KOMBİNASYON

Tanım

$n,r \in N$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r-li kombinasyonu denir. n elemanlı bir kümenin r elemanlı bütün alt kümelerinin sayısı $C(n,r)$ veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

$C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!.r!}$ ile hesaplanır.

Örnek:

$A = \{m,n,p,s\}$ kümesinin 3 lü kombinasyonlarını ve 3 lü permütasyonlarını karşılaştıralım:

<u>Kombinasyon</u>	<u>Permütasyon</u>
$\{m,n,p\}$	mnp, mpn, nmp, npm, pmn, pnm
$\{m,n,s\}$	mns, msn, nms, nsm, smn, snm
$\{m,p,s\}$	mps, msp, pms, psm, smp, spm
$\{n,p,s\}$	nps, nsp, pns, psn, snp, spn

$A = \{m,n,p,s\}$ kümesinin 3 lü kombinasyonlarının sayısı 4 ve 3 lü permütasyonlarının sayısı 24 olduğu görülmektedir.

$P(4,3) = 4.3.2 = 24$ ve $C(4,3) = \dfrac{P(4,3)}{3!} = \dfrac{24}{6} = 4$

Örnek:

7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı;

$\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{(7-3)!.3!} = \dfrac{7.6.5}{6} = 35$ tir.

Örnek: 1985-ÖYS

10 sporcudan oluşan beş kişilik bir takım oluşturulacaktır. Bu 10 kişiden takıma girecek iki kişi belli olduğuna göre, takım kaç değişik şekilde kurulabilir?

Çözüm:

Takıma girecek 2 kişi belli olduğuna göre, diğer 3 kişi kalan 8 kişi arasından seçilerek bu takım,

$\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{(8-3)!.3!} = \dfrac{8.7.6}{6} = 56$

değişik biçimde kurulabilir.

Örnek: 1983-ÖYS

10 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerden oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısı, bu sınıftaki erkek öğrencilerin sayısına eşittir. Sınıfta kaç kız öğrenci vardır?

Çözüm:

Kız sayısına n denilirse, erkek öğrenci sayısı 10 – n olur.

Buna göre;

$\binom{n}{2} = 10 - n \Rightarrow \dfrac{n.(n-1)}{2} = 10 - n$

$\Rightarrow n.(n+1) = 20 = 4.5 \Rightarrow n = 4$

Uyarı

1. n elemandan r eleman seçiliyorsa sıralamanın önemi yoktur. Çünkü kümenin elemanlarının yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez. Bu durumda kombinasyon kullanılır.
2. n elemandan r eleman seçilip bu r eleman sıralanıyorsa permütasyon ile hesap yapılır.

   Buna göre permütasyon hesabı; n elemandan r elemanın seçilmesi (birinci iş) kombinasyonla hesaplandıktan sonra, bu r elemanın sıralanmaları (ikinci iş) hesaplanarak (r!) birlikte gerçekleştirilen iki iş olarak düşünülüp ikisinin çarpımı şeklinde yapılabilir. O halde,

   $P(n,r) = \binom{n}{2}.r!$ dir.

Örnek:

1,2,3,4,5,6,7 rakamlarını kullanarak, rakamları farklı, ikisi tek birisi çift rakamdan oluşan üç basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?

Çözüm:

Dört tane tek rakamdan ikisi; $\binom{4}{2} = 6$ değişik şekilde,

Üç tane çift rakamdan birisi; $\binom{3}{1} = 3$ değişik şekilde

seçilebilir. Seçilen bu üç rakam da 3! = 6 şekilde sıralanır.

Buna göre istenilen şartlarda,

$\binom{4}{2}.\binom{3}{1}.3! = 108$ değişik sayı yazılabilir.

Kombinasyon Özellikleri

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ dir.

2. $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ ise $a = b$ veya $a + b = n$ dir.

3. $\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1$ ve $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ dir.

4. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ dir.

5. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{r}$ olduğundan, n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı;

$$\binom{n}{o} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ dir}$$

Örnek: 1989-ÖYS

N elemanlı bir kümenin r-li bütün kombinasyon larının sayısı $C(n,r)$ ile gösterildiğine göre,

$C(0,0) + C(6,3) = 3.C(m,m-1)$ eşitliğinde m kaçtır?

Çözüm:

$C(0,0) + C(6,3) = 3.C(m,m-1)$

$\Rightarrow 1 + \frac{6.5.4}{3!} = 3.m \Rightarrow m = 7$

Örnek: 1982-ÖYS

M,N,P,Q,R gibi beş değişik seçmeli dersten M ve N dersleri aynı saatte verilmektedir. Bu beş dersten ikisini seçmek isteyen bir öğrencinin kaç seçeneği vardır

1. Çözüm:

Bu beş dersten, $\binom{5}{2} = \frac{5.4}{2} = 10$ farklı ikili grup oluşturulabilir.

Ancak bu gruplardan birisi {M,N} dir. M ve N aynı saatte verildiği için bunun dışında kalan 10-1= 9 seçim yapılabilir.

2. Çözüm:

M ve N birisi ile P,Q,R den birisi;

$\binom{2}{1}.\binom{3}{1} = 2.3 = 6$ değişik şekilde, veya M ve N den herhangi biri seçilmeden P,Q,R den ikisi $\binom{3}{2} = 3$ değişik biçimde seçilebilir.

O halde toplam 6+3= 9 değişik seçim yapılabilir.

Örnek: 1981-ÖYS

Kesişen doğrulardan oluşan bir şekilde belirleyici üç özellik aşağıda verilmiştir.

I. Şekil dört doğrudan oluşmaktadır.
I. Her doğru diğer üçünü kesmektedir.
I. Her kesim noktasından iki doğru geçmektedir.

Buna göre şekilde kaç tane kesim noktası vardır?

Çözüm:

4 doğrudan seçilen herhangi ikisi bir kesim noktası oluşturduğuna göre ,

$\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$ kesim noktası bulunur.

Örnek: 1986-ÖYS

10 öğrenci arasından 4 kişilik bir ekip, bu ekip içerisinden de bir başkan seçilecektir. Bir başkan ve üç üyeden oluşan bu ekip kaç farklı biçimde oluşturulabilir?

1. Çözüm:

Birinci iş olarak 10 kişiden 4 kişi, ikinci iş olarak da bu 4 kişiden 1 kişi seçileceğine göre birbirinden farklı;

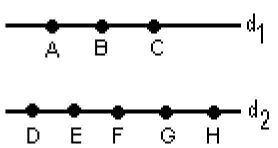
$\binom{10}{4}.\binom{4}{1} = \frac{10.9.8.7}{4!}.4 = 840$ ekip oluşturulabilir.

2. Çözüm:

Birinci iş olarak 10 kişiden 1 kişi(başkan) seçimi, İkinci iş olarak da geriye kalan 9 kişiden 3 kişilik üye seçilirse;

$\binom{10}{1}.\binom{9}{3} = 10.\frac{9.8.7}{3!} = 840$ ekip oluşturulabilir.

Örnek: 1986-ÖYS



Şekildeki doğrular paralel olduğuna göre köşeleri bu 8 noktadan herhangi üçü olan kaç üçgen çizilebilir?

1.Çözüm:

Çizilecek üçgenlerin bir köşesi d_1, tabanı d_2 doğrusu üzerinde olabilir. Veya bir köşesi d_2, tabanı d_1 doğrusu üzerinde olabilir.

O halde çizilecek üçgenlerin sayısı;

$\binom{3}{1}.\binom{5}{2} + \binom{5}{1}.\binom{3}{2} = 3.\frac{5.4}{2!} + 5.3 = 45$ bulunur.

2.Çözüm:

8 noktadan 3 nokta $\binom{8}{3} = 8.7 = 56$ değişik üçgen çizilebilirdi.

Doğrusal olan herhangi üç noktadan dolayı üçgenlerin sayısı toplam;

$\binom{3}{3} + \binom{5}{3} = 1 + 10 = 11$ tane daha az olacaktır.

O halde, şekildeki noktalarla 56-11=45 üçgen çizilebilir.

Örnek:

$\binom{10}{n} = \binom{10}{n+2}$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

2. özellikten dolayı $n = n + 2$ (olamaz) veya

$n + n + 2 = 10$ olup n = 4 bulunur.

Örnek:

n elemanlı bir kümenin altılı kombinasyonları ile beşli kombinasyonları birbirine eşit olduğuna göre n in değeri kaçtır?

Çözüm:

$\binom{n}{5} = \binom{n}{6} \Rightarrow n = 5 + 6 = 11$ bulunur. (2.Özellik)

Örnek:

$\binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{4}$ işlemini yapalım.

Çözüm:

$$\binom{11}{2}+\binom{11}{3}+\binom{12}{4}=\binom{12}{3}+\binom{12}{4}=\binom{13}{4}$$

bulunur. (4.Özellikten dolayı)

Örnek:

$\binom{n}{r-2}+\binom{n}{r-3}=\binom{n+1}{12}$ ise r değerini bulalım.

Çözüm:

$\binom{n}{r-2}+\binom{n}{r-3}=\binom{n+1}{12} \Rightarrow \binom{n+1}{r-2}=\binom{n+1}{12}$ bulunur.

Buradan 2. özellik gereği

$r-2=12$ veya $r-2+12=n+1$ olup

$r-2=12 \Rightarrow r=14$ bulunur.

Örnek:

6 elemanlı bir A kümesinin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım.

1.Çözüm:

3 elemanlı, 4 elemanlı, 5 elemanlı, 6 elemanlı alt kümelerin sayılarının toplamı istenmektedir. Buna göre;

$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=\binom{7}{4}+\binom{7}{6}=42$ dir.

2.Çözüm:

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\underbrace{\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}}_{x}=2^6$$

$$x=2^6-\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}=64-(1+5+15)=42$$

(Bütün durumlardan istenilmeyen durumlar çıkarıldı.)

Örnek:

5 çocuklu bir ailede çocukların cinsiyet dağılımı kaç farklı biçimde olabilir?

1.Çözüm:

5 çocuğun hiçbiri kız değildir; $C(5,0)$

5 çocuğun biri kızdır; $C(5,1)$

5 çocuğun ikisi kızdır; $C(5,2)$

5 çocuğun üçü kızdır; $C(5,3)$

5 çocuğun dördü kızdır; $C(5,4)$

5 çocuğun beşi kızdır; $C(5,5)$

Buna göre 5 çocuklu bir ailede cinsiyet dağılımı;

$C(5,0)+C(5,2)+C(5,3)+C(5,4)+C(5,5)=2^5$ şekildedir.

2.Çözüm:

Her çocuk için kız veya erkek olmak üzere 2 farklı durum söz konusudur.

O halde 5 çocuk için;

$2.2.2.2.2=2^5=32$ farklı durum geçerlidir.

Örnek:

9 voleybolcu arasından 6 voleybolcu kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

9 voleybolcu arasından 6 voleybolcu, 9 un 6 lı kombinasyonlarının sayısı kadar farklı şekilde seçilebilir.
3+6 = 9 olduğundan;

$\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=\frac{9.8.7}{6}=84$ bulunur.

Örnek:

Merve 8 farklı çikolatanın en az ikisini yiyecektir. Buna göre, Merve kaç farklı seçim yapabilir?

Çözüm:

Yiyebileceği çikolata sayısı 2,3,4,5,6,7 veya 8 olabilir. Bütün durumlardan istenmeyen durumlar çıkarılırsa;

$$2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} = 256 - 1 - 8 = 247 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde c elemanı bulunmaz?

Çözüm:

Verilen kümeden c elemanı çıkarılırsa $\{a,b,d,e,f,g\}$ kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin hiç birisinde c bulunmaz.

Buna göre;

$$\binom{6}{4} = \frac{6.5}{2} = 15 \text{ alt kümede c yoktur.}$$

Örnek:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde d elemanı bulunur?

1.Çözüm:

d harfinin bulunduğu dört elemanlı alt kümelerin sayısını bulmak için A kümesinde d dışındaki elemanlarla yazılabilecek 3 elemanlı alt kümelerin sayısı bulunur. Ve bunların her birine d eklenerek d nin bulunduğu dört elemanlı alt kümeler elde edilmiş olur.

$$\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{6} = 20 \quad \text{bulunur.}$$

2.Çözüm:

A kümesinin 4 elemanlı bütün alt kümelerinin sayısı;

$$\binom{7}{4} = \frac{7.6.5}{6} = 35 \text{ tir.}$$

İçinde d nin olmadığı 4 elemanlı alt kümeleri sayısı;

$$\binom{6}{4} = \frac{6.5}{2} = 15$$

İstenilen durumların sayısı; 35-15 = 20 dir.

Örnek:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde b ve e elemanları birlikte bulunur?

Çözüm:

b ve e dışındaki elemanlardan oluşan $\{a,c,d,f,g\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri sayısını bulup bu alt kümelerin her birine b ve e ilave edilerek; 4 elemanlı, içinde b ve e bulunan alt kümeleri bulmuş oluruz.

Buna göre istenilen koşullara uygun alt küme sayısı;

$$\binom{5}{2} = \frac{5.4.3}{2} = 30 \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde d veya f elemanı bulunur?

Çözüm:

Tüm 4 elemanlı alt kümelerin sayısından, içinde d ve f nin bulunmadığı 4 elemanlı alt kümelerin sayısı çıkarılırsa (istenmeyen durumlar) geriye kalan alt kümeler 4 elemanlı olup içinde d veya f bulunur.

Buna göre;

$$\binom{7}{4} - \binom{5}{4} = \frac{7.6.5}{6} - 5 = 30 \quad \text{olur.}$$

Örnek:

Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan 7 kişilik bir aileden 3 kişi konsere gidecektir. Anne konsere kesinlikle gideceğine göre, kaç farklı durum oluşur?

Çözüm:

Anne konsere kesinlikle gideceğine göre kalan 6 kişiden 2 kişi seçilmelidir. Buna göre konsere gidecek 3 kişi,

$\binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6.5}{2} = 15$ farklı şekilde oluşturulabilir.

Örnek:

12 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerden oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısı, erkek öğrencilerden oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısının 2 katından 1 fazladır. Buna göre sınıfta kaç erkek öğrenci vardır?

Çözüm:

Erkek öğrenci sayısı x ise kız öğrenci sayısı 12-x tir. Buna göre;

$$\binom{12-x}{2} = 2.\binom{x}{2} + 1$$

$$\frac{(12-x).(11-x)}{2.1} = 2.\frac{x.(x-1)}{2} + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 21x - 130 = 0 \Rightarrow (x-5).(x+26) = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ veya } x = -26$$

bulunur.

Buna göre x = 5 tir. Kız öğrenci sayısı 5 olarak bulunmuş olur.

Örnek:

8 farklı tişört, 7 farklı gömlek arasından 3 tişört <u>veya</u> 3 gömlek kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

8 farklı tişört içinden 3 tişört; $\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{6} = 56$,

7 farklı gömlek içinden 3 gömlek; $\binom{7}{3} = 35$ şekilde

seçilebilir. Böylece bu seçme işi 91 şekilde yapılabilir.

Uyarı

<u>Veya</u> bağlacı ile sorulan sorularda toplama yolu ile sayma kuralı, <u>Ve</u> bağlacı ile sorulan sorularda çarpma yolu ile sayma kuralı uygulanır.

Örnek:

5 bay ve 3 bayan arasından 3 kişilik bir grup seçilecektir. Grupta 1 tane bayan bulunmak şartı ile kaç farklı seçim yapılabilir?

Çözüm:

3 bayan arasından 1 bayan ve 5 bay arasından 2 bay;

$\binom{3}{1}.\binom{5}{2} = \frac{3}{1}.\frac{5.4}{2} = 30$ farklı şekilde seçilebilir.

Örnek:

5 bay ve 3 bayan arasından 3 kişilik bir grup seçilecektir. Grupta en az bir bayan bulunmak şartı ile kaç farklı seçim yapılabilir?

1.Çözüm:

Koşulsuz seçimlerin sayısından, hiç bayan bulunmayan seçimlerin sayısı çıkarılırsa en az bir bayan bulunan seçimlerin sayısı bulunur.
Buna göre;

$\binom{8}{3} - \binom{5}{3} = 56 - 10 = 46$ farklı şekilde seçilebilir.

2.Çözüm:

1 bayan 2 bay, 2 bayan 1 bay veya 3 bayan şeklindeki seçimlerin sayısı istenmektedir.
Buna göre;

$\binom{3}{1}.\binom{5}{2} + \binom{3}{2}.\binom{5}{1} + \binom{3}{3} = 30 + 15 + 1 = 46$ farklı şekilde

seçilebilir.

Örnek:

5 bayan ve 7 bay arasından 4 kişi seçilecektir. En az üç tanesi bay olan 4 kişi kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

Seçilecek 4 kişiden en az 3 tanesi bay ise, bay sayısı 3 (1 bayan) veya 4 (bayan yok) olan iki durum söz konusudur.

Buna göre; $\binom{7}{3}.\binom{5}{1}+\binom{7}{4}=175+35=210$ olur.

Örnek:

Ersin ve Mustafa'nın da aralarında bulunduğu 10 kişi arasından, Ersin veya Mustafa'nın içinde bulunduğu 4 kişilik bir grup kaç değişik şekilde seçilebilir?

1.Çözüm:

10 kişi; Ersin, Mustafa ve diğer 8 kişiden oluşur. Bu 10 kişiden rastgele seçilen, aralarında Mustafa'nın veya Ersin'in bulunduğu 4 kişilik bir grup aşağıdaki 3 durumdan birine uygundur.

a) Mustafa'nın bulunmayıp Ersinin bulunduğu 4 kişilik gruplar;

$\binom{1}{1}.\binom{8}{3}=56$ şekilde,

b) Ersin'in bulunup Mustafa'nın bulunmadığı 4 kişilik gruplar;

$\binom{1}{1}.\binom{8}{3}=56$ şekilde,

c) Her ikisinin de bulunduğu 4 kişilik gruplar;

$\binom{2}{2}.\binom{8}{2}=28$ şekilde seçilebilir.

Buna göre istenen özellikte 4 kişilik bir grup

56 + 56 + 28 = 140 farklı şekilde seçilebilir.

2.Çözüm:

10 kişiden 4 kişi; $\binom{10}{4}=210$ şekilde,

Ersin ve Mustafa'nın olmadığı 4 kişilik gruplar(istenmeyen);

$\binom{8}{4}=70$ şekilde.

Bu seçme işi; 210-70 = 140 farklı şekilde yapılabilir.

Örnek:

5 kişinin ehliyetinin olduğu 9 kişilik bir gruptan 3 kişi seçilecektir. Seçilecek grupta en az iki ehliyetli olması koşulu ile kaç farklı seçim yapılabilir?

Çözüm:

a) Ehliyetli olan 5 kişiden 2 kişi seçilip, ehliyetsiz olan kişilerden 1 kişi seçilebilir. Veya

b) Ehliyeti olanlardan 3 kişi seçilip, diğerlerinden hiç seçilmez.

Bu seçim;

$\binom{5}{2}.\binom{4}{1}+\binom{5}{3}.\binom{4}{0}=40+10=50$ farklı şekilde yapılabilir.

Örnek:

7 farklı kitabın 3'ü Eda'ya, 4'ü Hasan'a kaç farklı şekilde verilebilir?

Çözüm:

7 farklı kitabın 3'ü Eda'ya; $\binom{7}{3}=35$ şekilde, kalan 4

kitaptan 4'ü Hasan'a; $\binom{4}{4}=1$ şekilde verilebilir.

Çarpma yolu ile sayma kuralına göre kitaplar 35.1 = 35 farklı şekilde dağıtılabilir.

Örnek:

$K=\{1,2,3,5,7,8,9\}$ kümesinin elemanları ile ABCD biçiminde dört basamaklı sayılar yazılacaktır. A>B>C>D olmak koşulu ile kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm:

K kümesinden seçilen herhangi dört rakam ile istenen koşullarda yalnızca 1 sayı yazılabilmektedir. Buna göre, K kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı istenen cevap olacaktır. Bu durumda istenen koşulu sağlayan

$\binom{7}{4} = 35$ farklı sayı yazılabilir.

Örnek:

3 tane özdeş bilye, kutulara istenen sayıda atılmak suretiyle 6 farklı kutuya kaç değişik şekilde atılabilir?

Çözüm:

Çözümü 3 ayrı kısımda inceleyerek çözebiliriz.

1.Durum:

6 kutudan üç kutu seçilip her birine birer tane bilye atılır;

$\binom{6}{3} = 20$

2.Durum:

6 kutudan 1 kutu seçilip bilyelerin üçü de bu kutuya atılır;

$\binom{6}{1} = 6$

3.Durum:

6 kutudan 2 kutu seçilip bilyelerin ikisi bir kutuya diğeri öbür kutuya atılır; veya tersi yapılır. $2.\binom{6}{2} = 2.15 = 30$

Bu üç durum neticesinde 20 + 6 + 30 = 56 farklı seçim olduğu görülür.

Örnek:

10 evli çift (karı-koca) içinden 3 kişi seçilecektir. Seçilecek grupta 1 evli çift olması koşulu ile bu seçim kaç farklı biçimde yapılabilir?

Çözüm:

10 evli çift arasından 1 evli çift,ve kalan kalan 18 kişi arasından 1 kişi; $\binom{10}{1}.\binom{18}{1} = 10.18 = 180$ farklı biçimde seçilebilir.

Örnek:

10 evli çift (karı-koca) içinden 3 kişi seçilecektir. İçinde evli çift olmaması koşulu ile bu seçim kaç farklı biçimde yapılabilir?

Çözüm:

Tüm üçlü grupların sayısından, içinde evli çift bulunan üçlü grupların sayısı çıkarılırsa, içinde evli çift olmayan üçlü grupların sayısı bulunur.

$\binom{20}{3} - \binom{10}{1}.\binom{18}{1} = 1140 - 180 = 960$ farklı seçim yapılabilir.

Örnek:

6 kişiden her biri sinema veya tiyatroya gidecektir. Bu yerlerden her birine en az birer kişi gitmek koşulu ile 6 kişi kaç farklı seçim yapabilir?

Çözüm:

Her kişinin sinema veya tiyatro olmak üzere 2 tercihi olduğundan 6 kişinin; $2^6 = 64$ farklı şekilde tercihi olur.

Tüm durumların sayısından istenilmeyen; 6 kişinin tamamının tiyatro veya tamamının sinemeye gittiği durumlar çıkarılırsa istenen bulunur. 6 kişinin tamamının tiyatroya gitmesi 1 durum, tamamının sinemaya gitmesi 1 durumdur.

Buna göre istene seçim;

64 – 1 – 1 = 62 şekilde gerçekleşir.

Örnek:

Zehra ve Betül'ün de aralarında bulunduğu 7 öğrenciden 3'ü A sınıfına, 4'ü B sınıfına kayıt edilecektir. Zehra ile Betül olmak koşulu ile bu 7 öğrencinin kayıt işlemi kaç farklı şekilde olur?

Çözüm:

Zehra ile Betül A sınıfına kayıt edilirse, kalan 5 öğrenciden birinin daha A sınıfına kaydı yapılır. B sınıfına kalan 4 öğrenciden 4 ünün kaydı yapılır.

Bu işlem; $\binom{5}{1}.\binom{4}{4} = 5.1 = 5$ şekilde.

Zehra ile Betül B sınıfına kayıt edilirse, kalan 5 öğrenciden ikisinin daha B sınıfına kaydı yapılır. A sınıfına kalan 3 öğrenciden 3 ünün kaydı yapılır.

Bu işlem; $\binom{5}{2}.\binom{3}{3} = 10.1 = 10$ şekilde yapılır.

İstenen koşullara uygun kayıt işlemi; 5+10 = 15 şekilde gerçekleştirilebilir.

Örnek:

A,B,C ve D dersleri 3'er kredi, E,F,G dersleri 4'er kredi, H dersi 2 kredidir. 12 kredi almak isteyen bir öğrenci kaç farklı tercih yapabilir.

Çözüm:

a) 3+3+3+3=12 olduğundan 3'er kredilik derslerin hepsi seçilebilir.

b) 4+4+4=12 olduğundan 4'er kredilik derslerin hepsi seçilebilir.

c) 3+3+4+2=12 olduğundan 2 tane 3'er kredilik, 1 tane 4'er kredilik ve 1 tane 2 kredilik ders seçilebilir.

O halde bu üç durumun toplamından;

$\binom{4}{4}+\binom{3}{3}+\binom{4}{2}.\binom{3}{1}.\binom{1}{1} = 1+1+6.3.1 = 20$ farklı seçim yapabilir.

Örnek:

$K = \{2,3,5\}$ ve $M = \{1,4,6,9\}$ kümeleri veriliyor. K kümesinden farklı 2 rakam, M kümesinden farklı 2 rakam seçilerek oluşturulan 4 basamaklı doğal sayıların kaç tanesi 5 ile tam bölünür.

Çözüm:

Oluşturulan sayılardan 5 ile tam bölünenlerin sayısı istendiği için K kümesinden seçilecek rakamlardan biri 5 olmalıdır.

Buna göre, K kümesinden 5 in dışındaki rakam, $\binom{2}{1} = 2$ farklı şekilde seçilebilir.

M kümesinden 2 rakam, $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçilebilir.

Dört basamaklı doğal sayının; birler basamağına 5 rakamı geleceğinden birler basamağına yazılacak rakam 1 yolla, binler basamağına yazılacak rakam kalan 3 rakamdan 3 yolla, yüzler basamağına yazılacak rakam kalan 2 rakamdan 2 yolla, onlar basamağına yazılacak rakam kalan 1 rakamdan 1 yolla olur.

Buna göre seçilen 4 rakamla, 5 ile tam bölünebilen 4 basamaklı, 3.2.1 = 6 farklı doğal sayı yazılabilir.

Bu durumda istenen işlem çarpma kuralına göre; 2.6.6 = 72 farklı şekilde gerçekleşir.

Örnek:

Bir mağazada satılan; 8 gömlekten 3'ü özdeş, 6 pantolondan 2'si özdeştir. Bu mağazadan 2 farklı gömlek ve 2 farklı pantolon almak isteyen bir müşterinin kaç farklı seçimi olabilir?

Çözüm:

Gömlek seçimi 2 farklı şekilde yapılabilir. Özdeş olan 3 gömlekten hiç seçilmeyip, diğer gömleklerden 2 tanesi seçilebilir veya özdeş olan gömleklerden 1 tane, diğer gömleklerden 1 tane seçilebilir. Buna göre gömlek seçimi;

$\binom{5}{2} + 1.\binom{5}{1} = 15$ farklı şekilde olur.

Pantolon seçimi 2 farklı şekilde yapılabilir. Özdeş olan 2 pantolon hiç seçilmeyip, diğer pantolonlardan 2 tanesi seçilebilir veya özdeş olan pantolonlardan 1 tane, diğer pantolonlardan 1 tane seçilebilir. Buna göre pantolon seçimi;

$\binom{4}{2} + 1.\binom{4}{1} = 10$ farklı şekilde olur.

2 farklı gömlek ve 2 farklı pantolon almak isteyen bir müşterinin seçimi çarpma kuralına göre 15.10 = 150 farklı şekilde olur.

Örnek:

6 kişiden 2 kişi gitar kursuna, 2 kişi org kursuna, 2 kişi bağlama kursuna gidecektir.
Kaç farklı seçim yapılabilir?

Çözüm:

6 kişiden 2 kişi gitar kursuna, 2 kişi org kursuna, 2 kişi bağlama kursuna gideceğine göre;

$\binom{6}{2}.\binom{4}{2}.\binom{2}{2} = \frac{6.5}{2.1}.\frac{4.3}{2.1}.1 = 90$ farklı şekilde yapılabilir.

Örnek:

6 kişi 2'şer kişilik 3 gruba kaç farklı şekilde ayrılır?

Çözüm:

6 kişi A,B,C,D,E,F olsunlar.

	1.Grup	2.Grup	3.Grup
Birinci durum :	A,B	C,D	E,F
İkinci durum :	C,D	A,B	E,F
Üçüncü durum:	E,F	A,B	C,D
.	.	.	.

Örnek olarak verilen yukarıdaki 3 durum birbirinin aynısıdır.

Buna göre 6 kişi <u>hiçbir şart olmadan</u> ikişer kişilik üç gruba;

$\frac{\binom{6}{2}.\binom{4}{2}.\binom{2}{2}}{3!} = \frac{90}{6} = 15$ farklı şekilde ayrılır.

Örnek:

n kenarlı düzgün bir çokgenin köşegen sayısını veren formülü bulunuz.

Çözüm:

Bir çember üzerinde eşit aralıklarla tane nokta bulunduğunu düşünelim.

n tane noktayı rastgele ikişer ikişer birleştirirsek düzgün çokgenin kenarlarını ve köşegenlerini bulmuş oluruz. Kenar ve köşegen sayısından n tane kenar çıkarılırsa köşegen sayısı bulunmuş olur.

Buna göre;

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} - n$$

$$= \frac{n.(n-1)-2n}{2} = \frac{n.(n-3)}{2}$$

bulunmuş olur.

Örnek:

Sekizgenin kaç köşegeni vardır?

Çözüm:

Bir önceki örnekte olduğu gibi çember üzerinde 8 nokta alıp, bu noktaları ikişer ikişer seçelim. Sekizgenin kenarlarını ve köşegenlerini bulmuş oluruz.

Kenar ve köşegen sayısından 8 tane kenar çıkarılırsa köşegen sayısı bulunmuş olur. Buna göre;

$\binom{8}{2} - 8 = \frac{8.7}{2} - 8 = 28 - 8 = 20$ bulunur.

Örnek:

Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemdeki 8 noktanın ikisinden geçecek şekilde en çok kaç farklı doğru çizilebilir?

Çözüm:

Bir doğru iki farklı nokta ile belirlenebilir.

Bunun için 8 nokta ile en çok; $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{2} = 28$ farklı doğru çizilebilir.

Örnek:

Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemdeki 8 nokta ile köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

Çözüm:

Bir üçgen üçi farklı nokta ile belirlenebilir. Bunun için 8 nokta ile; $\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{6} = 56$ farklı üçgen çizilebilir.

Örnek:

Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemdeki üzerinde olan, diğer köşesi diğer 6 noktadan birinin üzerinde bulunan kaç farklı üçgen çizilebilir?

Çözüm:

Üçgenin iki köşesi belli iki nokta ise üçüncü köşesi diğer 6 nokta arasından; $\binom{6}{1} = 6$ farklı şekilde seçilir.

Örnek:

Aynı düzlem üzerinde birbirine paralel olmayan 8 doğru vardır. Bu doğrular en çok kaç farklı noktada kesişirler?

Çözüm:

2 doğrunun kesişmesi ile 1 nokta oluşur. 8 doğrunun kesişmesi ile en çok; $\binom{8}{2} = 28$ nokta oluşur.

Örnek:

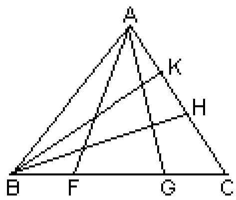
Aynı düzlem üzerinde birbirine paralel olmayan 8 doğru vardır. Bu doğruların 5'i belli bir noktadan geçtiğine göre en çok kaç farklı noktada kesişirler?

Çözüm:

5 doğru aynı noktadan geçtiğine göre; $\binom{5}{2} = 10$ nokta oluşacak yerde, bu 5 doğrudan 1 nokta oluşur. Buna göre doğruların kesiştikleri nokta sayısı en çok;

$\binom{8}{2} - \binom{5}{2} + 1 = 28 - 10 + 1 = 19$ dur.

Örnek:



Yandaki şekilde kaç tane üçgen vardır?

Çözüm:

Aynı düzlemde bulunup herhangi ikisi birbirine paralel olmayan n tane doğrudan 3'ü aynı noktadan geçmiyorsa, bu doğrular ile C(n,3) kadar üçgen oluşturulabilir.

Verilen şekilde 7 doğru vardır. A ve B noktalarından ikiden fazla doğru geçmeyecek olsaydı, C(7,3) kadar üçgen oluşacaktı.

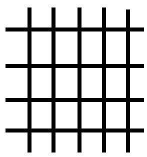
A noktasından 4 doğru geçtiği için bunlar kendi aralarında üçgen oluşturmaz.

B noktasından da 4 doğru geçtiği için bunlar kendi aralarında üçgen oluşturmaz.

Buna göre verilen şekilde;

$\binom{7}{3} - \binom{4}{3} - \binom{4}{3} = \frac{7.6.5}{6} - 4 - 4 = 27$ tane üçgen vardır.

Örnek:



Yandaki şekilde kaç tane dikdörtgen vardır?

Çözüm:

Dikdörtgen birbirine paralel olan iki yatay doğrunun birbirine paralel iki dikey doğru ile kesişmesinden oluşan bölgedir. Buna göre

Yatay; $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde,

Dikey; $\binom{5}{2} = 10$ farklı şekilde kenar seçilebileceğinde

oluşabilecek dikdörtgenlerin sayısı; 6.10 = 60 tanedir.

Çözümlü Sorular

1. Dört kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç değişik şekilde sonuçlanır?

1.Çözüm:

4 kişiden hiçbiri başarılı değildir; $C(4,0)$

4 kişiden 1 kişi başarılıdır; $C(4,1)$

4 kişiden 2 kişi başarılıdır; $C(4,2)$

4 kişiden 3 kişi başarılıdır; $C(4,3)$

4 kişiden 4 kişi başarılıdır; $C(4,4)$

Buna göre 4 öğrencinin sınavı başarı yönünden;

$$C(4,0)+C(4,1)+C(4,2)+C(4,3)+C(4,4)=2^4$$

şekildedir.

2.Çözüm:

Her öğrenci için başarılı veya başarısız olmak üzere 2 farklı durum söz konusudur. O halde 4 öğrenci için;

$2.2.2.2 = 2^4 = 32$ farklı durum geçerlidir.

2. 10 sporcudan beş kişilik bir takım oluşturulacaktır. Bu 10 sporcudan takıma girecek iki kişi belli olduğuna göre takım kaç değişik biçimde kurulabilir?

Çözüm:

10 kişiden 5 kişi seçilecektir. 2 kişi belli olduğuna göre kalan 8 kişiden diğer 3 kişi seçilmelidir. Buna göre takım;

$$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{6} = 56$$

farklı şekilde kurulabilir?

3. 10 kişilik bir toplulukta her kişi diğerleri ile birer kez tokalaşıyor. Buna göre en çok kaç tokalaşma olur?

Çözüm:
Tokalaşma 2 kişi arasında olacağı için, 10 kişi arasında;

$\binom{10}{2} = \frac{10.9}{2} = 45$ tokalaşma olur.

4. 10 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerden oluşturulabilecek ikili kombinasyonların sayısı, bu sınıftaki erkek öğrencilerin sayısına eşittir. Buna göre bu sınıfta kaç kız öğrenci vardır?

Çözüm:

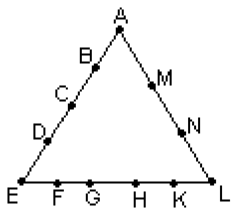
Kız sayısı; x ise Erkek sayısı; 10-x olur. Buna göre;

$$\binom{x}{2} = 10 - x \Rightarrow \frac{x.(x-1)}{2} = 10 - x$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 20 \Rightarrow x.(x+1) = 4.5 \Rightarrow x = 4$$

bulunur.

5.



Şekildeki üçgen üzerinde 12 nokta vardır. Bu noktaları köşe kabul eden kaç farklı üçgen çizilebilir?

Çözüm:

12 noktayı köşe kabul eden; $\binom{12}{3} = 220$ üçgen çizilebilir.

Fakat bu 12 noktadan 5 tanesi [AE] kenarında doğrusal, 6 tanesi [EL] kenarında doğrusal, 4 tanesi [LA] kenarında doğrusal olup doğrusal olan 3 nokta üçgen belirtmediğinden

dolayı; $\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{4}{3} = 34$ tane üçgen çizilemez.

Böylece 220 – 34 = 186 tane üçgen çizilebilir.

6. 3 bay, 2 bayan ve 3 çocuk arasından içinde en az 2 çocuk bulunan, 3 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

Seçilecek 3 kişi arasında 2 çocuk veya 3 çocuk bulunmalıdır.

Buna göre 3 çocuk arasında 2 çocuk ve diğer 5 kişi (3 bay ile 2 bayan) arasından 1 kişi seçilmelidir. Veya 3 çocuk arasından 3 çocuk seçilmelidir.

Buna göre seçme; $\binom{3}{2}.\binom{5}{1}+\binom{3}{3}=3.5+1=16$ farklı biçimde yapılabilir.

7. Aralarında Ali'nin de bulunduğu 8 kişi arasından içinde Ali'nin de olduğu 3 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

Ali ve Ali'nin dışındaki 7 kişi arasından Ali'yi ve diğer 7 kişi arasından da 2 kişiyi seçersek istenen seçim sağlanır.

$\binom{1}{1}.\binom{7}{2}=1.\frac{7.6}{2}=21$ değişik biçimde yapılabilir.

8. 10 soruluk bir sınavda, ilk 4 soruyu yanıtlamak koşulu ile 7 soru kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

4'ü mecburi, 6'sı seçmeli olan 10 soru arasından 7 soru seçilecektir. 4 mecburi sorunun 4'ü ve 6 seçmeli sorunun 3'ü seçilirse istenen seçim sağlanır.

Bu seçim; $\binom{4}{4}.\binom{6}{3}=1.\frac{6.5.4}{6}=20$ farklı biçimde yaplabilir.

9. M,N,P,Q,R gibi beş değişik seçmeli dersten M ve N aynı saatte verilmektedir. Bu beş dersten ikisini seçmek isteyen bir öğrencinin bu durumda kaç seçeneği vardır?

Çözüm:

1.Yol:

M,N,P,Q,R farklı saatte verilseydi bunlar arasından 2 ders, $\binom{5}{2}=10$ farklı şekilde seçilebilirdi. M ve N aynı saatte verildiği için bu derslerin oluşturduğu ikili seçilemez.

Bunların sayısı, $\binom{2}{2}=1$ dir. Bu durumda; 10 – 1 = 9 seçeneği vardır.

2.Yol:

a) M dersinin yanında P,Q veya R (3 tercih)

b) N dersinin yanında P,Q veya R (3 tercih)

c) P,Q,R arasından 2 si seçilebilir. $\binom{3}{2}=3$

Görüldüğü gibi, 3+3+3= 9 tercih söz konusudur.

10. Bir çember üzerindeki 8 nokta ile uçları bu noktalar üzerinde olan kaç farklı kiriş çizilebilir?

Çözüm:

Kiriş, uç noktaları çember üzerinde olan doğru parçası olduğu için, kirişin çizilmesi 2 uç noktanın belirlenmesine bağlıdır.

Buna göre 8 nokta ile $\binom{8}{2}=28$ kiriş çizilebilir.

11. Bir birine paralel olmayan 5 tane doğrunun, en çok kaç farklı kesişim noktası vardır?

Çözüm:

Paralel olmayan farklı iki doğru ile bir tane kesim noktası oluşturulabileceği için, 5 doğru ile en çok;

$\binom{5}{2}=10$ tane kesim noktası oluşturulabilir.

12. 12 farklı doğrunun 5'i A noktasından, 3'ü B noktasından geçmektedir. Bu doğrular en fazla kaç tane kesim noktası oluşturur?

Çözüm:

12 doğru ile $\binom{12}{2} = 66$ tane kesim noktası oluşturulur.

Fakat 5 doğru; $\binom{5}{2} = 10$ kesim noktası oluşturacak yerde, sadece A noktasını oluşturmuştur.

Benzer şekilde 3 doğru; $\binom{3}{2} = 3$ kesim noktası oluşturacak yerde, sadece B noktasını oluşturmuştur.

Buna göre doğruların oluşturabileceği kesim noktası sayısı

en çok; $66 - 10 + 1 - 3 + 1 = 55$ tir.

13. Bir pansiyonda bir 2 kişilik, ikisi 4 kişilik olan 3 oda vardır. Otele gelen 10 kişi bu odalara kaç farklı şekilde dağılabilir?

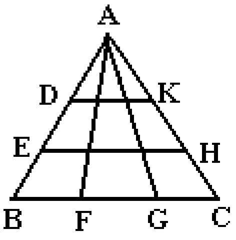
Çözüm:

10 kişiden 2 kişi, $\binom{10}{2} = 45$ farklı biçimde seçilerek iki kişilik odaya dağıtılır. Kalan 8 kişiden 4 kişi, $\binom{8}{4} = 70$ farklı biçimde seçilerek dört kişilik odalardan ilkine dağıtılır.

Kalan 4 kişiden 4 kişi, $\binom{4}{4} = 1$ farklı biçimde seçilerek dört kişilik odalardan diğerine dağıtılır.

Böylece bu seçme işi; 45.70.1 = 3150 farklı şekilde dağıtılır.

14.



Şekilde [DK]//[EH] //[BC] olduğuna göre şekilde kaç tane üçgen vardır?

Çözüm:

Şekildeki bütün üçgenlerin üst köşesi A noktasıdır.

Buna göre alt kenar oluşturacak köşeleri belirlemeliyiz.

[DK]//[EH] //[BC] olduğundan bu doğrular üzerindeki kesim noktalarıyla, alt kenarları oluşturan iki köşeyi, kaç farklı şekilde belirleyebileceğimizi, ayrı ayrı bulup toplamalıyız.

[DK] üzerinde 4 kesim noktası olduğundan bu 4 nokta arasından tabanı oluşturacak 2 nokta; $\binom{4}{2} = 6$ değişik biçimde belirlenebilir.

[EH] üzerinde ve [BC] üzerinde de 4 kesim noktası olduğundan 6 + 6 + 6 = 18 tane üçgen vardır.

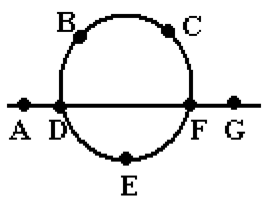
15. 11 kişilik bir kafileden 5 kişi İzmir'e, 6 kişi Ankara'ya gidecektir. Bu iki grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

Çözüm:

11 kişilik kafileden İzmir'e gidecek 5 kişi belirlendikten sonra kalan 6 kişiden Ankara'ya gidecek 6 kişi belirlenir.

$$\binom{11}{5}.\binom{6}{6} = \frac{11.10.9.8.7}{120}.1 = 462$$

16.



Köşeleri şekildeki A,B,C,D,E,F,G noktaları olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

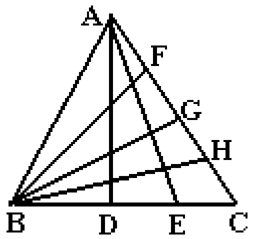
Çözüm:

Üçgen doğrusal olmayan üç nokta ile belirlenebilir. Şekilde 7 tane nokta olduğu için; $\binom{7}{3} = 35$ tane üçgen çizilebilir.

Ancak bu noktalardan 4'ü (A,D,F,G) doğrusal olduğundan oluşması beklenen $\binom{4}{3} = 4$ tane üçgen oluşmaz.

Buna göre çizilebilecek üçgen sayısı; 35 – 4 = 31 tanedir.

17.



Yandaki şekilde bir köşesi A noktası olan kaç tane üçgen vardır?

Çözüm:

Aynı düzlemde bulunup herhangi ikisi birbirine paralel olmayan n tane doğrudan 3'ü aynı noktadan geçmiyorsa, bu doğrular ile C(n,3) kadar üçgen oluşturulabilir.

Verilen şekilde 8 doğru vardır. A ve B noktalarından ikiden fazla doğru geçmeyecek olsaydı, C(8,3) kadar üçgen oluşacaktı.

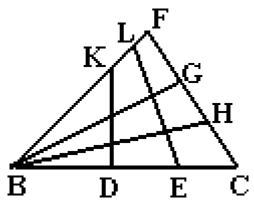
A noktasından 4 doğru geçtiği için bunlar kendi aralarında üçgen oluşturmaz.

B noktasından da 4 doğru geçtiği için bunlar kendi aralarında üçgen oluşturmaz.

Buna göre verilen şekilde;

$\binom{8}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} = 56 - 4 - 10 = 42$ üçgen vardır.

Soruda bir köşesi A olan üçgen sayısını sorduğundan, şekilden A noktası çıkarılırsa aşağıdaki şekil elde edilir.



Bu şekildeki tepe noktası B ve tabanı [KD] olan 6 üçgen, tepe noktası B ve tabanı [LE] olan 6 üçgen ve tepe noktası B ve tabanı [FC] olan 6 üçgen olmak üzere 18 üçgen çizilebilir. O halde bir köşesi A noktası A olmayan 18 tane üçgen vardır.

Geriye kalan 42 – 18 = 24 tane üçgenin bir köşesi A dır.

Konu Bitmiştir…