\{3,5\}$ olur. Buna göre

$$P(A_T)=\frac{s(A_T)}{s(E_T)}=\frac{2}{3}$$ bulunur.

Uyarı

A ile B, eş olumlu E örnek uzayında iki olay olmak üzere A nın B koşullu olasılığı ($s(B)\neq 0$)

$$P(A/B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}$$ dir.

Örnek:

Bir sınıfta 20 kız, 30 erkek öğrenci vardır. Kızların 5'i, erkeklerin 10'u matematik dersinden başarısızdır. Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin matematikten başarısız olduğu bilindiğine göre, erkek öğrenci olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Erkek öğrencilerin kümesi A ise, $s(A)=30$

Matematikten başarısız olanların kümesi B ise,

$s(B)=5+10=15$

Hem erkek hem de matematikten başarısız olan öğrencilerin sayısı, $s(A\cap B)=10$ dur.

İstenen olayın olasılığı,

$$P(A/B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$ bulunur.

Örnek:

Bir sınıftaki öğrencilerin % 60'ı kız öğrencidir. Kız öğrencilerin % 50'si, erkek öğrencilerin de % 60'ı matematik dersinden başarılı olmuştur. Sınıftan rastgele seçilen bir erkek öğrencinin matematikten başarılı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

	Başarılı	Başarısız
Kız :	30	30
Erkek :	24	16

Seçilen öğrenci erkek olduğundan $S(E)=40$

$S(B\cap E)=24$ olduğundan,

$$P(B/E)=\frac{s(B\cap E)}{s(E)}=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$$ bulunur.

Örnek:

Bir torbadaki 10 bilyeden 5'i sarı, 3'ü kırmızı, 2'si pembedir. Bu torbadan aynı anda 2 bilye seçiliyor. Seçilen bilyelerin ikisinin de farklı renk olduğu bilindiğine göre, birinin pembe diğerinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Seçilen iki bilyenin farklı renk olması olayı B olsun.

$$s(B)=\binom{5}{1}.\binom{3}{1}+\binom{5}{1}.\binom{2}{1}+\binom{3}{1}.\binom{2}{1}$$

$$=5.3+5.2+3.2=31$$

Seçilen iki bilyeden birinin pembe diğerinin kırmızı olması olayı A olsun.

$$s(A)=\binom{3}{1}.\binom{2}{1}=3.2=6$$ dır.

A kümesini oluşturan elemanlar aynı zamanda B kümesinin de elemanı olduğundan,

$s(A\cap B)=6$ dır.

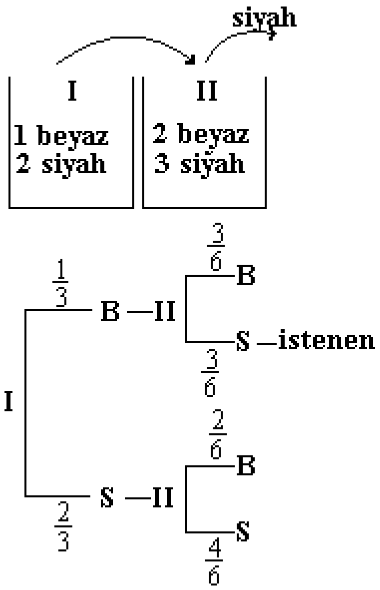
Buna göre seçilen bilyelerin ikisinin de farklı renk olduğu bilindiğine göre, birinin pembe diğerinin kırmızı olma olasılığı,

$$P\left(A/B\right)=\frac{s\left(A\cap B\right)}{s\left(B\right)}=\frac{6}{31}\ \text{bulunur.}$$

Örnek:

İki kutudan birincisinde 1 beyaz 2 siyah, ikincisinde 2 beyaz 3 siyah top vardır. Birinci kutudan 1 top çekiliyor ve ikinci kutuya atılıyor. İkinci kutudan çekilen top siyah olduğuna göre, birinci kutudan çekilen topun beyaz olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:



İkinci kutudan çekilen topun siyah olduğuna göre, birinci kutudan çekilen topun beyaz olma olasılığı istenmektedir. Yukarıdaki ağaç diyagramından görüldüğü gibi uygun sonuç işaretlenmiş olup ikinci kutudan çekilenlerin siyah olması ise olabilecek tüm siyah durumlardır. Buna göre istenen durumun olasılığı,

$$P\left(A\right)=\frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{6}}{\frac{1}{3}.\frac{3}{6}+\frac{2}{3}.\frac{4}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{18}}=\frac{3}{11}\ \text{bulunur.}$$

Örnek:
Bir fabrikadaki ürünlerin % 40'ı A makinesinde, % 60'ı B makinesinde üretilmektedir. A makinesinde üretilen ürünlerin % 10'u, B makinesinde üretilen ürünlerin % 25'i bozuk çıkmaktadır. Seçilen bir ürünün bozuk olduğu bilindiğine göre B makinesinde üretilme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Bozuk ürün A makinesinde veya B makinesinde üretilmiştir. Seçilen ürünün bozuk olması olayı C ise,

$$P\left(C\right)=P\left(A\cap C\right)+P\left(B\cap C\right)\ \text{olup}$$

$$P\left(C\right)=P\left(A\right).P\left(C/A\right)+P\left(B\right).P\left(C/A\right)$$

$$P\left(C\right)=\frac{40}{100}.\frac{10}{100}+\frac{60}{100}.\frac{5}{100}=\frac{7}{100}\ \text{dür.}$$

Buna göre seçilen bir ürün bozuk olduğu bilindiğine göre B makinesinde üretilme olasılığı,

$$P\left(B/C\right)=\frac{P\left(B\cap C\right)}{P\left(C\right)}=\frac{\frac{60}{100}.\frac{5}{100}}{\frac{7}{100}}=\frac{3}{7}\ \text{dir.}$$

Örnek:

"PAPATYA" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilen 7 harfli kelimelerden biri seçiliyor. Seçilen kelimenin P harfi ile başladığı bilindiğine göre, A harflerinin yan yana olması olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Seçilen kelimenin P harfi ile başlaması olayı C olsun,

$$s\left(C\right)=\frac{2.6!.1}{3!.2!}=120\ \text{olur.}$$

A harflerinin yan yana olması olayı D olsun. Buna göre ilk harfi P olup A harflerinin yan yana olduğu durum sayısı,

$$s\left(C\cap D\right)=\frac{2.4!.3!}{3!.2!}=24\ \text{olur. Buna göre, istenen olasılık}$$

$$P\left(D/C\right)=\frac{s\left(C\cap D\right)}{s\left(C\right)}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}\ \text{elde edilir.}$$

Örnek:

İki kutudan birincisinde 2 yeşil, 3 sarı; ikincisinde 4 yeşil 3 sarı top vardır. Bir zar atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayı 2 den büyük ise 1. kutudan, aksi taktirde 2. kutudan 1 bilye çekiliyor. Bu işlemin sonucunda çekilen topun sarı geldiği bilindiğine göre 1. kutudan çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Çekilen topun sarı olması olayına S diyelim. Sarı top 1. kutudan veya 2. kutudan çekilebilir. 1. kutudan sarı top çekilmesi olayına A, 2. kutudan sarı top çekilmesi olayına B dersek,

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S)$$

$$P(S) = P(A).P(S/A) + P(B).P(S/B)$$

$$P(S) = \frac{4}{6}.\frac{3}{5} + \frac{2}{6}.\frac{3}{7} = \frac{19}{35} \text{ olur.}$$

Buna göre, çekilen sarı topun 1. kutudan çekilme olasılığı,

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{4}{6}.\frac{3}{5}}{\frac{19}{35}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{19}{35}} = \frac{14}{19} \text{ olur.}$$

Sonsuz Örnek Uzay

E örnek uzayı sayılamayacak çoklukta örnek noktalardan (uzunluk, alan, hacim gibi geometrik ölçümler) meydana geliyorsa sonsuz örnek uzay adını alır. A olayı E örnek uzayında bir olay olsun. A olayının olasılığı,

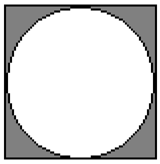
$$P(A) = \frac{\text{A'nıı ölçüsü}}{\text{E'nin ölçüsü}} \text{ olur.}$$

Örnek:

$[5,9]$ kapalı aralığından seçilen bir noktanın $[6,7]$ kapalı aralığında olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{|7-6|}{|9-5|} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Örnek:



Bir kenarı 2 birim olan kare şeklindeki bir levha üzerinden seçilen bir noktanın, levhanın ağırlık merkezine olan uzaklığının en az 1 birim olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Yukarıdaki şekilde istenen noktalar taralı alanla gösterilmiştir.

Bu noktalar yarıçapı 1 birim olan daire diliminin dışında bulunur. İstenen olaya A diyelim. Burada örnek uzay bir kenarı 2 birim olan levhanın üzerindeki bütün noktalardır.

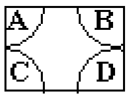
Buna göre A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{\text{A'nıı alanı}}{\text{E'nin alanı}} = \frac{2^2 - \pi.1^2}{2^2} = \frac{4-4\pi}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

Boyutları 2 birim ve 3 birim olan dikdörtgen şeklindeki bir levha üzerinde rastgele işaretlenen bir noktanın, levhanın köşelerinden en çok 1 birim uzakta olma olasılığı nedir?

Çözüm:



Levhanın köşelerinden en çok 1 birim uzakta olan noktaların oluşturduğu bölge şekilde dört tane çeyrek daire dilimlerini oluşturur.
Örnek uzay da dikdörtgen şeklindeki levhanın üzerindeki bütün noktalardır.

Buna göre, $\text{Alan}(A+B+C+D) = 4.\frac{\pi.1^2}{4} = \pi$

$\text{Alan}(E) = 3.2 = 6$

İstenen olay K ise, K'nın olasılığı,

$$P(K) = \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

Çözümlü Sorular

1) E örnek uzay olmak üzere $E = A \cup B \cup C$ dir. A,B ve C kümeleri ayrıktır. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ olduğuna göre $P(C)$ kaçtır?

Çözüm:

A,B,C ayrık kümeler ve $E = A \cup B \cup C$ olduğundan,

$P(A) + P(B) + P(C) = 1$ dir.

Bu eşitlikte $P(A) = \frac{1}{2}$ ve $P(B) = \frac{2}{5}$ yazılırsa;

$P(C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ bulunur.

2) Bir torbada 1'den 10'a kadar numaralandırılmış 10 tane top vardır. Bu torbadan rastgele seçilen bir topun üzerindeki numaranın 2'nin <u>veya</u> 3'ün tam katı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Örnek uzay; $E = \{1,2,3,...,10\}$

2'nin katı olan sonuçlar; $A = \{2,4,6,8,10\}$ 3'ün katı olan sonuçlar; $B = \{6,9\}$

Buna göre, $A \cap B = \{6\}$ dir. Bu durumda

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$ bulunur.

3) Bir zar art arda iki kez havaya atılıyor. İkinci atışta üst yüze gelen sayının, birinci atışta gelen sayıdan büyük olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	(1,1)	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**
2	(2,1)	(2,2)	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	**(4,5)**	**(4,6)**
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	**(5,6)**
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

İkinci atışta üst yüze gelen sayının, birinci atışta gelen sayıdan büyük olma olayı M ise, tablodan koyu yazılmış kısımlardan görüleceği gibi $s(M) = 15$ tir. Buna göre,

$P(M) = \frac{s(M)}{s(E)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ dir.

4) 6 evli çift arasından seçilen iki kişinin karı-koca olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

12 kişi arasından 2 kişi; $\binom{12}{2} = 66$ farklı şekilde seçilebilir.

6 evli çift olduğundan, seçilen 2 kişinin karı-koca olma olasılığı:

$\frac{6}{66} = \frac{1}{11}$ dir.

5) 5 bay ve 4 bayanın bulunduğu bir topluluktan rastgele seçilen 3 kişiden en az ikisinin bay olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

5 bay ve 4 bayan arasından 3 kişi; $\binom{9}{3} = 84$ farklı şekilde seçilebildiğinden örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 84$ olur.

En az ikisi bay olan 3 kişilik bir grup;

$\binom{5}{2}.\binom{4}{1} + \binom{5}{3} = 50$ farklı şekilde seçilebilir.

Buna göre istenen olayın olasığı,

$\frac{50}{84} = \frac{25}{42}$ olur.

6) Ali'nin de aralarında bulunduğu 8 kişiden rastgele seçilen 3 kişi arasında Ali'nin bulunma ihtimali kaçtır?

Çözüm:

8 kişiden 3 kişi; $\binom{8}{3} = 56$ farklı şekilde seçilebildiğinden

örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 56$ olur.
Seçilecek 3 kişilik grupta Ali mutlaka bulunacağı için 7 kişiden Ali dışında 2 kişi daha; $\binom{7}{2} = 21$ farklı şekilde seçilebilir. Buna göre istenen olayın olasılığı,

$\frac{21}{56} = \frac{3}{8}$ olur.

7) $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesindeki rakamlar kullanılarak oluşturulabilen, rakamları farklı 3 basamaklı doğal sayılar birer karta yazılıp bir torbaya atılıyor. Bu torbadan rastgele alınan bir kartın üzerindeki sayının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesindeki rakamlar kullanılarak rakamları farklı 3 basamaklı;

$5.5.4 = 100$ tane doğal sayı yazılabildiğinden örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 100$ dür.

Bu torbadan rastgele alınan bir kartın üzerindeki sayının tek sayı olması olayı B ise,
4.4.3= 48 farklı 3 basamaklı tek doğal sayı yazılabileceğinden, $s(B) = 48$ dir.

Buna göre istenen durumun olasılığı,

$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ olur.

8) 7 kişilik bir kurul yuvarlak masada rastgele oturuyor. Başkan ve başkan yardımcısının yan yana oturma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

7 kişilik bir kurul yuvarlak masada;

$(7-1)! = 6! = 720$ farlı şekilde oturabileceği için

$s(E) = 720$ dir.

Başkan ve başkan yardımcısının yan yana oturma olayı A ise,

$s(A) = (6-1)!.2! = 240$ tır.

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$ bulunur.

9) Bir torbada 2 yeşil, 2 mavi, 5 kırmızı bilye vardır. Bu torbadan, çekilen bilye geri bırakılmamak şartı ile 3 bilye çekiliyor. 1. çekilişte mavi, 2. ve 3. çekilişte aynı renkte bilye gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

1. çekilişte mavi, 2. ve 3. çekilişte aynı renkte bilye gelme olasılığı için 3 durum vardır.

1.Durum: 1. mavi, 2. yeşil, 3. yeşil olma olasılığı;

$\frac{2}{9}.\frac{2}{8}.\frac{1}{7} = \frac{1}{126}$ dır.

2.Durum: 1. mavi, 2. mavi, 3. mavi olma olasılığı;

$\frac{2}{9}.\frac{1}{8}.\frac{0}{7} = 0$ dır

3..Durum: 1. mavi, 2. kırmızı, 3. kırmızı olma olasılığı;

$\frac{2}{9}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{10}{126}$ dır

Buna göre istenen durumun olasılığı,

$\frac{1}{126} + 0 + \frac{10}{126} = \frac{11}{126}$ bulunur.

10) Bir torbada 2 mavi, 4 kırmızı, 5 beyaz bilye vardır. Bu torbadan çekilen iki bilyenin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

11 bilyeden 2 bilye; $\binom{11}{2} = 55$ farklı şekilde

seçilebildiğinden örnek uzayın eleman sayısı; $s(E) = 55$ tir.

Çekilen iki bilyenin farklı renkte olma olayı A olsun. Çekilen iki bilyenin farklı renkte ise 1. bilye mavi, 2. bilye kırmızı veya 1. bilye mavi, 2. bilye beyaz veya 1. bilye kırmızı, 2. bilye beyaz renkte olmak üzere üç durum söz konusudur. Buna göre,

$$s(A) = \binom{2}{1}.\binom{4}{1} + \binom{2}{1}.\binom{5}{1} + \binom{4}{1}.\binom{5}{1} = 38 \text{ olup,}$$

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{38}{55} \text{ bulunur.}$$

11) 5 madeni para havaya atıldığında, en çok dördünün yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

5 madeni para havaya atıldığında örnek uzayın eleman sayısı; $s(E) = 2^5 = 32$ dir.

En çok dördünün yazı gelmesi olayı A ise, beşinin de yazı gelmesi olayı A' olup,

$$P(A') = \frac{s(A')}{s(E)} = \frac{1}{32} \text{ dir.}$$

$P(A) + P(A') = 1$ olduğundan dolayı,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \text{ bulunur.}$$

12) A,B,C,D,E,F noktaları bir çemberin üzerindedir. Köşeleri bu noktalar olan üçgenlerden biri seçilirse bu üçgenin bir köşesinin A olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Köşeleri A,B,C,D,E,F noktaları üzerinde olan

$\binom{6}{3} = 20$ farklı üçgen çizilebildiğinden örnek uzayın

eleman sayısı; $s(E) = 20$ dir.

Üçgenin bir köşesi A olacak ise geriye kalan 2 köşe B,C,D,E,F noktalarından seçilmelidir. Bu olaya K dersek,

$$s(K) = \binom{5}{2} = 10 \text{ olup, istenen olasılık,}$$

$$P(K) = \frac{s(K)}{s(E)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

13) Bir sınıfta eşit sayıda erkek ve kız öğrenci vardır. Bu sınıftan art arda iki öğrenci seçiliyor. Seçilen iki öğrencinin de erkek olma olasılığı $\frac{11}{46}$ dır. Buna göre başlangıçta sınıfta kaç öğrenci vardır?

Çözüm:

Sınıfta n tane erkek öğrenci, n tane kız öğrenci olsun. Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin erkek olma olasılığı,

$$\frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Sınıfta geriye kalan $2n - 1$ tane öğrenciden $n - 1$ tanesi erkek olup sınıftan seçilecek ikinci öğrencinin de erkek olma olasılığı,

$$\frac{n-1}{2n-1} \text{ dir.}$$

Bu durumda art arda seçilen iki öğrencinin ikisinin de erkek olma ihtimali,

$$\frac{1}{2}.\frac{n-1}{2n-1} = \frac{11}{46} \Rightarrow 23n - 23 = 22n - 11 \text{ olup,}$$

$n = 12$ bulunur. Sınıf mevcudu; $2n = 24$ tür.

14) "BEREKET" kelimesindeki harfleri kullanarak yazılabilen 7 harfli anlamlı veya anlamsız kelimeler kağıtlara yazılıp bir torbaya bırakılıyor. Bu torbadan bir kağıt çekiliyor. Çekilen kağıttaki kelimenin E ile başlayıp E ile bitmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm:

“BEREKET” kelimesindeki harfleri kullanarak yazılabilen 7 harfli,

$\frac{7!}{3!} = 840$ farklı kelime yazılabildiğinden bu deneyde örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 840$ tır.

E ile başlayıp E ile biten kelimelerin kümesine A dersek,

$$s(A) = \frac{3.5!.2}{3!} = 120 \text{ olur.}$$

Buna göre seçilen kelimenin E ile başlayıp E ile bitmesi olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{120}{840} = \frac{1}{7} \text{ bulunur.}$$

15) Hileli bir paranın tura gelme olasılığı $\frac{2}{3}$, yazı gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ tür. Bu para 4 kez atıldığında 3 tura, 1 yazı gelme ihtimali kaçtır?

Çözüm:

Üç tura (T,T,T) ve yazı (Y) gelme olayı Y,T,T,T nın sıralanışı kadardır. Tekrarlı permütasyondan bu sıralanışın sayısı,

$\frac{4!}{3!} = 4$ tür.

Para atışları bağımsız olaylar olduklarına göre, 4 kez atılan hileli paranın üst yüzünde 3 tura, 1 yazı gelme olasılığı çarpma kuralına göre,

$$4.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{32}{81} \text{ olur.}$$

16) A torbasında 2 mavi, 4 kırmızı, B torbasında 3 mavi, 5 kırmızı bilye vardır. Bu torbaların birisi seçiliyor. Seçilen bu torbadan çekilen bir bilyenin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Çekilen bilye A torbasından <u>veya</u> B torbasından çekilmiştir.

Buna göre,

$$\frac{1}{2}.\frac{4}{6} + \frac{1}{2}.\frac{5}{8} = \frac{4}{12} + \frac{5}{16} = \frac{31}{48} \text{ dir.}$$

17) A sepetinde 4 bozuk ve 6 sağlam, B sepetinde 6 bozuk ve 4 sağlam yumurta vardır. Bu iki sepetten 2’şer tane yumurta rastgele alınıyor. Alınan yumurtaların 4’ünün de sağlam olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

A sepetinden rastgele alınan iki yumurtanın ikisinin de sağlam olma olayı A ise,

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

B sepetinden rastgele alınan iki yumurtanın ikisinin de sağlam olma olayı B ise,

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$$ olur. A ve B olayları bağımsız olduğundan, çekilen yumurtaların hepsinin sağlam olma olasılıkları,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{3}.\frac{2}{15} = \frac{2}{45} \text{ bulunur.}$$

18) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin alt kümelerinden biri seçiliyor. Seçilen kümede 5’in en büyük eleman olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin alt kümeleri sayısı,

$2^7 = 128$ olduğundan örnek uzayın eleman sayısı 128

olur.

5'in en büyük eleman olduğu alt kümelerde 6 ile 7 bulunmaz. 5'in en büyük olduğu alt kümeler; 1,2,3 ve 4 ile oluşturulabilecek tüm alt kümelere 5'in eleman olarak eklenmesiyle elde edilebilir. Buna göre, 5'in en büyük olduğu alt kümelerin sayısı,

$2^4 = 16$ dır.

Bu durumda, seçilen alt kümede 5'in en büyük eleman olma olasılığı,

$\frac{16}{128} = \frac{1}{8}$ dir.

19) Bir çift zar birlikte havaya atılıyor. Birinin 2 geldiği bilindiğine göre, üst yüzlere gelen sayıların toplamının 6 olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Zarın üst yüzeyinden birinin 2 geldiği olay B ise,

$$B = \left\{ \begin{matrix} (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5), \\ (2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2) \end{matrix} \right\}$$

$s(B) = 11$ dir.

Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olma olayı A ise,

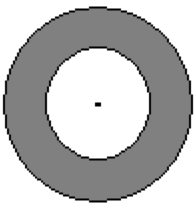
$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$ olup $s(A \cap B) = 2$ dir.

Buna göre,

$P(A/B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{2}{11}$ bulunur.

20) Yarıçapı 6 birim olan bir dairenin içinden seçilen bir noktanın merkeze olan uzaklığının en az 2 birim olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:



İstenen noktaların kümesi taralı olarak gösterilmiştir. Bu noktalar yarıçapı 2 birim olan dairenin dışı ile yarıçapı 6 birim olan dairenin içidir. Burada yarıçapı 6 birim olan daire örnek uzay, yarı çapı 2 birimden büyük olan halkanın alanı A olsun.

$P(A) = \frac{\pi.6^2 - \pi.2^2}{\pi.6^2} = \frac{36\pi - 4\pi}{36\pi} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$ dur.

21) M ve N, E örnek uzayının iki olayıdır. $P(M \cup N) = \frac{8}{9}$, $P(M' \cup N') = \frac{7}{9}$, $P(M) = \frac{7}{18}$ olduğuna göre $P(N')$ kaçtır?

Çözüm:

$P(M \cap N) = 1 - P\left((M \cap N)'\right) = 1 - P(M' \cup N')$

$P(M \cap N) = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$

$P(M \cup N) = \frac{8}{9}$

$\frac{8}{9} = \frac{7}{18} + P(N) - \frac{2}{9} \Rightarrow P(N) = \frac{8}{9} + \frac{2}{9} - \frac{7}{18}$

$P(N) = \frac{13}{18} \Rightarrow P(N') = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}$ bulunur.

22) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinden seçilen iki rakamın toplamının tek sayı olma olasılığı nedir?

Çözüm:

İki rakamın toplamının tek sayı olması için; birisinin tek, diğerinin çift olması gerekir. Buna göre,

$$P(T,Ç) = \frac{\binom{5}{1}.\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5.4}{9.4} = \frac{5}{9} \text{ bulunur.}$$

23) 5 madeni para atılıyor. Bunlardan en az 4'ünün yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$P(Y,Y,Y,Y,T) + P(Y,Y,Y,Y,Y)$ isteniyor.

$P(Y,Y,Y,Y,T)+P(Y,Y,Y,Y,Y)$

$=\frac{1}{32}.\frac{5!}{4!}+\frac{1}{32}.\frac{5!}{5!}=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$ bulunur.

24) Bir zarın asal sayı olan yüzleri beyaz, diğer yüzleri sarı renklidir. Bu zar bir kez atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayının tek sayı veya sarı renkli olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$P(T\cup S)=P(T)+P(S)-P(T\cap S)$

$P(T\cup S)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ bulunur.

(Sarıya boyanan yüzler: 1,4,6 Bunlardan tek sayı olan: 1)

25) Bir torbada beyaz, sarı, kırmızı toplardan 3'er tane vardır. Aynı anda çekilen üç topun en az ikisinin aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

En az ikisinin aynı renkte olma olayına A denilirse, üçünün de aynı renkte olma olayı A' olur.

$P(A)+P(A')=1\Rightarrow P(A)=1-P(A')$ olup

$P(A)=1-\frac{3}{9}.\frac{3}{8}.\frac{3}{7}.3!=\frac{19}{28}$ bulunur.

26) Bir torbada 1'den 15'e kadar numaralandırılmış 15 tane fiş bulunmaktadır. Torbadan rastgele çekilen bir fişin üzerindeki numaranın asal veya 3'ün katı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Çekilen sayının asal olma olayı a, 3'ün katı olma olayı da B olsun.

$A=\{2,3,5,7,11,13\}$, $B=\{3,6,9,12,15\}$ olup, $A\cap B=\{3\}$ tir.

Olaylar ayrık değil

Buna göre,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}-\frac{1}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ bulunur.

27) İki zar ile iki madeni para birlikte atılıyor. Paraların farklı veya zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9'dan büyük olma ihtimali kaçtır?

Çözüm:

Paraların farklı gelmesi olayı A, zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9'dan büyük olma olayı B olsun.

$A=\{(Y,T),(T,Y)\}$ ise $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ dir.

$$\begin{array}{llll} B\rightarrow & 10, & 11, & 12 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \quad \text{ise} \\ \text{Adet :} & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$P(B)=\frac{3+2+1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Olaylar ayrık olup,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$

$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}.\frac{1}{6}=\frac{6+2-1}{12}=\frac{7}{12}$ dir.

28) Bir filede 3 elma, 4 armut ve 5 portakal vardır. Bu fileden, alınan meyve tekrar fileye konmadan arka arkaya rastgele 3 meyve alınıyor. İlk alınan meyvenin armut, diğerlerinden birinin elma, birinin portakal olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Armut,Elma,Portakal veya Armut, Portakal,Elma olma olasılığı,

$\frac{4}{12}.\frac{3}{11}.\frac{5}{10}.2!=\frac{1}{11}$ dir.

29) 6 kişilik bir öğrenci grubundan 2 kişi matematik dersinden geçmiştir. Bu öğrencilerden arka arkaya 3 öğrenci çağırılırsa sadece üçüncü öğrencinin matematikten geçmiş olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Matematikten geçmiş olma olayı M, geçmemiş olma olayı M' olsun. O halde,

$$P(M',M',M)=\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}=\frac{1}{5} \text{ tir.}$$

30) Bir para ve bir zar birlikte atılıyor. Paranın tura ve zarın 4 ten büyük gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Paranın tura gelme olasılığı; $P(T)=\frac{1}{2}$ dir.

Zarın 4'ten büyük (5 veya 6) gelme olasılığı;

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Paranın tura ve zarın 4 ten büyük gelme olasılığı;

$$P(T\cap B)=P(T).P(B)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

31) Bir torbada 4 kırmızı, 6 mavi top vardır. Bu torbadan arka arkaya tekrar torbaya konmamak şartı ile 4 top çekiliyor. Çekilen toplardan en az ikisinin mavi renkli olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$MMM'M'$ veya $MMMM'$ veya $MMMM$ olayının olasılığı;

$$\frac{\binom{6}{2}.\binom{4}{2}+\binom{6}{3}.\binom{4}{1}+\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{37}{42} \text{ bulunur.}$$

32) n, 4'ten büyük bir doğal sayıdır. Bir torbada 1 den n'e kadar olan tüm doğal sayıların yazılı olduğu n tane kart vardır. Torbadan geriye atılmaksızın art arda çekilen iki kartın üstündeki sayılardan ikincisinin birinciden büyük olma olasılığı nedir?

Çözüm:

İstenilen durumlar:

2.Kart 2 iken 1.Kart 1 olabilir; $(1,2)$

2.Kart 3 iken 1.Kart 1 veya 2 olabilir; $(1,3),(2,3)$

2.Kart 4 iken 1.Kart 1 veya 2 veya 3 olabilir; $(1,4),(2,4),(3,4)$

…………………………………………..

2.Kart n iken 1.Kart 1,2,3,…,n-1olabilir;

$$(1,n),(2,n),(3,n),...,(n-1,n)$$

O halde istenen durumun olasılığı;

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}}=\frac{n-1}{\frac{n.(n-1)}{2}}=\frac{2}{n} \text{ bulunur.}$$

33) A torbasında 4 beyaz, 3 kırmızı, B torbasında 3 beyaz, 4 kırmızı top vardır. Bir zar atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayı 3 ten küçükse A torbasından, değil ise B torbasından bir top çekiliyor. Buna göre çekilen topun beyaz olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{2}{6}.\frac{4}{7}+\frac{4}{6}.\frac{3}{7}=\frac{10}{21} \text{ bulunur.}$$

34) Düzgün bir para üç defa atılıyor. İki defa yazı, bir defa tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

İstenen durum YYT şeklinde olup olasılığı,

$$\frac{3!}{2!}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \text{ dir.} \left(YYT\rightarrow\frac{3!}{2!}\right)$$

35) Bir torbada 3 mavi, 6 kırmızı top vardır. Bu torbadan çekilen bir topun yerine siyah bir top konmaktadır. Peş peşe iki top çekildiğinde iki topun da farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

İstenilen durum MM' veya KK' şeklindedir

$\frac{3}{9}.\frac{7}{9}+\frac{6}{9}.\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ olur.

36) Sadece mavi ve kırmızı bilyelerin bulunduğu bir kavanozdaki mavi bilyelerin sayısının, kırmızı bilyelerin sayısına oranı $\frac{2}{3}$ tür. Bu kavanozdan aynı anda ve rastgele iki bilye çekiliyor. Çekilen bilyelerin aynı renkte olma olasılığı $\frac{7}{15}$ olduğuna göre, bu kavanozda kaç bilye vardır.

Çözüm:

Mavi bilyelerin sayısına 2x denilirse, kırmızı bilyelerin sayısı 3x olur. Torbadan çekilen iki bilyenin aynı renkte olma olasılığı $\frac{7}{5}$ ise, farklı renkte olma olasılığı $\frac{8}{15}$ tir. Buna göre,

$MK \rightarrow 2!.\frac{2x}{5x}.\frac{3x}{5x-1}=\frac{8}{15} \Rightarrow x=2$ bulunur.

Kavanozdaki bilye sayısı: 5x = 5.2= 10 dur.

37) $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin elemanları ile yazılabilen rakamları farklı 3 basamaklı sayılardan biri seçiliyor. Seçilen sayının 5 ile tam bölünmeyen bir sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ rakamları ile yazılabilen rakamları farklı 3 basamaklı sayılar;

6.P(6,2)=6.6.5 = 180 tanedir

$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ rakamları ile yazılabilen rakamları farklı 3 basamaklı 5 ile bölünemeyen sayıların sayısı; 5.5.5 =125 tanedir.

Buna göre iatenilen olayın olasılığı; $\frac{5.5.5}{6.6.5}=\frac{25}{36}$ dır.

38) Bir zar 5 defa atılıyor. Sadece iki defa 3 gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

3 olma olayı A, 3 gelmeme olayı A' olsun. Buna göre;

$AAA'A'A' \rightarrow \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5!}{2!.3!}=\frac{625}{3888}$ dir.

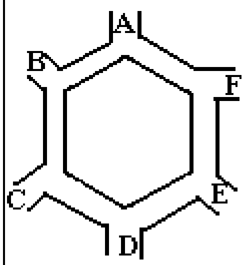
39) Bir torbada 12 beyaz, 6 siyah top vardır. Torbadan bir top çekilmekte, beyaz ise torbaya geri konmakta, siyah ise çekilen topla, 3 siyah top daha torbaya konmaktadır. Daha sonra bir top çekiliyor. Bu topun beyaz olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

BB veya BB'

$\frac{12}{18}.\frac{12}{18}+\frac{6}{18}.\frac{12}{21}=\frac{40}{63}$ bulunur.

40)



Şekildeki gibi bir labirentte kullandığı yolu bir daha kullanmamak koşulu ile A kapısından giren bir çocuğun E kapısından çıkma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

A dan girip E den çıkacaksa,
A-F-E veya A-B-C-D-E yollarını kullanması gerekir.

$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$ dir.

41) Bir atıcının bir atışta hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

Atıcının bu hedefi en çok üç atışta vurma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

En çok üç atışta vurma olayına A denilirse, üç atışta da vuramama olayı A' olur. Buna göre,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{26}{27} \text{ dir.}$$

42) Bir madeni para art arda beş kez atıldığında iki kez yazı, üç kez tura geldiği bilindiğine göre, ilk ve son atışta tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Bir madeni para art arda beş kez atıldığında iki kez yazı, üç kez tura geldiği durumların sayısı (örnek uzayın eleman sayısı),

$$YYTTT \to \frac{5!}{2!.3!} = 10 \text{ ve}$$

İlk ve son atışta tura geldiği durumların sayısı (istenilen olayın eleman sayısı),

$$[T]TYY[T] \to \frac{3!}{2!} = 3 \text{ tür.}$$

İstenilen durumun olasılığı; $\frac{3}{10}$

43) Bir torbada 3 kırmızı, 3 siyah, 3 beyaz, 3 mavi top vardır. Bu torbadan arka arkaya, yerine konmaksızın 3 top çekiliyor. Buna göre çekilen topların farklı renklerde olma olasılıkları kaçtır?

Çözüm:

Torbadan üç çekiliş yapılacak ve torbadaki farklı renkteki topların adetleri aynı olduğundan,

1. çekilişte; rastgele bir renk gelme ihtimali kesin ihtimal olduğundan olasılığı 1 dir.

2. çekilişte; ilk çekilen topun rengine göre farklı renkte top sayısı 9 tane olduğundan bunun çekilme olasılığı; $\frac{9}{11}$ dir.

3. çekilişte; 1. ve 2. çekilişe göre farklı renkte top sayısı 6 dır. Bunun çekilme olasılığı; $\frac{6}{10}$ dır.

Çarpma kuralı gereği bu olasılığın gerçekleşme olasılığı;

$$1.\frac{9}{11}.\frac{6}{10} = \frac{27}{55} \text{ tir.}$$

44) 6 kız, 5 erkek öğrencinin bulunduğu bir gruptan bir voleybol takımı yapılacaktır. Bu takımda eşit sayıda kız ve erkek öğrenci bulunacağına göre, kızlardan Ayşe'nin olması, erkeklerden Can'ın olmaması olasılığı kaçtır?

Çözüm:

3 kız, 3 erkek olma koşulu ile

$$\binom{6}{3}.\binom{5}{3} = 200 \text{ farklı takım kurulabilir}$$

Bu koşula göre, kız öğrencilerden Ayşe'nin olmadığı, erkek öğrencilerden Can'ın olmadığı,

$$\binom{5}{2}.\binom{4}{3} = 40 \text{ farklı takım kurulabilir.}$$

O halde istenen olayın olasılığı,

$$\frac{40}{200} = \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

KONU BİTMİŞTİR