PERMÜTASYON

SAYMANIN TEMEL KURALI

A) Toplama Kuralı

Sonlu ve ayrık kümelerin eleman sayılarının toplamı, bu kümelerin birleşimlerinin elemanlarının sayısına eşittir.

Sonlu ve ayrık iki küme A ve B olsun.

$s(A) = m$, $s(B) = n$ ve $A \cap B = \phi$ olmak üzere,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) = m + n$ dir.

Sonuç

Ayrık iki işlemden biri m yolla diğeri n yolla yapılabiliyorsa, bu işlemlerden biri <u>veya</u> diğeri $m + n$ yolla yapılabilir.

Örnek:

5 pantolon ve 3 gömlek arasından 1 pantolon <u>veya</u> 1gömleği kaç farklı biçimde seçebileceğimizi bulalım.

Çözüm:

Pantolonlar p_1, p_2, p_3, p_4, p_5

Gömlekler g_1, g_2, g_3 olsun.

Bu durumda pantolonların kümesi,

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ dir.

Gömleklerin kümesi,

$G = \{g_1, g_2, g_3\}$ olur.

1 pantolon veya 1 gömleğin seçileceği küme,

$P \cup G = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, g_1, g_2, g_3\}$ tür.

Buna göre 1 pantolon <u>veya</u> 1gömleğin seçileceği küme 8 elemanlıdır. Yani seçme 8 yolla yapılabilir.

Kısaca, 5 pantolon ve 3 gömlek arasından 1 pantolon veya 1 gömlek 5 + 3 = 8 yolla seçilebilir.

Örnek:

5 bay ve 4 bayan arasından 1 bay <u>veya</u> 1 bayan kaç farklı yolla seçilebilir?

Çözüm:

5 bay arasından 1 bay 5 yolla,

4 bayan arasından 1 bayan 4 yolla seçilebilir.

Buna göre, 5 bay ve 4 bayan arasından 1 bay <u>veya</u> 1 bayan toplama kuralı gereği 5 + 4 = 9 yolla seçilebilir.

Örnek:

Bir torbada bulunan 15 mavi ve 13 kırmızı bilye arasından 1 mavi <u>veya</u> 1 kırmızı bilye kaç farklı yolla seçilebilir?

Çözüm:

Toplama kuralı gereği, 15 mavi ve 13 kırmızı bilye arasından 1 mavi <u>veya</u> 1 kırmızı bilye,

15 + 13 = 28 farklı yolla seçilebilir.

B) Çarpma Kuralı

2 tane elemandan oluşan (a_1, a_2) ifadesine sıralı ikili denir.

Benzer şekilde, (a_1, a_2, a_3) ifadesine sıralı üçlü,

(a_1, a_2, a_3, a_4) ifadesine sıralı dörtlü,

...

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ifadesine sıralı n li denir.

A ve B sonlu elemanlı iki küme olsun.

$s(A) = m$, $s(B) = n$ olmak üzere,

$s(A \times B) = s(A).s(B) = m.n$ dir.

$A \times B$ kümesi birinci bileşenleri A'dan ikinci bileşenleri B'den alınan sıralı ikililerden oluşur.

Sonuç

İki işlemden biri m yolla diğeri n yolla yapılabiliyorsa ve ilk işlem bu m yoldan birisiyle yapıldıktan sonra ikinci işlem n yolla yapılabiliyorsa bu iki işlem birlikte **m.n** yolla yapılabilir.

Örnek:

3 bay 2 bayan arasından 1 bay ve 1 bayan kaç farklı yolla seçilebilir?

Çözüm:

Üç bay e_1, e_2, e_3 ve iki bayan k_1, k_2 olsun.

Bu durumda bayların kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve bayanların kümesi, $K = \{k_1, k_2\}$ olur.

1 bay ve 1 bayandan oluşan bay ve bayan ikilisinin seçileceği küme,

$E \times K = \{(e_1, k_1), (e_1, k_2), (e_2, k_1), (e_2, k_2), (e_3, k_1), (e_3, k_2)\}$

$E \times K$ kümesi 3.2 = 6 tane ikiliden oluşmaktadır.

Yani 3 bay ve 2 bayan arasından 1 bay ve 1 bayan, 3.2 = 6 yolla seçilebilir.

Örnek:

2 kişi 5 farklı şehire kaç farklı şekilde gidebilir?

Çözüm:

1.Kişinin 5 farklı şehirden birine gitmesi olayı A,
2.Kişinin 5 farklı şehirden birine gitmesi olayı B diyelim.

1.Kişi 5 farklı tercih yapabilir.

2.Kişi 5 farklı tercih yapabilir.

Buna göre A ve B olayı birlikte,

5.5 = 25 farklı yolla gerçekleşir.

Örnek:

$s(A) = 4$, $s(B) = 3$ olmak üzere A kümesinden B kümesine tanımlanacak bağıntılardan kaç tanesi fonksiyondur?

Çözüm:

A kümesinin elemanları a_1, a_2, a_3, a_4

B kümesinin elemanları b_1, b_2, b_3 olsun.

A dan B ye tanımlanabilecek bağıntılardan, A nın her elemanı B nin elemanları ile en az bir kere ve en çok bir kere eşleniyorsa şartını sağlayan fonksiyon olur.

a_1 elemanı b_1, b_2, b_3 den herhangi biri ile,

a_2 elemanı b_1, b_2, b_3 den herhangi biri ile,

a_3 elemanı b_1, b_2, b_3 den herhangi biri ile,

a_4 elemanı b_1, b_2, b_3 den herhangi biri ile eşlenebilir.

Buna göre A kümesinden B kümesine tanımlanacak bağıntılardan

$3.3.3.3 = 3^4 = 81$ tanesi fonksiyon belirtir.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinin elemanlarıyla 3 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

Sayı üç basamaklı olup rakamları tekrarlanabilir

Birler basamağına gelecek rakam 3 farklı şekilde,

Onlar basamağına gelecek rakam 3 farklı şekilde,

Yüzler basamağına gelecek rakam 3 farklı şekilde belirlenebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
3	3	3

Buna göre, 3.3.3 = 27 doğal sayı yazılabilir.

Örnek:

A şehrinden B şehrine 3 farklı yol ve B şehrinden C şehrine 5 farklı yol vardır. B şehrine uğramak koşulu ile, A şehrinden C şehrine kaç değişik yolla gidilebilir?

Çözüm:

A şehrinden B şehrine gidiş 3 farklı yolla ve

B şehrinden C şehrine gidiş 5 farklı yolla belirlenebileceği için,

A şehrinden C şehrine gidiş,

3.5 = 15 farklı yolla olabilir.

Örnek:

A şehrinden B şehrine 3 farklı yol ve B şehrinden C şehrine 5 farklı yol vardır. B şehrine uğramak koşulu ile, A şehrinden C şehrine kaç değişik yoldan gidilip dönülebilir?

Çözüm:
A şehrinden C şehrine gidiş, 3.5 = 15 farklı yolla ve

C şehrinden A şehrine dönüş 5.3 = 15 yolla belirlenebileceği için,

A şehrinden C şehrine gidiş-dönüş,

3.5.5.3 = 15.15=225 farklı yolla olabilir.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin rakamlarıyla 3 basamaklı ve rakamları farklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

Yüzler basamağına gelecek rakam A kümesinin 6 elemanı arasından 6 farklı şekilde seçilir.

Rakamlar farklı olacağı için onlar basamağına gelecek rakam, kalan 5 rakam arasından 5 farklı şekilde; birler basamağına gelecek rakam, kalan 4 rakam arasından 4 farklı şekilde seçilebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
6	5	4

Bu durumda çarpma kuralı gereği istenen koşulları sağlayan,

6.5.4 = 120 tane sayı yazılabilir.

Örnek: 1984-ÖYS

6 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı biçimde sonuçlanabilir?

Çözüm:

Sınava katılan bir kişinin sınavı; başarılı veya başarısız olmak üzere, iki şekilde sonuçlanabilir.

Sınava 6 kişi birlikte katıldığına göre,

<u>1.Kişi</u>		<u>2.Kişi</u>	…	<u>6.Kişi</u>
2	.	2	. … .	2

Bu sınav başarı yönünden, $2^6 = 64$ farklı biçimde sonuçlanabilir.

Örnek:

0,1,2,3,4,5 rakamları kullanılarak, üç basamaklı;

a) Kaç değişik doğal sayı yazılabilir?

Üç basamaklı sayı oluşturmak için, sırasıyla üç iş (yüzler basamağındaki rakam, onlar basamağındaki rakam ve birler basamağındaki rakam seçilmelidir) birlikte yapılmalıdır.

<u>Yüzler bas.</u>	<u>Onlar bas.</u>	<u>Birler bas.</u>
1,2,3,4,5	0,1,2,3,4,5	0,1,2,3,4,5

Buna göre 0,1,2,3,4,5 rakamları ile üç basamaklı;

5.6.6 = 180 tane doğal sayı yazılabilir.

b) Rakamları farklı kaç değişik doğal sayı yazılabilir?

Rakamları farklı doğal sayıların yazılmasında, rakamlardan birisi 0 (sıfır) ise ilk iş olarak en soldaki (burada yüzler basamağındaki) rakamın seçimi yapılmalıdır. O halde,

Üç basamaklı sayının yüzler basamağı sıfır olamayacağı için bu basamağa gelecek olan rakam 5 farklı şekilde belirlenir.

Rakamları farklı olacağı için, yüzler basamağı belirlendikten sonra sıfır dahil kalan rakam arasından, onlar basamağı 5 farklı şekilde belirlenir.

Yüzler basamağında ve onlar basamağında kullanılan 2 rakam dışında kalan 4 rakam arasından birler basamağı 4 farklı şekilde belirlenir.

<u>Yüzler bas.</u>	<u>Onlar bas.</u>	<u>Birler bas.</u>
5 rakam	5 rakam	4 rakam

Buna göre, rakamları farklı,

5.5.4 = 100 doğal sayı yazılabilir?

c) Kaç farklı çift sayı yazılabilir?

Rakamları farklı olan sayılar yazılmıyorsa, basamaklardaki rakamların seçimi için herhangi bir öncelik sırası gözetmek gerekmez.

Buna göre üç basamaklı rakamları tekrarlı olabilen çift sayılar istenmektedir.

Bunun için birler basamağına gelecek olan rakam 0,2,4 rakamları arasından 3 farklı şekilde belirlenir.

Sıfır yüzler basamağına yazılamayacağından yüzler basamağına sıfır dışındaki 5 rakam 5 farklı yolla yazılabilir.

Birler ve yüzler basamağı yazıldıktan sonra onlar basamağına bu rakamlardan 6 tanesi 6 farklı yolla yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
5	6	3

Buna göre istenen özellikte,

5.6.3 = 90 tane doğal sayı yazılabilir.

d) Rakamları farklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?

Sayının çift olabilmesi için birler basamağına 0,2,4 rakamlarından biri gelmelidir. Burada sıfır yüzler basamağına gelemeyeceğinden sıfır için ayrı inceleme yapılır.

1.Durum:

Sıfır birler basamağında ise, sıfır birler basamağına 1 farklı şekilde yazılır. Rakamlar farklı olduğundan geriye kalan 5 rakam arasından onlar basamağına gelecek olan rakam 5 farklı şekilde ve yüzler basamağına gelecek olan rakam, kalan 4 rakam arasından 4 farklı yolla belirlenir.

Yüzler	Onlar	Birler
4	5	1

Birler basamağı sıfır olan ve istenen koşullara uygun,

4.5.1 = 20 tane doğal sayı yazılabilir.

2.Durum:

Sıfır birler basamağında değilse, geriye kalan 2 ve 4 rakamları arasından birler basamağına gelecek rakam 2 farklı yolla seçilebilir.

Sıfır yüzler basamağına gelemeyeceği için geriye kalan 4 rakam arasından yüzler basamağına gelecek rakam 4 farklı yolla seçilebilir.

Birler ve yüzler basamağı yazıldıktan sonra geriye kalan ve sıfırında dahil olduğu 4 rakam arasından birler onlar basamağına yazılacak olan rakam 4 yolla seçilebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
4	4	2

Son rakamı 2 veya 4 olan üç basamaklı rakamları farklı

4.4.2 = 32 tane doğal sayı yazılabilir.

Buna göre üç basamaklı rakamları farklı ve çift olan,

20 + 32 = 52 tane doğal sayı yazılabilir.

e) Rakamları farklı olan kaç tane tek sayı yazılabilir?

Sayının tek olabilmesi için birler basamağına 1,3,5 rakamlarından biri gelmelidir.

O halde yüzler basamağı 1,3,5 rakamları arasından 3 farklı yolla seçilebilir.

Yüzler basamağına sıfır yazılamaz. Geriye kalan (Sıfır be birler basamağında kullanılan rakam hariç) 4 rakamdan arasından yüzler basamağına yazılacak rakam 4 farklı yolla seçilebilir.

Birler ve yüzler basamağı yazıldıktan sonra geriye kalan (sıfır da dahil) 4 rakam arasından onlar basamağına gelecek olan rakam 4 farklı yolla seçilebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
4	4	3

Buna göre üç basamaklı rakamları farklı olan 4.4.3 = 48 tane tek sayı yazılabilir.

Örnek:

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinin rakamları ile üç basamaklı 300 den büyük, rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

300 den büyük, rakamları farklı sayılar istenmektedir. Bunun için 3,4,5 rakamları arasından yüzler basamağına gelecek olan rakam 3 farklı şekilde yazılır.

Rakamların biri yazıldıktan sonra geriye kalan rakamlar arasından onlar basamağına gelecek olan rakam 5 farklı şekilde ve kalan 4 rakam arasından birler basamağına gelecek olan rakam, 4 farklı şekilde yazılır.

Yüzler	Onlar	Birler
3	5	4

Buna göre rakamları farklı 300 den büyük, üç basamaklı,

3.5.4 = 60 tane farklı doğal sayı yazılabilir.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin rakamları ile üç basamaklı 300 den büyük,500 den küçük rakamları farklı kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

İstenen koşullara uygun üç basamaklı sayılarda, 4 rakamı hem birler basamağında hem de yüzler basamağında olabilir. İstenen sayıların rakamları farklı olduğu için çözümü iki durumda inceleyelim.

1.Durum

2 rakamı birler basamağına 1 farklı şekilde yazılabilir.

Sayının 300 den büyük, 500 den küçük olması istendiğinden yüzler basamağına 3 veya 4 rakamı gelmelidir. Yani, yüzler basamağı 2 farklı şekilde belirlenebilir. Geriye kalan 3 rakam arasından onlar basamağına gelecek olan rakam 3 farklı şekilde yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
2	3	1

Buna göre birler basamağı 2 olan ve istenen özellikte

2.3.1 = 6 tane sayı yazılabilir.

2.Durum

4 rakamı birler basamağına 1 farklı şekilde yazılabilir.

Sayının 300 den büyük, 500 den küçük olması istendiğinden yüzler basamağına 3 rakamı gelmelidir. Yani, yüzler basamağı 1 farklı şekilde belirlenebilir. Geriye kalan 3 rakam arasından onlar basamağına gelecek olan rakam 3 farklı şekilde yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
1	3	1

Buna göre birler basamağı 2 olan ve istenen özellikte

1.3.1 = 3 tane sayı yazılabilir.

O halde istenen koşullara uygun;

6 + 3 = 9 tane sayı yazılabilir.

Bu sayılar; 312, 412, 314, 342, 432, 324, 352, 452, 354 olmak üzere 9 tanedir.

Örnek: 1999-ÖSS

5,6,7,8,9 rakamlarını kullanarak rakamları birbirinden farklı olan üç basamaklı ve 780 den küçük kaç değişik sayı yazılabilir?

Çözüm:

5,6,7,8,9 rakamlarını kullanarak yazılacak olan rakamları farklı sayıların 780 den küçük olması için yüzler basamağındaki rakam 5,6 veya 7 olmalıdır. Ancak yüzler basamağındaki rakamı 7 olan her sayı 780 den küçük değildir. Halbuki yüzler basamağındaki rakamı 5 ve 6 olan her sayı 780 den küçüktür. O halde, bu iş 7 nin yüzler basamağında olup olmaması diye iki durumda incelenmelidir.

1.Durum

7 rakamı yüzler basamağına 1 farklı şekilde yazılabilir. Sayının 780 den küçük olması istendiğinden onlar basamağına 5 veya 6 rakamı gelmelidir. Yani, onlar basamağı 2 farklı şekilde belirlenebilir. Geriye kalan 3 rakam arasından birler basamağına gelecek olan rakam 3 farklı şekilde yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
1	2	3

Buna göre yüzler basamağı 7 olan ve 780 den küçük rakamları farklı

1.2.3 = 6 tane sayı yazılabilir.

2.Durum

7 rakamı yüzler basamağına yazılmayacaksa;

5 ve 6 rakamlarından biri yüzler basamağına 2 farklı şekilde yazılabilir. Kalan (7 de dahil) 4 rakam arasından onlar basamağına gelecek olan rakam 4 farklı şekilde belirlenebilir. Geriye kalan 3 rakam arasından birler basamağına gelecek olan rakam 3 farklı şekilde yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
2	4	3

Buna göre yüzler basamağı 5 veya 6 olan ve 780 den küçük

2.4.3 = 24 tane sayı yazılabilir.

Bu iki durumun sonucu olarak rakamları birbirinden farklı olan üç basamaklı ve 780 den küçük;

6 + 24 = 30 tane doğal sayı yazılabilir.

FAKTÖRİYEL

1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına n faktöriyel denir ve $n!$ biçiminde gösterilir.

0! = 1

1! = 1

2! = 1.2 = 2

3! = 1.2.3 = 6

4! = 1.2.3.4 = 24

…

n! = 1.2.3…..(n-1).n

Sonuç

$n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)!$ dir.

Örnek:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$$

Örnek:

$$\frac{7!}{4!} + \frac{3!}{0!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} + \frac{3.2.1}{1} = 210 + 6 = 216$$

Örnek:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!} = n.(n+1)$$

Örnek:

$\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{2n+1}{12}$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{n!}{(n+1).n!} + \frac{(n-1)!}{n.(n-1)!} = \frac{2n+1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underset{(n)}{n+1}} + \frac{1}{\underset{(n+1)}{n}} = \frac{2n+1}{12} \Rightarrow \frac{n+n+1}{n.(n+1)} = \frac{2n+1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n.(n+1)} = \frac{2n+1}{12} \Rightarrow n.(n+1) = 12 = 3.4$$

$\Rightarrow n = 3$ bulunur.

Örnek:

$0!+1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!$ toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?

Çözüm:

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$,

$6! = 720$, $7! = 7.6! = 7.720$, $8! = 8.7! = 8.7.720 = 56.720$

Görüldüğü gibi 4! den sonraki sayıların (5!, 6!, 7!, 8!) faktöriyelleri hesaplandığında sonucun birler basamağı sıfır olduğu için verilen toplamın birler basamağı, $0!+1!+2!+3!+4!$ toplamının birler basamağına eşittir.

$0!+1!+2!+3!+4! = 1+1+2+6+24 = 34$ olup,

34'ün birler basamağı 4 olduğundan verilen toplamın birler basamağındaki rakam 4'tür.

Örnek:

$(n+1)!+(n-1)! = \dfrac{43.n!}{6}$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$$(n+1).n!+\frac{n.(n-1)!}{n} = \frac{43.n!}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1).n!}{\underset{(n)}{1}} + \frac{n!}{n} = \frac{43.n!}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2+n)n!}{n} + \frac{n!}{n} = \frac{43.n!}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2+n+1)n!}{n} = \frac{43.n!}{n} \Rightarrow n^2+n+1 = 43$$

$$\Rightarrow (n+7).(n-6) = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ bulunur.}$$

PERMÜTASYON (SIRALAMA)

r ve n sayma sayısı $r \le n$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin r elemanlı <u>sıralı</u> r'lilerine bu kümenin r'li permütasyonları denir.

n elemanlı kümenin r'li permütasyonlarının sayısı;

$P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ dir.

Örnek:

$A = \{a,b,c\}$ kümesinin 3'lü permütasyonları;

$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$

olmak üzere A kümesinin 3'lü permütasyonlarının sayısı;

$P(3,3) = \dfrac{3!}{(3-3)!} = \dfrac{3!}{0!} = \dfrac{3.2.1}{1} = 6$ dır.

Örnek:

$A = \{a,b,c,d\}$ kümesinin 2'li permütasyonları;

$(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)$

olmak üzere A kümesinin 2'lü permütasyonlarının sayısı;

$P(4,2) = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4.3.2.1}{2} = 12$ dir.

UYARI:

$P(n,n) = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n!$ dir.

$P(n,1) = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$ dir.

Örnek:

$P(10,3) = P(n,1)$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$P(10,3) = P(n,1) \Rightarrow \dfrac{10!}{(10-3)!} = n$

$\dfrac{10.9.8.7!}{7!} = n \Rightarrow n = 720$ bulunur.

Örnek:

$14.P(n,1) = P(2.n,2)$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$$14.P(n,1)=P(2.n,2)\Rightarrow 14.n=\frac{(2n)!}{(2n-2)!}$$

$$\Rightarrow 14.n=\frac{2n.(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!}$$

$\Rightarrow 14.n=2n.(2n-1)\Rightarrow 2n-1=7\Rightarrow n=4$ bulunur.

Örnek:

$A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde a bulunmaz?

Çözüm:

A kümesinden a'nın çıkarılmasıyla oluşan $\{b,c,d,e\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarında a bulunmaz.

$$P(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=\frac{4.3.2.1}{1}=24$$

Örnek:

$A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde a bulunur?

Çözüm:

A kümesi 5 elemanlı olup üçlü permütasyonları nın sayısı;

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5.4.3.2.1}{2}=60$$

a elemanının bulunmadığı üçlü permütasyonları-nın sayısı bir önceki örnekte,

$P(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=\frac{4.3.2.1}{1}=24$ olduğunu bulmuştuk.

Buna göre a nın bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısı;

$P(5,3)-P(4,3)=60-24=36$ dır.

Örnek:

$A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde a bulunmaz, b bulunur?

Çözüm:

Verilen kümeden a çıkarılırsa, diğer elemanların oluşturacağı üçlü permütasyonların sayısı,

$P(4,3)=24$ tür.

a ve b nin bulunmadığı (c,d ve e'nin oluşturacağı) üçlü permütasyonların sayısı,

$P(3,3)=3!=6$ dır.

Buna göre A kümesinin, a bulunmadığı ve b'nin bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısı,

$P(4,3)-P(3,3)=24-6=18$ olur.

Örnek:

$A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde a veya b bulunur?

Çözüm:

A kümesinin bütün üçlü permütasyonlarından hem a'nın hem de b'nin bulunmadığı üçlü permütasyonları çıkarırsak A kümesinin içinde a veya b bulunduğu üçlü permütasyonlarını bulmuş oluruz.

Bunun için;

A kümesinin elemanları arasından a'yı ve b'yi ayırırsak kalan 3 eleman ile yazılabilecek üçlü permütasyonların sayısı,

$P(3,3)=3!=6$ dır.

Buna göre a veya b bulunduğu üçlü permütasyonların sayısı,

$P(5,3)-P(3,3)=60-6=54$ tür.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ olmak üzere A kümesinin;

a) Üçlü permütasyonlarının sayısı,

$P(7,3) = 7.6.5 = 210$ olduğundan A kümesinin elemanları kullanılarak, üç basamaklı ve rakamları farklı, 210 değişik sayı yazılabilir.

b) Bütün permütasyonlarının sayısı,

$P(7,7) = 7!$ dir.

c) "1" in bulunduğu dörtlü permütasyonlarının sayısı,

"1" en solda olursa, kalan 6 rakamdan üçü "1" in sağına $P(6,3) = 6.5.4 = 120$ değişik şekilde sıralanır.

Benzer şekilde "1" in ikinci, üçüncü ve dördüncü sırada olduğu durumların her birinin sayısı da 120 dir. O halde "1" in bulunduğu dörtlü permütasyonların sayısı,

$4.P(6,3) = 4.120 = 480$ dir.

d) "2" ile "5" in yan yana olduğu dörtlü permütasyonların sayısı,

"2" ile "5" i bir eleman gibi (25) şeklinde düşünürsek;

1.Durum

1.Bileşen	2.Bileşen	3.Bileşen	4.Bileşen
2	5	.	.

Geriye kalan beş elemandan ikisinin de solunda 25.. biçiminde $P(5,2) = 5.4 = 20$ değişik sıralama olabilir.

2.Durum

1.Bileşen	2.Bileşen	3.Bileşen	4.Bileşen
.	2	5	.

Geriye kalan beş elemandan ikisinin .25. biçiminde

$P(5,2) = 5.4 = 20$ değişik sıralama olabilir.

3.Durum

1.Bileşen	2.Bileşen	3.Bileşen	4.Bileşen
.	.	2	5

Geriye kalan beş elemandan ikisinin ..25 biçiminde

$P(5,2) = 5.4 = 20$ değişik sıralama olabilir.

Ayrıca "2" ile "5" yan yana 52 şeklinde olduğunda da oluşacak sıralamaların sayısı yukarıdaki durumların sayısı kadardır. Buna göre "2" ile "5" in yan yana olduğu dörtlü permütasyonların sayısı,

$2.3.P(5,3) = 6.20 = 120$ dir.

Örnek:

7 kişinin katıldığı bir yarışta ilk iki derece kaç farklı biçimde oluşabilir?

1.Çözüm:

7 kişinin 2'si sıralamaya gireceği için sıralama

$P(7,2) = 7.6 = 42$ farklı biçimde olur.

2.Çözüm:

Çarpma kuralına göre, birinci olacak kişi 7 kişi arasından 7 farklı şekilde belirlenir. Kalan 6 kişi arasından, ikinci olacak kişi 6 farklı şekilde belirlenir. Buna göre ilk iki derece

7.6 = 42 değişik şekilde oluşabilir.

Örnek:

2 öğrenciden her biri 10 farklı yerden birine oturacaktır. Kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

2 öğrenci 10 farklı yerden birine oturacağı için sıralama,

$P(10,2) = 10.9 = 90$ farklı biçimde oluşur.

Örnek:
5 tişört bir vitrinde yan yana kaç farklı şekilde sergilenebilir?

Çözüm:

5 tişörtün yan yana sergilenebileceği durum sayısı, 5 elemanlı bir kümenin permütasyonları sayısına eşittir.

Buna göre, $P(5,5) = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ olur.

Örnek:

9 kişiden 3'ü bir bankta yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm:

9 kişiden 3'ü bir bankta yan yana oturacağı için sıralama,

$P(9,3) = 9.8.7 = 504$ farklı biçimde olur.

Örnek:

Farklı 2 matematik, farklı 3 fizik, farklı 4 kimya kitabı bir rafa yan yana kaç farklı biçimde dizilebilir?

Çözüm:

Toplam 9 kitap vardır.
Bu kitaplar arasından birinci sıraya gelecek olan kitap 9 yolla, ikinci sıraya gelecek olan kitap kalan 8 kitap arasından 8 yolla, üçüncü sıraya gelecek olan kitap kalan 7 kitap arasından 7 yolla,…,dokuzuncu sıraya gelecek olan kitap kalan 1 kitap arasından 1 yolla belirlenebilir.

Buna göre bu 9 kitap yan yana

$P(9,9) = 9.8.7.....1 = 9!$ farklı şekilde dizilebilir.

Örnek:

Farklı 2 matematik, farklı 3 fizik, farklı 4 kimya kitabı bir rafa aynı dersin kitapları yan yana gelmek koşulu ile kaç farklı biçimde dizilebilir?

Çözüm:

Matematik kitapları 1, fizik kitapları 1 ve kimya kitapları 1 kitap gibi düşünülürse kitap sayısı 3 olup bunlar rafa 3! şekilde sıralanırlar.

Matematik kitapları kendi aralarında 2! yolla,
Fizik kitapları kendi aralarında 3! yolla,
Kimya kitapları kendi aralarında 4! yolla dizilebilirler.

Buna göre aynı dersin kitapları yan yana gelmek koşulu ile,

$2!.3!.4!.P(3,3) = 2!.3!.4!.3!$ farklı şekilde dizilebilirler.

Örnek:

Farklı 2 matematik, farklı 3 fizik, farklı 4 kimya kitabı bir rafa matematik kitapları yan yana <u>gelmemek</u> koşulu ile kaç farklı biçimde dizilebilir?

Çözüm:

Tüm durumların sayısından istenmeyen durumların sayısı çıkarılırsa istenen durum sayısı elde edilir.

Kitapların tamamı hiçbir koşul olmadan rafa 9! farklı şekilde dizilebilirler.

Matematik kitapları 1 kitap gibi düşünülürse 1+ 3 + 4 = 8 kitap olur. Bu 8 kitap rafa 8! farklı şekilde sıralanır.

Matematik kitapları da kendi aralarında 2! yolla dizilir.
Bu durumda 9 kitap matematik kitapları yan yana olmak koşulu ile 8!.2! yolla sıralanır. (Bu istenmeyen durumların sayısıdır.)

Buna göre istenen durumların sayısı;

9!-8!.2! = 9.8!-8!.2 = 8!.(9-2) = 7.8! kadardır.

Örnek:

12 farklı tişört ile 8 farklı kazak iki farklı rafa dizilecektir. Tişörtler bir rafa kazaklar diğer rafa olmak koşulu ile kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm:

Tişörtler bir rafa 12! farklı biçimde, kazaklar diğer rafa 8! farklı biçimde dizilirler. Kıyafetler 2 rafa dizileceği için bunların yer değiştirmesi 2! farklı şekilde olur.

Buna göre kıyafetler istenen koşula uygun olarak 12!.8!.2! farklı şekilde dizilebilirler.

Örnek:

6 kardeş yan yana sıralanacaktır. En büyük kardeş bir uçta, en küçük kardeş diğer uçta olmak üzere, kaç farklı şekilde sıralanabilir?

Çözüm:

En küçük kardeş ile en büyük kardeş iki farklı uca 2! Şekilde sıralanır.

Diğer 4 kardeş uçların haricindeki yerlere 4! Farklı şekilde sıralanır.

Buna göre, 6 kardeş yan yana istenen koşullara uygun,

2!.4! farklı şekilde sıralanırlar.

Örnek:

3 evli çift yan yana sıralanacaktır. Evli çiftler yan yana olmak üzere kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

Çözüm:

Eşler birbirinden ayrılmayacağı için her evli çift 1 kişi gibi düşünülebilir. Bu durumda 3 kişi yan yana 3! Farklı şekilde sıralanır.

Evli çiftlerin her biri kendi aralarında 2! Farklı şekilde yer değiştirebileceğinden istenen şartlara uygun olarak,

3!.2!.2!.2! farklı sıralama yapılabilir.

Örnek:

A	B	C	D	E

Yukarıdaki şekilde verildiği gibi yan yana olan 5 sınıfın duvarları sarı, mavi, yeşil renkli boyalardan biri ile boyanacaktır.

Yan yana olan sınıflar farklı boyalar ile boyanmak koşulu ile boyama işlemi kaç farklı şekilde olur?

Çözüm:

Boyamaya A sınıfından başlayalım.
A sınıfı için 3 rengi de kullanabiliriz.

A sınıfına kullanılan renk dışındaki 2 rengi B sınıfı için kullanabiliriz.

B sınıfına kullanılan rengi C sınıfı için kullanamayacağımıza göre, C sınıfı için 2 renk kullanabiliriz.

C sınıfına kullanılan rengi D sınıfı için kullanamayacağımıza göre, D sınıfı için 2 renk kullanabiliriz.

D sınıfına kullanılan rengi E sınıfı için kullanamayacağımıza göre, E sınıfı için 2 renk kullanabiliriz.

Buna göre, 5 sınıfın boyama işlemi istenen koşullara uygun olarak,

3	2	2	2	2

3.2.2.2.2 = 3.16 = 48 farklı şekilde yapılabilir.

Örnek:

3 farklı çikolata bir öğrenciye en fazla bir çikolata vermek koşulu ile 10 öğrenciye dağıtılacaktır. Belli bir çikolata belli bir öğrenciye verileceğine göre, kaç farklı seçim yapılabilir?

Çözüm:

Belli bir çikolata belli bir öğrenciye verileceğine göre, kalan 2 çikolata geriye kalan 9 öğrencilerden 2 sine verilecektir.

Buna göre bu seçim,

$P(9,2) = 9.8 = 72$ farklı şekilde olur.

Örnek:

4 avukat ile 3 doktor, doktorların herhangi ikisi yan yana olmamak koşulu ile kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

Çözüm:

Doktorların herhangi ikisinin yan yana olması istenmediğine göre, ilk olarak avukatların dizilişlerini düşünelim.

Avukatlar kendi aralarında 4! farklı şekilde dizilebilir.

Avukatlar dizildikten sonra aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi, 3 doktor için 5 uygun boş yer vardır.

	A		A		A		A	

Birinci doktor için 5 yer, birinci doktor yerleştikten sonra ikinci doktor kalan 4 yer, ikinci doktor da yerleştikten sonra üçüncü doktor kalan 3 yer olur

Bu durumda çarpma kuralına göre, doktorlar avukatlar arasında 5.4.3 farklı şekilde dizilebilir.

O halde 4 avukat ile 3 doktor, doktorların herhangi ikisi yan yana olmamak koşulu ile,

4!.5.4.3 = 1440 farklı şekilde sıralanabilirler.

Örnek:

"SANİYE" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı veya anlamsız 6 harfli, sesli harf ile başlayan kaç farklı kelime yazılabilir?

Çözüm:

Yazacağımız kelimenin ilk harfli sesli harf (A,İ,E) olacağı için ilk harf için 3 durum söz konusudur.

Kelimenin ikinci harfi için kalan 5 harften bir harf 5 farklı yolla belirlenir.

Kelimenin üçüncü harfi için kalan 4 harften bir harf 4 farklı yolla belirlenir.

Kelimenin dördüncü harfi için kalan 3 harften bir harf 3 farklı yolla belirlenir.

Kelimenin beşinci harfi için kalan 2 harften bir harf 2 farklı yolla belirlenir.

Kelimenin altıncı (son) harfi için kalan 1 harften bir harf 1 farklı yolla belirlenir.

Buna göre, 3.5.4.3.2.1 = 3.120 = 360 farklı kelime yazılabilir.

DAİRESEL (DÖNEL) PERMÜTASYON

Sonlu bir kümenin elemanlarının bir çember yada kapalı bir eğri etrafında birbirlerine göre farklı biçimde sıralanışlarının her birine bu elemanların bir dairesel permütasyonu veya dönel sıralaması denir.

Elemanlardan biri sabit tutularak n elemanın dairesel (dönel) permütasyonlarının sayısı

n – 1)! ile bulunur.

Örnek:

Bir masa etrafında oturan üç kişinin birbirlerine göre yan yana gelme durumlarını inceleyelim.

Bu kişiler A,B ve C iseler B veya C den biri A'nın sağında diğeri solunda veyahut bu durumun tam tersi olmak üzere masa etrafında 2 değişik şekilde oturabilirler. Başka farklı durum yoktur.

Yani **(3 – 1) ! = 2! =2**

Dikkat edilirse, üç kişinin dairesel sıralanışları sayılırken bir eleman sabit tutulup (yukarıdaki örnekte A) diğerleri sıralanmaktadır.

Örnek:
5 kişilik bir ailenin bütün fertleri yuvarlak masa etrafında

$(5-1)! = 4! = 24$ farklı şekilde oturabilirler.

Örnek:

7 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafında anne ve baba yan yana olmak kaydı ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

Baba ve anneyi 1 kişi gibi düşünelim. Bu durumda 6 kişi yuvarlak masada,

$(6-1)! = 5! = 120$ farklı şekilde oturabilirler.

Ayrıca baba ile anne kendi aralarında 2! değişik şekilde yer değiştirebilirler.

Bu durumda baba ve anne yan yana olmak koşulu ile bu aile yuvarlak masa etrafında,

$2!(6-1)! = 2!.5! = 2.120 = 240$ farklı biçimde oturabilirler.

Örnek:

4 mimar, 3 mühendis ve 2 usta bir yuvarlak masa etrafına, aynı meslekten olanlar yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilirler?

Çözüm:
4 mimar 1 kişi, 3 mühendis 1 kişi, 2 usta 1 kişi gibi düşünülürse kişi sayısı 3 olup bunlar yuvarlak masada

$(3-1)! = 2! = 2$ farklı şekilde otururlar.

Ayrıca 4 mimara kendi aralarında 4!,

3 mühendis kendi aralarında 3!,

2 usta kendi aralarında 2! farklı şekilde yer

değiştirebileceklerinden bu oturma işi çarpma

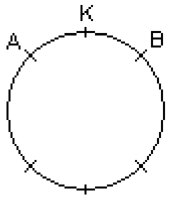
kuralına göre, $(3-1)!.4!.3!.2! = 576$ şekilde olur.

Örnek:

Anne, baba ve dört çocuğunun, sadece en kçük çocuk anne ile baba arasında olacak şekilde dairesel yemek masası etrafında kaç değişik şekilde oturabilirler?

Çözüm:

En küçük çocuk K, anne A ve baba B olmak üzere,



K bir yere oturduktan sonra, bir tarafa A, diğer tarafına B otursun.

A ile B kendi aralarında 2! şekilde yer değiştirebilirler.

K,A ve B oturduktan sonra boş kalan 3 sandalyeye ailenin diğer 3 çocuğu 3! şekilde oturabilirler.

Böylece bu aile istenilen şartlara uygun olarak yuvarlak masada,

$2!.3! = 2.6 = 12$ farklı şekilde oturabilirler.

Örnek:

Aralarında Ali ve Bülent'in de bulunduğu 7 arkadaş, yuvarlak masa etrafında Ali ile Bülent yan yana olmamak kaydıyla kaç farklı şekilde oturabilirler.

1.Çözüm:

İlk önce Ali (veya Bülent) belli bir yere, yer değiştirmemek üzere otursun. Ali'nin iki yanına (sağına veya soluna) Bülent dışında diğer arkadaşlarından herhangi biri oturacağına göre, Bülent dışında kalan 5 kişiden biri 5 değişik şekilde Ali'nin sağına (veya soluna), kalan (Bülent haricindeki) 4 kişiden biri Ali'nin soluna (diğer yanına) 4 değişik şekilde oturabilir. Bundan sonra Ali'nin sağı ve solu dolu olduğu için kalan (Bülent dahil) 4 kişi hiçbir koşul olmadan kalan yerlere 4! Şekilde otururlar. O halde istenen koşullara uygun olarak bu oturma işi, 5.4.4! = 20.24 = 480 farklı şekilde gerçekleşir.

2.Çözüm:

Bütün durumların sayısından istenmeyen (Ali ile Bülent'in yan yana oturduğu) durumların sayısı çıkarılırsa Ali ile Bülent'in yan yana olmadığı durumların sayısı bulunmuş olur.

Bütün durumların sayısı, (7-1)! = 6! = 720 dir.

Ali ile Bülent yan yana olduğu durumların sayısını bulmak için bunları 1 kişi gibi düşünürsek, 6 kişi yuvarlak masada (6-1)! Farklı şekilde oturabilirler. Ayrıca Ali ile Bülent kendi aralarında 2! Farklı şekilde yer değiştirebileceğinden Ali ile Bülent'in yan yana olduğu durumların sayısı,

2!.(6-1)! = 2.120 = 240 tır.

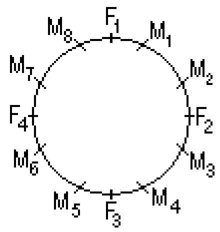
O halde Bütün durumların sayısından istenmeyen (Ali ile Bülent'in yan yana oturduğu) durumların sayısı çıkarılırsa,

720-240 = 480 bulunur.

Örnek:

4 fizik ve 8 matematik öğretmeni yuvarlak bir masa etrafına, iki fizik öğretmeni arasına iki matematik öğretmeni oturmak koşulu ile kaç değişik şekilde oturabilirler?

Çözüm:



Yandaki şekilde, uygun oturmalardan biri verilmiştir.

Buna göre, önce 4 fizik öğretmeni yuvarlak masa etrafına

(4–1)! = 3! = 6 farklı biçimde oturabilir.

8 matematik öğretmeni ise masa üzerinde gösterilen 8 ayrı yere 8! farklı şekilde oturur.

Buna göre tüm farklı oturma biçimlerinin sayısı 6.8! kadardır.

Örnek:

2 voleybolcu ile 5 basketçiden oluşan 7 kişilik bir grup yuvarlak masa etrafında voleybolcular yan yana gelmemek koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

7 kişi yuvarlak masada hiçbir koşul olmadan
(7– 1)! = 6! farklı şekilde oturabilirler.

2 voleybolcunun yan yana oturduğu (istenmeyen) farklı durumların sayısı, (6–1)!.2! = 5!.2! dir.

Tüm durumların sayısından istenmeyen durumların sayısı çıkarılırsa, voleybolcular yan yana olmadığı durumların sayısı bulunmuş olur.

Buna göre,

6!–5!.2! = 720–120.2 = 480 bulunur.

Örnek:

3 evli çift yuvarlak bir masa etrafında oturacaktır. Evli çiftler birbirinden ayrılmamak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

Her evli çift 1 kişi gibi düşünülürse 3 kişi yuvarlak bir masa etrafında (3–1)!=2! farklı şekilde oturabilir.

Ayrıca her evli çift karı-koca yer değiştirmek usulüyle kendi aralarında 2! farklı şekilde yer değiştirebileceğinden istenen durumların sayısı,

2!.(2!).(2!).(2!) = 2.2.2.2 = 16 farklı şekilde oturmaları mümkündür.

Örnek:
Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan bir aile yuvarlak masada en küçük çocuk annenin hemen sağında oturmak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:
Anne ile sağında küçük çocuğu 1 kişi gibi düşünürsek 6 kişi yuvarlak masada, (6–1)! = 5! Farklı şekilde oturabilirler.
En küçük çocuk annesinin hemen sağına oturacağına göre bunların yer değiştirmesi söz konusu değildir. Buna göre istenen durumların sayısı, 5! = 120 dir.

Örnek:
6 değişik anahtarın tamamı, bir halkaya kaç değişik biçimde takılabilir?

Çözüm:
Masa etrafında oturma olayında sıralama yukarıdan bakılarak yapılır. Halbuki halka, ters çevrilerek de bakılabilir. Bu da sıralamayı yarıya düşürür.
Buna göre, 6 değişik anahtar bir halkaya,

$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{120}{2} = 60$ farklı şekilde takılabilir?

TEKRARLI PERMÜTASYON

n tane nesnenin n_1 tanesi 1. çeşitten , n_2 tanesi 2. çeşitten, … , n_r tanesi de r. çeşitten olsun.

$n = n_1 + n_2 + ... + n_r$ olmak üzere bu n tane nesnenin n'li permütasyonlarının sayısı,

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_r!}$$ dir.

Örnek:

Aynı özellikteki 5 Mavi, 4 Kırmızı, 2 Siyah kalemin yan yana kaç farklı şekilde dizileceğini bulunuz.

Çözüm:

$n_1 = 5$, $n_2 = 4$ ve $n_3 = 2$ olsun.

$n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 4 + 2 = 11$ olduğuna göre,

5'i mavi, 4'ü kırmızı, 2'si siyah olan 11 tane kalem yan yana,

$\binom{11}{5,4,2} = \frac{11!}{5!.4!.2!}$ farklı şekilde dizilebilirler.

Örnek:

"KARAKAYA" kelimesinin harfleri yer değiştirilerek, anlamlı veya anlamsız 8 harfli kaç kelime yazılabilir?

Çözüm:

2 tane K harfi, 4 tane A harfi, 1 tane R harfi, 1 tane Y harfi ile 8 harfli anlamlı veya anlamsız,
$\binom{8}{2,4,1,1} = \frac{8!}{2!.4!.1!.1!} = 840$ kelime yazılabilir.

Örnek:

"42242" sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek beş basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

İki tane 4 rakamı, üç tane 2 rakamı kullanılarak 5 basamaklı,

$\binom{5}{2,3} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$ tane doğal sayı yazılabilir.

Bunlardan bazıları, 42224, 44222, 24242 dir.

Örnek:

İki tane 3, dört tane 4'ün tamamı kullanılarak altı basamaklı, 4 ile başlayıp 4 ile biten kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

4 ile başlayıp 4 ile biteceği için, iki tane 4 dışında kalan iki tane 3 ve iki tane 4 ten oluşan 4 rakam ile,

$\binom{4}{2,2} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$ tane sayı yazılabilir.

Bunlardan bazıları, 433444, 434344,443344 tür.

Örnek:

Bir kez 1, iki kez 2, üç kez 3 kullanılarak altı basamaklı sayılar yazılacaktır.

a) Kaç farklı sayı yazılabilir?

2 den iki tane, 3 ten üç tane olduğu için bu altı rakamla,

$\frac{6!}{3!.2!} = \frac{6.5.4}{2.1} = 60$ tane sayı yazılabilir.

b) Kaç farklı çift sayı yazılabilir?

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\square}_{1,2,3,3,3}\,\boxed{2}$$

Yazılacak sayılar çift olacağından birler basamağına 2'lerden birisi yazıldıktan sonra geriye kalan bir tane 1, bir tane 2 ve üç tane 3 olmak üzere beş tane rakam kullanılarak geriye kalan basamaklar, $\frac{5!}{3!} = 5.4 = 20$ farklı yolla belirlenir.

Birler basamağındaki rakamın yeri değişmediği için sıralamaya katılmaz.

O halde $\frac{5!}{3!} = 5.4 = 20$ tane çift sayı yazılabilir.

c) Kaç farklı tek sayı yazılabilir?

$$\underbrace{\square\;\square\;\square\;\square\;\square}_{\text{Birler basamağına yazılan rakam dışında kalan 5 rakam}}\;\underbrace{\square}_{1,3,3,3}$$

6 rakamın hepsi sıralamaya katıldığı için, bu altı rakamla

$\frac{5!.4}{2!.3!} = 40$ değişik tek sayı yazılabilir.

Örnek:

4324323 sayısının rakamları yer değiştirilerek, 2 nin hemen sağında 3 olmak koşuluyla (23 biçiminde) yedi basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

23 4 **23** 43 sayısında 23 bir rakam gibi düşünülürse sayı 5 basamaklı olur.

23 ten iki tane, 4 ten iki tane ve 3 ten bir tane vardır. Buna göre,

$\binom{5}{2,2,1} = \frac{5!}{2!.2!.1!} = 30$ farklı sayı yazılabilir.

Örnek:

"LEYLEK" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilen anlamlı veya anlamsız 6 harfli kelimelerin kaç tanesi L ile başlayıp E ile biter?

Çözüm:

Kelimelerin L ile başlayıp, E ile bitmesi istendiği için,

1.harf için 2 seçim vardır.

6.harf için 2 seçim vardır.

2.harf için kalan 4 harf arasından 4 yolla,

3.harf için kalan 3 harf arasından 3 yolla,

4.harf için kalan 2 harf arasından 2 yolla,

5.harf için kalan 1 harf arasından 1 yolla seçim yapılabilir.

Buna göre istenen koşullara uygun kelime sayısı,

$\frac{2.4.3.2.1.2}{2!.2!} = 24$ olur.

Örnek:

5346287 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılabilen 7 basamaklı doğal sayıların kaç tanesinde çift olan rakamların basamak değeri azalan sıradadır?

Çözüm:

Çift olan rakamların basamak değeri azalan sırada olduğuna göre, çift olan rakamlar özdeş olarak düşünebiliriz. Çünkü çift olan rakamların kendi aralarında sıralaması söz konusu değildir.

Bu durumda, soru dört tanesi özdeş olan 7 nesnenin farklı dizilişlerinin bulunması şeklinde düşünülebilir.
Buna göre istenen koşullara uygun sıralama sayısı,

$\frac{7!}{3!} = 7.6.5.4 = 840$ olur.

Örnek:

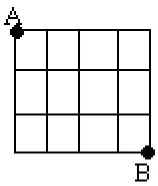
Özdeş 3 mavi bilye, özdeş 4 sarı bilye, özdeş 2 yeşil bilye yan yana dizilecektir. Sarı bilyeler daima yan yana olmak koşulu ile bilyeler kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm:

Sarı bilyeler 1 bilye gibi düşünülürse, 6 bilyenin farklı dizilişlerinin sayısı,

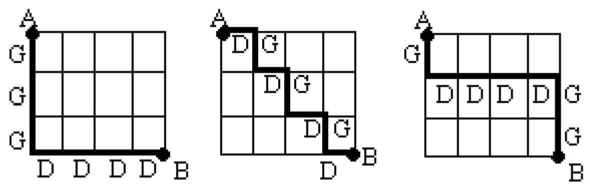
$\frac{6!}{1!.3!.2!} = 60$ olur.

Örnek:



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A dan hareket edip B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimse kaç değişik yol izleyebilir?

Çözüm:



A dan B ye en kısa yollardan üç tanesi yukarıdaki şekilde gösterilmiştir. G güney, D doğu yönlerini göstermek üzere, birinci şekilde GGGDDDD yönleri doğrultusunda, ikinci şekilde DGDGDGD yönleri doğrultusunda, üçüncü şekilde GDDDDGG yönleri doğrultusunda gidilmiştir. Yani A dan B ye en kısa yolların sayısı, 3 tane G ve 4 tane D nin farklı dizilişleridir.

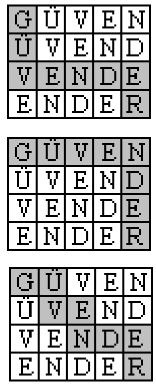
Bu dizilişlerin sayısı da, $\frac{7!}{3!.4!} = 35$ tir.

Örnek:

G	Ü	V	E	N
Ü	V	E	N	D
V	E	N	D	E
E	N	D	E	R

Sol üst köşedeki G harfinden başlayıp komşu harfleri takip ederek sağ alt köşedeki R harfine kadar olan harfleri izleyerek GÜVENDER kelimesinin kaç farklı yolla okunabileceğini bulunuz?

Çözüm:



Yandaki üç şekilde istenen yollardan üç tanesi gösterilmiştir. Bir önceki örnekten hareketle G güney, D doğu yönlerini göstermek üzere,

1.şekilde GGDDDDG,

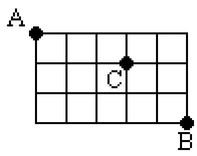
2.şekilde DDDDGGG,

3.şekilde DGDGDDG doğrultusunda gidilmiştir.

Yani G den R ye yolların sayısı 4 tane D ve 3 tane G nin farklı dizilişleridir.

Bu dizilişlerin sayısı da, $\frac{7!}{3!.4!} = 35$ tir.

Örnek: 2001-ÖSS



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A dan hareket edip C ye uğrayarak B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimse kaç değişik yol izleyebilir?

Çözüm:

A dan hareket eden bir kişi, ilk iş olarak C noktasına gidebilmek için üç sokak sağa (s), bir sokak aşağı (a) gitmelidir. Böylece A dan C ye,

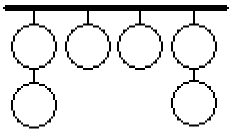
$sssa \rightarrow \frac{4!}{3!.1!} = 4$ farklı şekilde gidebilir.

İkinci iş olarak C den B ye gidebilmek için bu kişi iki sokak sağa (s), iki sokak aşağı (a) gitmelidir. Böylece C den B ye,

$ssaa \rightarrow \frac{4!}{2!.2!} = 6$ farklı şekilde gidebilir.

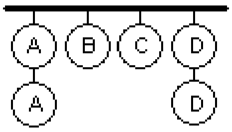
O halde A dan hareket edip C ye uğrayarak B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimse 4.6 = 24 değişik yol izleyebilir.

Örnek:



Yandaki şekilde asılı olan özdeş 6 balon vardır. Bir atıcı 6 atış yaparak bu balonları patlatacaktır. Atıcı aynı ipte asılı olan balonlardan alttakini patlatmadan üsttekini patlatamaz. Patlayan balon ipten koparılmaktadır. Bu atıcı, her atışta bir balon patlatmak koşulu ile balon seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

Çözüm:



Aynı ipte asılı olan balonları aynı harf ile adlandıralım. Bu durumda balonların seçimi,

ABCADD

BDACDA

DAADCB

…

sıralamalarından biri olacaktır. Aynı ipte asılı balonların patlamasında yer değişimi söz konusu olmadığından,

$\frac{6!}{2!.2!} = 180$ farklı seçenek vardır.

Örnek:

Dört basamaklı abcd doğal sayısının rakamları çarpımı 24 tür. Buna göre abcd nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm:

abcd doğal sayısının rakamları çarpımı 24 olduğuna göre, bu sayının rakamları için,

a) 1.2.3.4 = 24

b) 1.1.3.8 = 24

c) 1.1.4.6 = 24

d) 2.2.2.3 = 24

durumları vardır.

Bu rakamların kendi aralarındaki dizilişlerinin sayısı toplamı abcd sayısının alabileceği değerlerin sayısını verir.

Bu durumda;

a) rakamları 1,2,3,4 olan dört basamaklı abcd sayılarının sayısı, 4! = 24 tanedir.

b) rakamları 1,1,3,8 olan dört basamaklı abcd sayılarının sayısı, $\frac{4!}{2!} = 12$ tanedir.

c) rakamları 1,1,4,6 olan dört basamaklı abcd sayılarının sayısı, $\frac{4!}{2!} = 12$ tanedir.

d) rakamları 2,2,2,3 olan dört basamaklı abcd sayılarının sayısı, $\frac{4!}{3!} = 4$ tanedir.

Buna göre abcd nin alabileceği kaç farklı değerlerin sayısı;

24 + 12 + 12 + 4 = 52 tanedir.

Örnek:

6 kardeşten 2'si erkek, 4'ü kızdır. Bu kardeşler yan yana sıralanacaklardır. Kızların sağdan sola doğru küçükten büyüğe, erkeklerin soldan sağa doğru küçükten büyüğe sıralandığı durum sayısı kaçtır?

Çözüm:

Kızlar sağdan sola doğru küçükten büyüğe, erkekler soldan sağa doğru küçükten büyüğe sıralanacağına göre; erkekleri kendi aralarında, kızları kendi aralarında özdeş nesneler olarak düşünebiliriz.

Buna göre istenen koşullara uygun sıralama sayısı;

$\frac{6!}{2!.4!} = 15$ olur.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1) 4 öğrenci yan yana duran 7 koltuğa kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

Birinci öğrenci 7 koltuktan birine 7 farklı şekilde,

İkinci öğrenci kalan 6 koltuktan birine 6 farklı şekilde,

Üçüncü öğrenci kalan 5 koltuktan birine 5 farklı şekilde,

Dördüncü öğrenci kalan 4 koltuktan birine 4 farklı şekilde oturur.

Çarpma yoluyla sayma kuralına göre, 4 öğrenci yan yana duran 7 koltuğa,

7.6.5.4 = 840 farklı şekilde oturabilirler.

2) İlk üçü alfabemizin 29 harfinden, son dördü onluk sayma sisteminin rakamlarından oluşan kaç farklı plaka yazılabilir?

Çözüm:

H harfi ve R rakamı göstermek üzere, istenen plaka HHHRRRR biçimindedir.

Alfabede 29 harf olduğuna göre üç harf
29.29.29 farklı biçimde yazılabilir.

Onluk sayma sisteminde 10 rakam olduğuna göre dört rakam,

10.10.10.10 farklı biçimde yazılabilir.

Çarpma kuralı gereği,

$29.29.29.10.10.10.10 = (290)^3.10$ farklı plaka yazılabilir.

3) $A = \{0,1,2,3,4\}$ kümesinin elemanları ile 1000 den büyük ve rakamları farklı olan kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

A kümesinde 5 eleman olduğu için, bunlarla yazılabilecek olan rakamları farklı ve 1000 den büyük olan sayılar ya **abcd** biçiminde dört basamaklı ya da **abcde** biçiminde beş basamaklı sayılardır.

abcd tipinde rakamları farklı dört basamaklı bir sayı;
a sıfır olamayacağı için kalan 4 rakam arasından 4 yolla,
b (a belirlendikten sonra) kalan 4 rakam (sıfır dahil) arasından 4 yolla,

c (a ve b belirlendikten sonra) kalan 3 rakam arasından 3 yolla,

d (a,b ve c belirlendikten sonra) kalan 2 rakam arasından 2 yolla belirlenmek üzere,

4.4.3.2 = 96 farklı şekilde yazılır.

abcde tipinde rakamları farklı beş basamaklı bir sayı;
a sıfır olamayacağı için 4 yolla,

b (a belirlendikten sonra) kalan 4 rakam arasından 4 yolla,

c (a ve b belirlendikten sonra) kalan 3 rakam arasından 3 yolla,

d (a,b ve c belirlendikten sonra) kalan 2 rakam arasından 2 yolla,

e (a,b,c ve d belirlendikten sonra) kalan 1 rakamdan 1 yolla belirlenmek üzere,

4.4.3.2.1= 96 farklı şekilde yazılabilir.

Buna göre, istenen özellikte,

96+96 = 192 tane sayı yazılabilir.

4) $A = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı dört basamaklı ve 5 ile bölünebilen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

5 ile bölünebilen sayıların birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır.

Birler basamağı 5 olan dört basamaklı sayı abc5 olsun.

a; 0 ve 5 dışında kalan 6 rakamdan 6 yolla,

b; a da kullanılan rakam ve 5 dışına kalan 6 rakamdan 6 yolla,

c; a ve b de kullanılan rakam ve 5 dışında kalan 5 rakamdan 5 yolla seçilebilir.

Buna göre **abc5** sayısı, 6.6.5 = 180 yolla seçilir.

Birler basamağı 0 olan dört basamaklı sayı abc0 olsun.

a; 0 dışında kalan 7 rakamdan 7 yolla,

b; a da kullanılan rakam ve 0 dışında kalan 6 rakamdan 6 yolla,

c; a ve b de kullanılan rakam ve 0 dışında kalan 5 rakamdan 5 yolla seçilebilir.

Buna göre **abc0** sayısı, 7.6.5 = 210 yolla seçilir.

O halde, istenen koşullara uygun,

180 + 210 = 390 farklı sayı yazılabilir.

5) $A = \{2,3,5,7,9\}$ kümesinin elemanları ile rakamları tekrarsız yazılabilen üç basamaklı sayılar küçükten büyüğe sıralandığında 725 sayısı baştan kaçıncı sırada yer alır?

Çözüm:

$A = \{2,3,5,7,9\}$ kümesinin elemanları ile rakamları tekrarsız üç basamaklı,

Yüzler	Onlar	Birler
5	4	3

olacak biçimde 5.4.3 = 60 farklı sayı yazılabilir.

5 tane rakam olduğu için, 60 tane sayının,

$\frac{60}{5} = 12$ tanesinin yüzler basamağı 2, 12 tanesinin yüzler basamağı 3, 12 tanesinin yüzler basamağı 5, 12 tanesinin yüzler basamağı 7, 12 tanesinin yüzler basamağı 9 olur.

Bu sayılar küçükten büyüğe sıralandığında bu sayıların yüzler basamağında ilk olarak 2, daha sonra 3, daha sonra 5, daha sonra 7 ve daha sonra 9 gelecektir.

Buna göre,

1.sıradan 12.sıraya kadar olan sayıların yüzler basamağında 2 bulunur.

13.sıradan 24.sıraya kadar olan sayıların yüzler basamağında 3 bulunur.

25.sıradan 36.sıraya kadar olan sayıların yüzler basamağında 5 bulunur.

Yüzler basamağında 5 olan sayılar yazıldıktan sonra yazılacak olan ilk sayının yüzler basamağı 7 olacaktır. Bu durumda

37.sırada 723,

38.sırada 725 yer alır.

6) $\frac{P(n+1,3)}{P(n,3)} = \frac{2.P(n,n)}{n!}$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{P(n+1,3)}{P(n,3)} = \frac{2.P(n,n)}{n!} \Rightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-3)!}}{\frac{n!}{(n-3)!}} = \frac{2.n!}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!}.\frac{(n-3)!}{n!} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1).n!}{(n-2).(n-3)!}.\frac{(n-3)!}{n!} = 2 \Rightarrow \frac{n+1}{n-2} = 2$$

$\Rightarrow 2n - 4 = n + 1 \Rightarrow n = 5$ bulunur.

7) 4 mektup, 6 posta kutusunda postalanacaktır. Bir kutuya en çok 1 mektup atılmak koşuluyla bu mektuplar kaç değişik yolla postalanabilir?

Çözüm:

Birinci mektup 6 posta kutusundan 6 yolla,

İkinci mektup kalan 5 posta kutusundan 5 yolla,

Üçüncü mektup kalan 4 posta kutusundan 4 yolla,

Dördüncü mektup kalan 3 posta kutusundan 3 yolla atılır.

Buna göre bir kutuya en çok 1 mektup atılmak koşuluyla bu mektuplar,

6.5.4.3 = 360 değişik yolla postalanabilir.

8) Farklı 3 matematik, farklı 4 fizik, farklı 2 biyoloji kitabı yan yana dizilecektir. Fizik kitaplarının en çok üçü yan yana olmak üzere, 9 kitap kaç farklı biçimde dizilebilir?

Çözüm:

4 fizik kitabı olduğu için tüm dizilişlerin sayısından 4 fizik kitabının yan yana (istenmeyen durumlar) olduğu diziliş sayısını çıkarırsak, en çok 3 fizik kitabının yan yana olduğu diziliş sayısını buluruz.

Buna göre,

9 kitabın koşulsuz dizilişleri sayısı, 9! dir.

4 fizik kitabının yan yana olduğu dizilişlerin sayısı, (fizik kitapları 1 kitap gibi düşünülerek)

6!.4! dir.

O halde , fizik kitaplarının en çok üçü yan yana olmak üzere 9 kitap,

9!–6!.4! = 480.6! farklı şekilde sıralanır.

9) Farklı 4 matematik ve farklı 5 fizik kitabı bir rafa dizilecektir. Matematik kitaplarının 2'si sağ başa, 2'si sol başa gelecek şekilde kaç farklı diziliş yapılabilir?

Çözüm:

Matematik kitapları m_1, m_2, m_3, m_4 ve fizik kitapları f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 olsun.

$$\begin{array}{ccccccccc} m_1, & m_2, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & m_3, & m_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Kitapları dizmeye sol baştan başlayalım.

Kenara konulacak matematik kitabı, 4 matematik kitabı arasından 4 yolla,

Yanında bir matematik kitabı, kalan 3 matematik kitabı arasından 3 yolla,

Yanına bir fizik kitabı, 5 fizik kitabı arasından 5 yolla,…

Buna göre istenen özellikte,

4.3.5.4.3.2.1.2.1 = 4!.5! farklı diziliş yapılabilir?

10) Erol ve Ömer'in de aralarında bulunduğu 7 kişi yan yana sıralanacaktır. Erol ile Ömer arasında en az bir kişi olmak üzere, kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

Çözüm:

Tüm sıralanışların sayısından Erol ile Ömer'in yan yana olduğu (istenmeyen) durumların sayısı çıkarılırsa istenen sıralama bulunmuş olur.

7 kişinin tüm sıralanışları sayısı 7! dir.

Erol ile Ömer'in yan yana olduğu sıralanışların sayısı; 6!.2! dir.

Buna göre, Erol ile Ömer arasında en az bir kişi olmak üzere yapılabilecek sıralamaların sayısı,

7!–6!.2! = 6!.5 = 3600 dür.

11) "MİSMİS" kelimesinin harfleri ile anlamlı ya da anlamsız 6 harfli kaç kelime yazılabilir?

Çözüm:

6 harfli MİSMİS kelimesinde M harfi 2 kez, İ harfi 2 kez, S harfi 2 kez tekrarlandığı için 6'lı permütasyonların sayısı,

$\frac{6!}{2!.2!.2!} = 90$ dır.

12) 44303013 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 8 basamaklı kaç tane tek doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

44303013 sayısı 4,4,0,0,3,3,3,1 rakamlarından oluşmaktadır.

Yazılacak sayının tek olması, son rakamının tek olmasına bağlıdır.
Bu sayı **abcdefgh** şeklinde ise,

h; 1,3,3,3 arasından 4 yolla belirlenir.

a; Sıfır rakamları dışında ve h için kullanılan rakam dışında kalan 5 rakamdan 5 yolla belirlenir.

b; h ve a belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 6 rakam arasından 6 yolla belirlenir.

c; h,a ve b belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 5 rakam arasından 5 yolla belirlenir.

d; h,a,b ve c belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 4 rakam arasından 4 yolla belirlenir.

e; h,a,b,c ve d belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 3 rakam arasından 3 yolla belirlenir.

f; h,a,b,c,d ve e belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 2 rakam arasından 2 yolla belirlenir.

g; h,a,b,c,d,e ve f belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 1 rakam arasından 1 yolla belirlenir.

Bu durumda **abcdefgh** sayısı 4.5.6.5.4.3.2.1 yolla belirlenir. İki tane 4, üç tane 2, iki tane 0 olduğundan dolayı tekrarlı permütasyondan,

$\frac{4.5.6.5.4.3.2.1}{2!.3!.2!} = 600$ tane tek sayı yazılabilir.

13) "TANTANA" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilen 7 harfli kelimelerin kaç tanesinde aynı olan harfler yan yana bulunur?

Çözüm:

TANTANA kelimesinde 2 tane T, 3 tane A ve 2 tane N harfi bulunmaktadır.

Aynı harflerin yan yana olması istendiği için aynı olan harfleri 1 harf gibi düşünebiliriz. 3 farklı harf yan yana 3! farklı şekilde sıralanır. Aynı olan harfler özdeş olduklarından bunların kendi aralarında yer değiştirmeleri söz konusu değildir.

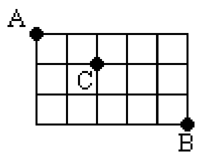
O halde TANTANA kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek yazılabilen 3! = 6 kelimede aynı harfler yan yana gelir.

14) "DEMOKRASİYE" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı veya anlamsız 11 harfli D ile başlayıp R ile biten kaç farklı kelime yazılabilir?

Çözüm:

DEMOKRASİYE kelimesinden D ve R yi çıkaralım. Kalan 9 harfle yazdığımız kelimelerin başına D, sonuna R yazılırsa istenen koşulda kelimeler yazılmış olur. Buna göre E,E,M,O,K,A,S,İ,Y harfleriyle, $\frac{9!}{2!}$ tane kelime yazılabilir.

15)



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A dan hareket edip C ye uğrayarak B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimse kaç değişik yol izleyebilir?

Çözüm:

A dan hareket eden bir kişi, ilk iş olarak C noktasına gidebilmek için iki sokak sağa (s), bir sokak aşağı (a) gitmelidir. Böylece A dan C ye,

$ssa \rightarrow \frac{3!}{2!.1!} = 3$ farklı şekilde gidebilir.

İkinci iş olarak C den B ye gidebilmek için bu kişi üç sokak sağa (s), iki sokak aşağı (a) gitmelidir. Böylece C den B ye,

$sssaa \rightarrow \frac{5!}{3!.2!} = 10$ farklı şekilde gidebilir.

O halde A dan hareket edip C ye uğrayarak B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimse 3.10 = 30 değişik yol izleyebilir.

16) "KARAHANDA" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilmesiyle oluşan 9 harfli kelimelerin kaçında H harfinden hemen sonra A harfi gelir? (HA biçiminde)

Çözüm:

H harfinden sonra A harfinin gelmesini sağlamak için bu iki harfi HA biçiminde bir harf gibi düşünülebilir.

Buna göre, HA,K,A,A,A,R,N,D harfleri arasında; bir tane HA, bir tane K, üç tane A, bir tane R, bir tane N, bir tane D harfi vardır. Bu harflerin permütasyonlarının sayısı,

$$\frac{8!}{1!.1!.3!.1!.1!.1!} = 6720$$

17) Altı basamaklı 123456 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılabilen 6 basamaklı doğal sayıların kaç tanesinde 3 rakamının; sağında 1, solunda 6 yer alır?

Çözüm:

3 rakamının; sağında 1, solunda 6 olduğuna göre bu rakamları özdeş olarak düşünebiliriz. Çünkü bu rakamların kendi aralarında yer değiştirmeleri söz konusu değildir.

Bu durumda soru 3 tanesi özdeş olan 6 nesnenin farklı dizilişlerinin bulunması şeklinde düşünülebilir.
Buna göre istenen koşullara uygun,

$\frac{6!}{3!} = 120$ farklı doğal sayı vardır.

18) 7 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafında büyük babanın yeri sabit olmak üzere kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm:

Büyük babanın yeri sabit olduğuna göre kalan 6 kişi büyük babanın sağından ya da solundan itibaren kalan koltuklara 6! değişik şekilde otururlar.

19) 3 matematikçi, 2 fizikçi, 1 biyolog yuvarlak masa etrafında fizikçiler yan yana olmak koşulu ile kaç farklı biçimde oturabilirler?

Çözüm:

Yan yana olmaları istendiğine göre, 2 fizikçiyi 1 kişi gibi düşünelim. Buna göre 5 kişi yuvarlak masada (5–1)! = 4! = 24 farklı şekilde dizilebilir.

Ayrıca 2 fizikçi kendi aralarında 2! Şekilde yer değiştirebileceğinden istenen şartlara uygun oturmaların sayısı, 2!.4! = 2.24 = 48 dir.

20) 4 tane profesörün 2'şer tane asistanı vardır. Bunlar dairesel bir masanın etrafında oturacaklardır. Her profesör kendi asistanlarının arasında olacağına göre, oturma biçimi kaç değişik şekilde gerçekleşir?

Çözüm:

Her profesörün kendi asistanları arasında oturmasını sağlamak için, bir profesör ve iki asistanı bir kişi gibi düşünelim. Böylece 4 profesör ve 8 asistan 4 kişi gibi düşünülmüş olur. bu 4 kişi yuvarlak masada, (4–1)! = 3! = 6 farklı şekilde dizilebilir.

Ayrıca her profesör kendi asistanlarının arasında ise asistanlar 2! Şekilde yer değiştirebilirler. Böylece istenen özellikteki oturmaların sayısı,

(4–1)!.2!.2!.2!.2! = 3!.2.2.2.2 = 6.16 = 96 farklı şekilde gerçekleşebilir.

21) $\dfrac{(7!)^2-(5!)^2}{6.7!+6!}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{(7!)^2-(5!)^2}{6.7!+6!}=\frac{(7!+5!).(7!-5!)}{5!.(6.7.6+6)}$$

$$=\frac{5!.(7.6+1).5!.(7.6-1)}{5!.6.(7.6+1)}=\frac{43.120.41}{6.43}=820$$

22) $P(n+1,3)+3.P(n,1)=P(2n,2)$ eşitliğini sağlayan n değeri kaçtır?

Çözüm:

$P(n+1,3)+3.P(n,1)=P(2n,2)$ ise,

$$(n+1).n.(n-1)+3.n=2n.(2n-1)$$

$$[(n+1).(n-1)+3].n=2n.(2n-1)$$

$$[(n+1).(n-1)+3]=4n-2$$

$$n^2-1+3=4.n-4$$

$n^2+4n+4=0 \Rightarrow n=2$ bulunur.

23) 111222333 sayısının rakamları kullanılarak üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

Dikkat edilecek olursa 3 tane birbirinin aynısı olan 3 er tane rakam vardır.

Sadece iki rakamı aynı olan üç basamaklı sayılar,

$122,212,221 \rightarrow 3$ tane

$133,313,331 \rightarrow 3$ tane

$211,121,112 \rightarrow 3$ tane

$233,323,332 \rightarrow 3$ tane

$311,131,113 \rightarrow 3$ tane

$322,232,223 \rightarrow 3$ tane

olmak üzere 18 tanedir.

Ayrıca 1,2 ve 3 rakamları kullanılarak 123,132,… gibi 6 tane üç basamaklı sayı yazılabilir.

Ayrıca 111 ve 222 ve 333 gibi üç basamaklı 3 farklı sayı vardır.

O halde, olabilecek bütün üç basamaklı sayılar; 18+6+3 = 27 tanedir.

24) Soldan birinci hanesi 8 tane sesli harften biri, ikinci hanesi 15 tane sessiz harften biri ve diğer üç hanesi 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 rakamlarından biri olan beş haneli kaç şifre oluşturulabilir?

Çözüm:

1.haneye 8 tane sesli harften biri 8 değişik yolla,

2.haneye 15 tane sessiz harften biri 15 değişik yolla,

3.haneye 10 tane rakamdan biri 10 değişik yolla,

4.haneye 10 tane rakamdan biri 10 değişik yolla,

5.haneye 10 tane rakamdan biri 10 değişik yolla yazılabileceğinden,

8.15.10.10.10 = 120 000 tane şifre oluşturulabilir.

25) $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ kümesinin elemanları ile yazılabilecek dört harfli, harfleri farklı, anlamlı veya anlamsız kelimelerin kaç tanesinde en çok üç tane sessiz harf vardır?

Çözüm:

A nın elemanları ile yazılabilen dört harfli, harfleri farklı olan bütün kelimelerin sayısından A nın elemanları ile yazılabilen dört harfli, harfleri farklı olup içinde dört tane sessiz harf bulunan (istenmeyen) kelimelerin sayısı çıkarılırsa istenen durumların sayısı bulunmuş olur. Buna göre,

A nın elemanları ile yazılabilen dört harfli, harfleri farklı, anlamlı veya anlamsız bütün kelimelerin sayısı;

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360 \text{ tane.}$$

A nın elemanları ile yazılabilen dört harfli, harfleri farklı, anlamlı veya anlamsız içinde dört tane sessiz harf bulunan (istenmeyen) kelimelerin sayısı;

$$P(4,4) = \frac{4!}{(4-4)!} = 24 \text{ tanedir.}$$

O halde istenen durumların sayısı,

360 – 24 = 336 dır

26) Rakamları farklı, 4000 den büyük dört basamaklı doğal sayıların kaç tanesi tek sayıdır?

Çözüm:

Birler basamağına 1,3,5,7,,9 rakamları yazılabilir. Fakat yazılacak sayılar 4000 den büyük olacakları için 5,7,9 rakamları binler basamağına da yazılabileceğinden soruyu iki durumda inceleyelim.

1.Durum;

<u>Binler</u> basamağına 4,5,6,7,8,9 rakamlarından biri 6 farklı yolla,

<u>Birler</u> basamağı tek rakamlar arasından seçilmelidir. 1,3 rakamları arasından 2 farklı yolla,

Birler ve binler basamağı seçildikten sonra kalan 8 rakam içerisinden yüzler basamağına yazılacak olan rakam 8 farklı yolla,

Birler, binler ve yüzler basamağı seçildikten sonra kalan 7 rakam içerisinden onlar basamağına yazılacak olan rakam 7 farklı yolla seçilebilir. O halde birler basamağı 1,3 olan, 6.8.7.2 = 672 tane sayı yazılabilir.

2.Durum;

<u>Birler</u> basamağına 5,7,9 rakamlarından biri 3 farklı yolla,

<u>Binler</u> basamağı 4,5,6,7,8,9 rakamları arasından 5 farklı yolla seçilebilir. Çünkü 5,7,9 rakamlarından biri <u>birler</u> basamağında kullanılacaktır. O halde <u>binler</u> basamağı 5 farklı yolla seçilebilir.

Birler ve binler basamağı seçildikten sonra kalan 8 rakam içerisinden yüzler basamağına yazılacak olan rakam 8 farklı yolla,

Birler ve binler basamağı seçildikten sonra kalan 8 rakam içerisinden yüzler basamağına yazılacak olan rakam 8 farklı yolla,

Birler, binler ve yüzler basamağı seçildikten sonra kalan 7 rakam içerisinden onlar basamağına yazılacak olan rakam 7 farklı yolla seçilebilir. O halde birler basamağı 5,7,9 olan,

5.8.7.3 = 840 tane sayı yazılabilir.

Bu iki durumda istenilen koşullara uygun olarak

672 + 840 = 1512 tane sayı yazılabilir.

27) Dokuz koşucunun katıldığı bir koşuda, koşu başladıktan sonra belli üç kişi koşuyu bırakmak zorunda kalıyor. Buna göre, bu koşuda ilk üç derece kaç farklı şekilde gerçekleşir?

Çözüm:

Kalan 6 kişiden üçü, $P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$ değişik şekilde ilk üç dereceyi oluştururlar.

28) $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin elemanlarının üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde "3" vardır?

Çözüm:

Kümenin üçlü permütasyonları, seçilecek elemanlar ile üç bileşeni olan (a,b,c) şeklinde sıralı üçlüler oluşturmak demektir. Bu sıralı üçlülerin her birisinin bir bileşeni "3" olacağına geriye kalan iki bileşeni kümenin "3" dışında kalan elemanlarından seçmek gerekir.

Bu seçme işi,

$P(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$ farklı şekilde seçilir.

Ayrıca bir bileşeni "3" olan bu sıralı üçlülerin her biri "3" ün başta, ortada ve sonda bulunması durumuna göre 3 değişik sıralı üçlü oluştururlar.

O halde içerisinde "3" olan üçlü permütasyonların sayısı 3.30 = 90 tanedir.

29) 3 kız ve 3 erkek arkadaş, herhangi iki erkek bir arada olmamak koşulu ile 6 kişilik bir sıraya kaç farklı şekilde yan yana oturabilirler?

Çözüm:

Herhangi bir erkek E, herhangi bir kız K ile gösterilirse problemde istenen sıralama,

EKEKEK veya KEKEKE

Şeklindedir. Üç erkek kendi aralarında 3! sayıda, üç kız kendi aralarında 3! sayıda değişik şekilde sıralanabileceğinden istenen sıralamaların sayısı toplamı,

3!.3!+3!.3! =72 dir.

30) "ERZURUM" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilecek 7 harfli anlamlı veya anlamsız kelimelerin kaç tanesinde her "R" harfinden sonra bir "U" harfi vardır.

Çözüm:

R harfinden sonra U harfinin gelmesini sağlamak için bu iki harfi RU biçiminde bir harf gibi düşünülebilir.

Buna göre, RU,RU,E,Z,M harfleri arasında; bir tane E, bir tane Z, bir tane M ve iki tane (RU) harfi vardır. Bu harflerin permütasyonlarının sayısı, $\frac{5!}{1!.1!.1!.2!} = 60$ tır.

31) 122333007 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 9 basamaklı kaç tane çift doğal sayı yazılabilir?

Çözüm:

122333007 sayısı 1,2,2,3,3,3,0,0,7 rakamlarından oluşmaktadır.

Yazılacak sayının çift olması, son rakamının çift olmasına bağlıdır.

1.Durum;

Birler Basamağı Sıfır İse

Bu sayı **abcdefghk** şeklinde ise,

k; 0,0 arasından 2 yolla belirlenir.

a; Sıfır rakamları dışındaki 7 rakamdan 7 yolla belirlenir.

b; k ve a belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 7 rakam arasından 7 yolla belirlenir.

c; k,a ve b belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 6 rakam arasından 6 yolla belirlenir.

d; k,a,b ve c belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 5 rakam arasından 5 yolla belirlenir.

e; k,a,b,c ve d belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 4 rakam arasından 4 yolla belirlenir.

f; k,a,b,c,d ve e belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 3 rakam arasından 3 yolla belirlenir.

g; k,a,b,c,d,e ve f belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 2 rakam arasından 2 yolla belirlenir.

h; k,a,b,c,d,e,f ve g belirlendikten sonra sıfırlar dahil olmak üzere kalan 1 rakam arasından 1 yolla belirlenir.

Bu durumda birler basamağı 0 (sıfır) olan **abcdefghk** sayısı 7.7.6.5.4.3.2.1.2 yolla belirlenir. Bir tane 1, İki tane 2, üç tane 3, iki tane 0 ve bir tane 7 olduğundan dolayı tekrarlı permütasyondan,

$\frac{7.7.6.5.4.3.2.1.2}{1!.2!.3!.2!.!} = 7.7.5.4.3 = 2940$ tane birler basamağı sıfır olan sayı yazılabilir.

2.Durum;

Birler Basamağı İki İse

Bu sayı **abcdefghk** şeklinde ise,

k; 2,2 arasından 2 yolla belirlenir.

a; Sıfır rakamları ve bir tane iki dışındaki 6 rakamdan 6 yolla belirlenir.

b; k ve a belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 7 rakam arasından 7 yolla belirlenir.

c; k,a ve b belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 6 rakam arasından 6 yolla belirlenir.

d; k,a,b ve c belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 5 rakam arasından 5 yolla belirlenir.

e; k,a,b,c ve d belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 4 rakam arasından 4 yolla belirlenir.

f; k,a,b,c,d ve e belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 3 rakam arasından 3 yolla belirlenir.

g; k,a,b,c,d,e ve f belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 2 rakam arasından 2 yolla belirlenir.

h; k,a,b,c,d,e,f ve g belirlendikten sonra sıfırlar ve bir tane iki dahil olmak üzere kalan 1 rakam arasından 1 yolla belirlenir.

Bu durumda birler basamağı 2 (iki) olan **abcdefghk** sayısı 6.7.6.5.4.3.2.1.2 yolla belirlenir. Bir tane 1, İki tane 2, üç tane 3, iki tane 0 ve bir tane 7 olduğundan dolayı tekrarlı permütasyondan,

$\frac{6.7.6.5.4.3.2.1.2}{1!.2!.3!.2!.!} = 6.7.5.4.3 = 2520$ tane birler basamağı iki olan sayı yazılabilir.

O halde bu iki durum toplamından 122333007 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 9 basamaklı

2940 + 2520 = 5460 tane çift doğal sayı yazılabilir.

32) 4 matematik, 3 fizik, 2 kimya öğretmeni yuvarlak bir masa etrafında, aynı branşın tüm öğretmenleri yan yana olmak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

Aynı branştan olanlar yan yana olması istendiğine göre bunları birer kişi gibi düşünürsek, 1 matematik, 1 fizik, 1 kimya grubu toplam 3 kişi yuvarlak masada (3 – 1)! = 2! = 2 farklı şekilde oturabilirler.

Ayrıca 4 matematikçi kendi aralarında 4! şekilde,
3 fizikçi kendi aralarında 3! şekilde,
2 kimyacı kendi aralarında 2! Şekilde yer değiştirebileceği için istenen şekildeki oturmaların sayısı,

(3 – 1)!.4!.3!.2! = 2.24.6.2 = 576 dır.

33) 4 doktor ve 4 asistan yuvarlak bir masa etrafında, herhangi iki asistan yan yana olmamak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

4 asistan aralarında birer boşluk olacak şekilde yuvarlak masa etrafında (4 – 1)! = 3! değişik şekilde, asistanların arasındaki dört boş yere 4 doktor 4! değişik şekilde oturabileceğinden istenenlere uygun olarak 3!.4! = 144 farklı oturuş mümkündür.

34) 100 den 200 e kadar olan doğal sayılar yazılırken toplam kaç kez 7 rakamı kullanılmıştır?

Çözüm:

169 ile 180 arasındaki doğal sayılarda kullanılan 7 rakamı 170,171,172,…,177,178,179 için 11 tanedir. Ayrıca bunun dışında kalan 100 den 200 e kadar olan sayılarda da 9 tane 7 rakamı kullanılmıştır. O halde olabilecek bütün durumların sayısı, 11 + 9 = 20 tanedir.

36) Sinema salonunda bulunan n tane koltuğa, n tane öğrenci 120 şekilde oturabiliyorlar. Buna göre, grupta bulunan Ahmet, Recep ve Rıfat'ın yan yana geldiği kaç farklı oturma şekli vardır?

Çözüm:

n tane koltuğa n kişi,
n.(n–1).(n–2)…..3.2.1= n! Şeklinde oturabilir.

O halde n! = 120 ise n = 5 tir.

Ahmet, Recep ve Rıfat'ın yan yana oturacakları için 1 kişi gibi düşünürsek, kişi sayısı 3 olup,

3 kişi koltuklara 3! farklı şekilde oturabilirler. Ayrıca Ahmet, Recep ve Rıfat kendi aralarında 3! Farklı şekilde yer değiştirebileceklerinden istenen koşullara uygun olan oturmaların sayısı,

3!.3! = 6.6 = 36 dır.

35) $K = \{0,1,2,7,8,9\}$ ve $M = \{2,5\}$ kümelerinin rakamları kullanılarak birler basamağı M kümesinden onlar ve yüzler basamağı K kümesinden seçilmek üzere, rakamları farklı üç basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm:

Rakamları farklı olacağından ve kümelerde "2" elemanı ortak olduğundan birler basamağına 2 ve 5 gelme durumlarını ayrı ayrı incelersek;

Birler basamağındaki rakam 2 ise;

Rakamları farklı olacağından ve yüzler basamağı 0 olamayacağı için yüzler basamağına gelecek rakam K kümesinin 2 ve 0 dışındaki 4 elemanından 4 yolla,

Onlar basamağına gelecek rakam yüzler basamağı yazıldıktan sonra K kümesinin 2 dışındaki sıfır dahil kalan 4 elemanından 4 yolla seçilebilir.

Böylece birler basamağındaki rakam 2 olan üç basamaklı sayıların sayısı, 4.4.1 = 16 tanedir.

Birler basamağındaki rakam 5 ise;

Yüzler basamağı sıfır olamayacağı için yüzler basamağına gelecek rakam K kümesinin 0 dışındaki 5 elemanından 5 yolla,

Onlar basamağına gelecek rakam yüzler basamağı yazıldıktan sonra K kümesinin sıfır dahil kalan 5 elemanından 5 yolla seçilebilir.

Böylece birler basamağındaki rakam 5 olan üç basamaklı sayıların sayısı, 5.5.1 = 25 tanedir.

O halde istenen durumlara uygun üç basamaklı sayıların sayısı; 16 + 25 = 41 tanedir.

37) x kişinin katıldığı bir yarışta ilk üç derece 990 farklı şekilde olabiliyorsa x kaçtır?

Çözüm:

x kişinin katıldığı bir yarışta ilk üç derece,
x.(x–1).(x–2) farklı şekilde olur.

Buna göre,

$x.(x-1).(x-2) = 990 = 11.10.9 \Rightarrow x = 11$ olur.

38) 5 çocuklu bir ailede baba daima sağ tarafında eşini ve eşi de daima çocuklarından A ve B yi sağ tarafında bulundurmak şartı ile yuvarlak masada kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm:

Baba'nın sağ tarafında daima Anne ve Anne'nin de daima sağında A ve B olacağı için Baba, Anne, A ve B bu dört kişi bir kişi gibi düşünülürse, diğer 3 çocukla birlikte 4 kişi yuvarlak masada,

(4–1)! = 3! = 6 farklı şekilde otururlar.

Baba'nın sağ tarafında daima Anne olacağı için bunların kendi aralarında yer değiştirmeleri söz konusu değildir.

Yalnız Anne'nin sağında yer alacak olan A ve B çocukları kendi aralarında 2! farklı şekilde yer değiştirirler.

O halde istenen şartlara uygun,

(4–1)!.2! = 3!.2! = 6.2 = 12 farklı oturuş mümkündür.

39) İçlerinde Fizik, Kimya, Biyoloji, Matematik ve Türkçe kitaplarından birer tane bulunan 5 ayrı çantadan; Ahmet ve Can isimli öğrenciler farklı çantalardan, birbirinden farklı birer kitap seçeceklerdir. Bu seçim kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

Çözüm:

5 farklı çantayı Ahmet'in ve Can'ın farklı şekilde almaları

5.4 = 20 farklı şekildedir.

Çantaların içindeki 5 farklı kitaptan Ahmet ve Can'ın farklı kitapları okumaları 5.4 = 20 farklı şekilde olur.

Bu iki durumla birlikte farklı şekilde olması ise,

20.20 = 400 dür.

KONU BİTMİŞTİR
