LOGARİTMA

I. Üstel Fonksiyonlar ve Logaritmik Fonksiyonlar

$x = 3^4$ eşitliğini sağlayan x değerini bulmak için yapılan işleme üs alma işlemi denir. (x = 3.3.3.3 = 81)

$3^y = 3^4$ eşitliğini sağlayan y değerini bulmak için yapılan işleme üslü denklemi çözme denir. (y = 4)

Buraya kadar anlatılan bilgiler $4^a = 5$ eşitliğini sağlayan a değerini bulmak için yeterli değildir. Bu eşitliği sağlayan a değerini bulmak için yapılan işleme logaritma alma denir.

A. Üstel Fonksiyonlar

Üstel fonksiyonları daha iyi anlayabilmek için iyi bilmemiz gerekir.

$a \in R^+ - \{1\}$ ve $x \in R$ olmak üzere $f : R \to R^+$,

$f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona ***üstel fonksiyon*** denir.

$a > 0$ olduğundan $f(x) = a^x > 0$ olur.

Örnek:

$a > 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

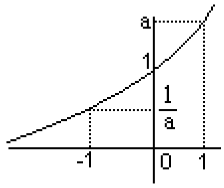
Çözüm:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = a^x$	0	↗	$\frac{1}{a}$	↗	1	↗	a	↗	$+\infty$

Yukarıdaki tabloda x değerleri artarken y değerlerinin de arttığı görülmektedir.

Tablodaki (x, y) sıralı ikililerini koordinat sisteminde işaretleyelim.

İşaretlediğimiz bu noktaları uygun şekilde birleştirdiğimizde $a > 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz. Aşağıdaki şekilde $f(x) = a^x$ in grafiği verilmiştir.



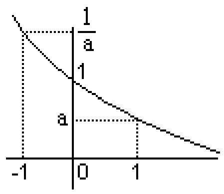
Örnek:

$0 < a < 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$0 < a < 1$ ise $\frac{1}{a} > a$ dır.

$0 < a < 1$ olmak üzere, $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



B. Logaritma Fonksiyonu

$a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere $f : R \to R^+$, $f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna ***logaritma fonksiyonu*** denir.

$f : R^+ \to R$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir.

Buna göre, $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ olur.

$y = \log_a x$ ifadesinde $y \in R$ sayısına $x \in R^+$ sayısının a tabanına göre logaritması denir ve "y eşittir a tabanına göre logaritma x" şeklinde okunur.

Örnek:

$4^x = 5$ olduğuna göre göre, x in değerini bulalım.

Çözüm:

$4^x = 5$ ise $x = \log_4 5$ tir.

Örnek:

$2^3 = 8$ olduğuna göre göre $\log_2 8 = 3$ tür.

Örnek:

$a + 2 = \log_7 5$ olduğuna göre $7^{a+2} = 5$ tir.

Örnek:

$12.a = \log_{13} 5$ olduğuna göre $13^{12a} = 5$ tir.

Örnek:

$3^{x+2} = 8$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$3^{x+2} = 8 \Rightarrow 3^x.3^2 = 8 \Rightarrow 3^x.9 = 8$

$$\Rightarrow 3^x = \frac{8}{9} \Rightarrow x = \log_3 \frac{8}{9}$$

Örnek:

$x = \log_5 125$ olduğuna göre $5^x = 125$ olup $x = 3$ tür.

C. Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Örnek:

$x = \log_6 6$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$x = \log_6 6$ ise $6^x = 6$ olup $x = 1$ dir.

Buna göre $\log_6 6 = 1$ dir.

Sonuç

Birden farklı her a pozitif reel sayısının a tabanına göre logaritması 1 dir.

Buna göre, her $a \in R^+ - \{1\}$ için $\log_a a = 1$ dir.

Örnek:

$x = \log_6 1$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$x = \log_6 1$ ise $6^x = 1$ olup $x = 0$ dır.

Buna göre $\log_6 1 = 0$ dır.

Sonuç

Her tabana göre 1 reel sayısının logaritması 0 dır.

Buna göre, her $a \in R^+ - \{1\}$ için $\log_a 1 = 0$ dır.

Örnek:

$x = \log_{25} 25 + \log_8 1$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$x = \log_{25} 25 + \log_8 1 = 1 + 0 = 1$ bulunur.

Kural

Her $a \in R^+ - \{1\}$, her $b \in R^+$ ve $m,n \in R$ için,

- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}.\log_a b$ dir.
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}.\log_a b$ dir.
- $\log_a b^m = m..\log_a b$ dir.

Yukarıdaki son iki eşitlik, birinci eşitlikten kolayca elde edilebilir.

Örnek:

$x = \log_5 25$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$x = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2.\log_5 5 = 2.1 = 2 \Rightarrow x = 2$ dir.

Örnek:

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.\log_2 2 = 4.1 = 4 \Rightarrow \log_2 16 = 4$ tür.

Örnek:

$x = \log_{\sqrt{3}} 27$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$x = \log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}}.\log_3 3 = 6.1 = 6$ dır.

II.Yol

Logaritmanın temel özelliğini kullanalım.

$$x = \log_{\sqrt{3}} 27 \text{ ise } \left(\sqrt{3}\right)^x = 27 \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^3$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$

Örnek:

$y = 5^x$ ise, $x = \log_5 y$ dir. Bu durumda $f(x) = 5^x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \log_5 x$ olur.

Uyarı

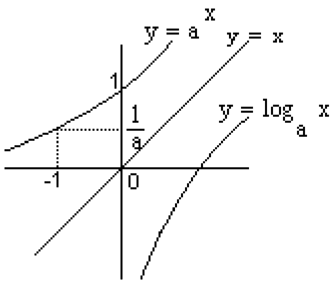
$f(x)$ in grafiği ile $f^{-1}(x)$ in grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

Örnek:

$a > 0$ olmak üzere $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$f(x) = a^x$ ise $f^{-1}(x) = \log_a x$ olur.

$a > 0$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini aşağıda verilmiştir.



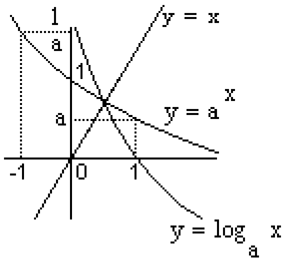
Örnek:

$0 < a < 1$ olmak üzere $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = a^x$ ise $f^{-1}(x) = \log_a x$ olur.

$0 < a < 1$ olmak üzere, $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Kural

Her $a \in R^+ - \{1\}$ ve her $x, y \in R^+$ olmak üzere, pozitif reel sayıların çarpımının logaritması, bu sayıların logaritmaları toplamına eşittir.

Buna göre,

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y \text{ olur.}$$

Örnek:

$\log_2 a = 3$ ve $\log_2 b^3 = 6$ olduğuna göre $\log_2 (a.b)$ kaçtır?

Çözüm:

$\log_2 b^3 = 6 \Rightarrow 3.\log_2 b = 6 \Rightarrow \log_2 b = 2$ dir.

$\log_2 a = 3$ ve $\log_2 b = 2$ olduğuna göre

$\log_2 (a.b) = \log_2 a + \log_2 b = 3 + 2 = 5$ tir.

II.Yol

$\log_2 a = 3 \Rightarrow a = 2^3 = 8$ dir.

$\log_2 b^3 = 6 \Rightarrow b^3 = 2^6 \Rightarrow b^3 = 4^3 \Rightarrow b = 4$ tür.

$\log_2 (a.b) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5.\log_2 2 = 5$ tir.

Örnek:

$\log_a x - \log_a y$ ifadesinin özdeşini bulalım.

Çözüm:

$\log_a x - \log_a y = \log_a x + (-1).\log_a y$

$$= \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a (x.y^{-1})$$

$$= \log_a \frac{x}{y}$$

Sonuç

Pozitif reel sayıların bölümünün logaritması, bu sayıların logaritmaları farkına eşittir.

Buna göre,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \text{ olur.}$$

Örnek:

$\log_3 \frac{2}{5} = \log_3 2 - \log_3 5$

Örnek:

$\log_2 5 = x$ olduğuna göre $\log_4 2{,}5$ ifadesinin x türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$\log_4 2{,}5 = \log_{2^2} \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.\log_2 \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.(\log_2 5 - \log_2 2)$

$$= \frac{1}{2}.(x-1) = \frac{x-1}{2}$$

Kural

Her $a, c \in R^+ - \{1\}$ ve her $b \in R^+$ olmak üzere,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ dır.}$$

Bu kurala taban değiştirme kuralı denir.

Örnek:

$$\log_2 17 = \frac{\log_3 17}{\log_3 2} = \frac{\log_{11} 17}{\log_{11} 2} = \frac{\log_{\sqrt{3}} 17}{\log_{\sqrt{3}} 2} = \frac{\log_c 17}{\log_c 2}$$

$\log_2 17$ sayısının üç eşitini yukarıda yazdık. c yerine 1 den farklı herhangi bir pozitif sayı yazarak eşitliği arttırabiliriz.

Örnek:

$\log_2 5 = x$ olduğuna göre $\log_5 10$ ifadesinin x türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\log_5 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (5.2)}{x}$$

$$= \frac{\log_2 5 + \log_2 2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

II.Yol

$\log_2 5 = x$ ise $5 = 2^x$ tir.

Buna göre,

$$\log_5 10 = \log_5 (5.2) = \log_{2^x} (2.2^x)$$

$$= \log_{2^x} 2^{x+1} = \frac{x+1}{x}$$

Örnek:

$\log_{13} 8 = x$ olduğuna göre $\log_8 13$ ifadesinin x türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\log_8 13 = \frac{\log_{13} 13}{\log_{13} 8} = \frac{1}{x} \text{ bulunur.}$$

Sonuç

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ dır.}$$

Örnek:

$\log_2 3 = y$ olduğuna göre $\log_{27} 2$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log_{27} 2 = \frac{1}{\log_2 27} = \frac{1}{\log_2 3^3} = \frac{1}{3.\log_2 3} = \frac{1}{3y} \text{ olur.}$$

Örnek:

$\log_2 3.\log_3 8$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\log_2 3.\log_3 8 = \log_2 3.\log_3 2^3 = 3.\log_2 3.\log_3 2$$

$$= 3.\log_2 3.\frac{1}{\log_2 3} = 3.1 = 3$$

Sonuç

- $\log_a b.\log_b a = 1$ dir.
- $\log_a b.\log_b c = \log_a c$ dir.
- $\log_a b.\log_b c.\log_c d = \log_a d$ dir.

Örnek:

$\log_2 7.\log_7 5.\log_5 16$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\log_2 7.\log_7 5.\log_5 16 = \log_2 16 = \log_2 2^4$

$= 4.\log_2 2 = 4$

Örnek:

$2^{\log_2 7}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$2^{\log_2 7} = x$ olsun.

Eşitliğin her iki tarafının 7 tabanında logaritması alınırsa,

$\log_7 2^{\log_2 7} = \log_7 x \Rightarrow \log_2 7.\log_7 2 = \log_7 x$

$\Rightarrow 1 = \log_7 x \Rightarrow x = 7^1 = 7$

O halde $2^{\log_2 7} = 7$ bulunur.

Sonuç

$a, c \in R^+ - \{1\}$ ve $b \in R^+$ olmak üzere,

- $a^{\log_a b} = b$ dir.
- $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$ dır.

Örnek:

$3^{\log_3 8} = 8$ dir.

Örnek:

$3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$3^{\log_5 7} = 7^{\log_5 3}$ olduğundan,

$3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3} = 7^{\log_5 3} - 7^{\log_5 3} = 0$ olur.

D. Onluk Logaritma Fonksiyonu

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda taban $a = 10$ alınırsa $f(x)$ fonksiyonuna onluk logaritma fonksiyonu denir. Kısaca $\log x$ şeklinde gösterilir.

$f : R^+ \to R$, $f(x) = \log_{10} x = \log x$ şeklindedir.

İşlemlerimizde genellikle $\log_{10} x$ yerine $\log x$ ifadesini kullanacağız.

Örnek:

$\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2.\log_{10} 10 = 2.1 = 2$ dir.

Örnek:

$\log 2 + \log 5 = \log(2.5) = \log_{10} 10 = 1$ dir.

Örnek:

$10^{\log 51} = 10^{\log_{10} 51} = 51$ dir.

Örnek:

$10^{\frac{1}{\log_2 10}} = 10^{\log_{10} 2} = 2$ dir.

Örnek:

$\sqrt{\dfrac{0{,}1}{10^{11}}}$ sayısının onluk logaritmasını bulalım.

Çözüm:

$$\sqrt{\frac{0{,}1}{10^{11}}}=\sqrt{10^{-1}.10^{-11}}=\sqrt{10^{-12}}=10^{-\frac{12}{2}}=10^{-6}$$

olduğuna göre,

$$\log\sqrt{\frac{0{,}1}{10^{11}}}=\log10^{-6}=-6 \text{ dır.}$$

Örnek:

$\log4=x$ olduğuna göre $\log5$ ifadesinin x türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\log4=x\Rightarrow\log2^2=x\Rightarrow2.\log2=x\Rightarrow\log2=\frac{x}{2} \text{ dir.}$$

$$\log5=\log\frac{10}{2}=\log10-\log2=1-\frac{x}{2}=\frac{2-x}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$\log2=0{,}301$ olduğuna göre $\log50$ nin eşitini bulalım.

Çözüm:

$\log2=0{,}301$ olduğuna göre,

$$\log50=\log\frac{100}{2}=\log100-\log2=\log10^2-\log2$$

$$=2.\log10-\log2=2.1-0{,}699=1{,}699 \text{ dur.}$$

Sonuç

1 den büyük sayıların 10 tabanına göre logaritması pozitiftir.

Örnek:

$\log2=0{,}301$ olduğuna göre $\log0{,}002$ nin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log0{,}002=\log(2.10^{-3})=\log2-3.\log10$$

$$=0{,}301-3=-2{,}699$$

Sonuç

1 den küçük pozitif sayıların 10 tabanına göre logaritması negatiftir.

Örnek:

$\log x=3{,}096$ olduğuna göre, x sayısının tam kısmı kaç basamaklıdır?

Çözüm:

x in onluk logaritması (10 tabanına göre logaritması) pozitif olduğu için x, 1 den büyüktür.

$\log1000=\log10^3=3$ ve $\log10000=\log10^4=4$ olduğuna göre,

$\log1000<\log x<\log10000$ olup,

$1000<x<10000$ tir.

Bu durumda x sayısı 1000 ile 10000 arasındadır. Bu aralıktaki sayıların tam kısmı 4 basamaklıdır.

Sonuç

$x>1$ olmak üzere x in onluk logaritmasının tam kısmı, x in basamak sayısının 1 eksiğine eşittir.

Örnek:

4 sayısı 1 basamaklı olduğundan, 4 ün onluk logaritmasının tam $1-1=0$ dır.

Buna göre,

$\log4=0,\ldots$ olur.

Örnek:

23 sayısı 2 basamaklı olduğundan, 23 ün onluk logaritmasının tam $2-1=1$ dir.

Buna göre,

$\log 23 = 1,\ldots$ olur.

Örnek:

4523,12 sayısının tam kısmı 4 basamaklı olduğundan, 4523,12 sayısının onluk logaritmasının tam $4-1=3$ tür.

Buna göre,

$\log 4523{,}12 = 3,\ldots$ olur.

Örnek:

x in onluk logaritmasının tam kısmı 35 ise, x in tam kısmı 36 basamaklıdır.

Buna göre, $\log x = 35,\ldots$ ise x in tam kısmı 36 basamaklıdır.

Örnek:

$\log 3 = 0{,}477$ olmak üzere 3^{47} sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm:

$x = 3^{47}$ denilirse,

$\log x = \log 3^{47} = 47.\log 3 = 47.0{,}477 = 22{,}419$ olup,

$x = 3^{47}$ sayısının onluk logaritmasının tam kısmı 22 olduğundan, bu sayı 23 basamaklıdır.

Uyarı

2.10^{8} sayısının 9 basamaklı olduğunu biliyoruz.

$\log 2 = 0{,}301$ eşitliği kullanılarak 2.10^{8} sayısının 9 basamaklı olduğu görülebilir.

Örnek:

$\log 148 = 2{,}17026171539 = 2 + 0{,}17026171539$ olur.

Bu işlemde, 148 in onluk logaritmasının 2 olduğunu 148 in üç basamaklı olmasından bulabiliriz. Ancak 148 in onluk logaritmasının ondalık kısmının yaklaşık değerinin 0,17026171539 olmasını hesap makinesinden veya logaritma cetvelinden bulabiliriz. Ancak ÖSS de bunlar yasak olduğundan sayıların onluk logaritmalarının ondalık kısmı direk sorulmaz.

Örnek:

$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$ dir.

0,1 de 1 tane sıfır vardır.

0,1 in onluk logaritması -1 e eşittir.

Örnek:

$\log 0{,}0001 < \log 0{,}000502 < \log 0{,}001$

$\log 10^{-4} < \log 0{,}000502 < \log 10^{-3}$

$-4 < \log 0{,}000502 < -3$ ise,

$\log 0{,}000502 = -3,\ldots$ olur.

Örnek:

$\log 0{,}00001 < \log 0{,}0000502 < \log 0{,}0001$

$\log 10^{-5} < \log 0{,}0000502 < \log 10^{-4}$

$-5 < \log 0{,}000502 < -4$ ise,

$\log 0{,}000502 = -4,\ldots$ olur.

Örnek:

$\log 0{,}000001 < \log 0{,}0000010202 < \log 0{,}00001$

$\log 10^{-6} < \log 0{,}0000010202 < \log 10^{-5}$

$-6 < \log 0{,}0000010202 < -5$ ise,

$\log 0{,}0000010202 = -5,\ldots$ olur.

Sonuç

$0 < x < 1$ olmak üzere x in ondalık kesir biçiminde yazılışında, sıfırdan farklı ilk rakamın solundaki sıfır sayısı K ise, $\log x$ in eşitinin tam kısmı - (K-1) dir.

Örnek:

$\log 0{,}000000009022 = -7, \ldots$ dir.

Örnek:

$\log 0{,}003122 = -2, \ldots$ dir.

Örnek:

$\log 0{,}04509 = -1, \ldots$ dir.

E. Doğal Logaritma Fonksiyonu

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda taban

$e = 2{,}718281828182459045235360287\ldots$ alınırsa

(e sayısı irrasyonel bir sayıdır. Yaklaşık değerini $e = 2{,}718$ kabul ederiz.) $f(x)$ fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir ve kısaca $\ln x$ biçiminde gösterilir. Bu durumda,

$f : R^+ \to R$, $f(x) = \log_e x = \ln x$ olur. İşlemlerimizde genellikle $\log_e x$ yerine $\ln x$ ifadesini kullanacağız.

Örnek:

$\log_e e = \ln e = 1$ dir.

Örnek:

$\log_e (e^2) = 2\ln e = 2$ dir.

Örnek:

$\ln(x.y) = \ln x + \ln y$

Örnek:

$\ln 100! = x$ olduğuna göre, $\ln 99!$ in x türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$$\ln 99! = \ln \frac{100!}{100} = \ln 100! - \ln 100 = x - 2.\ln 10$$

Örnek:

$e^{\ln 9}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$e^{\ln 9} = e^{\log_e 9} = 9$ bulunur.

Örnek:

$5^{\frac{1}{\ln 5}}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$5^{\frac{1}{\ln 5}} = 5^{\frac{1}{\log_e 5}} = 5^{\log_5 e} = e \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\ln 289 = x$ ve $\ln 2 = y$ olduğuna göre, $\log_2 17$ ifadesinin x ve y türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\ln 289 = x \Rightarrow \ln 17^2 = x \Rightarrow 2.\ln 17 = x \Rightarrow \ln 17 = \frac{x}{2}$$

Taban değiştirme kuralına kullanarak $\log_2 17$ nin e tabanındaki eşitini yazarsak,

$$\log_2 17 = \frac{\ln 17}{\ln 2} = \frac{\frac{x}{2}}{y} = \frac{x}{2y} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\ln 2 = x$ ve $\ln 3 = y$ olduğuna göre, $\log_6 12$ nin x ve y türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log_6 12 = \frac{\ln 12}{\ln 6} = \frac{\ln(2^2.3)}{\ln(2.3)} = \frac{2.\ln 2 + \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} = \frac{2x+y}{x+y}$$

II.Yol

$\ln 2 = x \Rightarrow 2 = e^x$ tir. $\ln 3 = y \Rightarrow 3 = e^y$ dir.

Buna göre,

$$\log_6 12 = \log_{2.3} 2^2.3 = \log_{(e^x.e^y)}(e^{2x}.e^y)$$

$$\log_6 12 = \log_{e^{x+y}} e^{2x+y} = \frac{2x+y}{x+y}.\log_e e = \frac{2x+y}{x+y}$$

Örnek:

$x = \ln 5$ olduğuna göre x sayısının tam kısmı kaçtır?

Çözüm:

$\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$ ve $e < 5 < e^2$ olduğuna göre,

$\ln e < \ln 5 < \ln e^2 \Rightarrow 1 < \ln 5 < 2$ dir.

Bu durumda $x = \ln 5 = 1,\ldots$ olur.

Örnek:

$y = \ln x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$\log_e e^{-2} = -2.\ln e = -2$ dir.

Buna göre $y = \ln x$ in grafiği $(e^{-2},-2)$ noktasından geçmektedir.

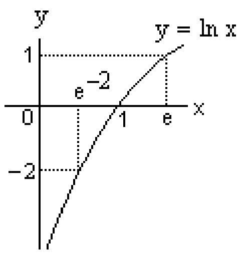
$\ln 1 = 0$ dır.

Buna göre $y = \ln x$ in grafiği $(1,0)$ noktasından geçmektedir.

Bu örnekleri çoğaltabiliriz.

Buna göre aşağıdaki tabloyu düzenleyelim:

x	$-\infty$		e^{-2}		1		e		$+\infty$
$y = \ln x$	0	↗	−2	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



Oluşturduğumuz tablodan hareketle $y = \ln x$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

Örnek:

$y = \ln(2 - x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$y = \ln(2 - x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bulalım:

$2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$ dir.

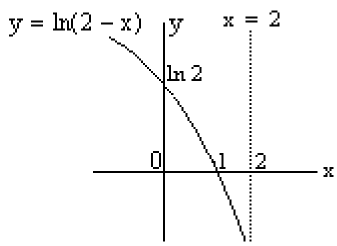
Buna göre $y = \ln(2 - x)$ fonksiyonu $(-\infty,2)$ aralığında tanımlıdır.

$x = 1$ için $y = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$ dır.

Buna göre grafik $(1,0)$ noktasından geçer.

$x = 0$ için $y = \ln(2-0) = \ln 2$ dir.

Buna göre grafik $(0,\ln 2)$ noktasından geçer. Bu örnekleri çoğaltabiliriz.



Örnek:

$y = \dfrac{\ln(x-1)}{\ln 2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

Fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bulalım:

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ dir.

Buna göre fonksiyon $(1, +\infty)$ aralığında tanımlıdır.

Fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulalım:

$y = 0$ için

$\dfrac{\ln(x-1)}{\ln 2} = 0 \Rightarrow \ln(x-1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ dir.

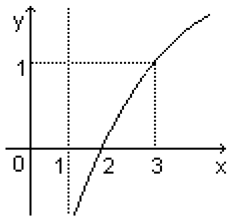
Buna göre grafik Ox eksenini $(2,0)$ noktasında kesmektedir.

$x = 0$ için y tanımsızdır. Bu nedenle grafik Oy eksenini kesmez.

$x = 3$ için $y = \dfrac{\ln(3-1)}{\ln 2} = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1$ dir.

Buna göre grafik $(3,1)$ noktasından geçer.

Bu örnekleri çoğaltabiliriz.



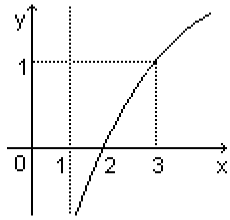
Örnek:

$y = \log_2(x-1)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$y = \log_2(x-1) = \dfrac{\ln(x-1)}{\ln 2}$ olduğuna göre,

bir önceki örnekte verdiğimiz grafik $y = \log_2(x-1)$ in grafiğidir.



II. Logaritmalı Denklemler

Bilinmeyeni logaritmanın içerisinde bulunan denklemlere logaritmalı denklemler adı verilir. Logaritmalı denklemlerin çözümünde, üslü ifadelerin ve logaritmanın özellikleri kullanılır.

Uyarı

a sayısı 1 sayısından farklı pozitif bir sayı olmak üzere tabanı a olan logaritmalı denklem,

- $\log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$ dir.
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

özellikleri kullanılarak çözülür.

Logaritmanın tanımından $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

Örnek:

$\log_4(x-2) = -1$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$\log_4(x-2) = -1 \Rightarrow x - 2 = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{4} + 2 \Rightarrow x = \dfrac{9}{4}$

Örnek:

$\log_3(x-10)-\log_3(x-2)=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x-10>0$ ve $x-2>0$ olmak üzere,

$\log_3(x-10)-\log_3(x-2)=\log_3\frac{x-10}{x-2}=2$

$\frac{x-10}{x-2}=3^2 \Rightarrow \frac{x-10}{x-2}=9 \Rightarrow 9x-18=x-10 \Rightarrow x=1$

olur.

$x=1$ değeri başlangıç koşullarını sağlamaz. Bu nedenle verilen denklemin kökü 1 olamaz. Buna göre verilen eşitliğin çözüm kümesi ϕ dir.

Örnek:

$\log_3\frac{x-10}{x-2}=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\frac{x-10}{x-2}>0$ olmak üzere, $\log_3\frac{x-10}{x-2}=2$ ise

$\frac{x-10}{x-2}=3^2 \Rightarrow \frac{x-10}{x-2}=9 \Rightarrow 9x-18=x-10 \Rightarrow x=1$

olur.

$x=1$ değeri başlangıç koşulunu sağladığından verilen denklemin kökü 1 dir.

Dolayısıyla çözüm kümesi { 1 } olur.

Örnek:

$\ln x+\ln 5=\ln 2$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm:

$\ln x+\ln 5=2 \Rightarrow \ln(5.x)=2 \Rightarrow 5x=e^2 \Rightarrow x=\frac{e^2}{5}$ tir.

Örnek:

$\log(2x+12)=1+\log(x-2)$ denkleminin kökünü bulunuz.

Çözüm:

$\log(2x+12)=\log 10+\log(x-2)$

$\log(2x+12)=\log[10.(x-2)]$

$2x+12=10x-20 \Rightarrow x=4$ bulunur.

Örnek:

$(\log_2 x)^2-6.\log_2 x+8=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\log_2 x=t$ diyelim.

$t^2-6.t+8=0$ olur.

Bu denklem çözülürse,

$(t-2).(t-4)=0 \Rightarrow t=2$ veya $t=4$ tür.

$\log_2 x=2 \Rightarrow x=2^2=4$

$\log_2 x=4 \Rightarrow x=2^4=16$ bulunur.

O halde denklemin çözüm kümesi Ç.K = {4,16} bulunur.

III. Logaritmalı Eşitsizlikler

$\log_a f(x)$ işareti a ya bağlı olduğundan eşitsizlik çözümlerinde aşağıdaki bilgileri kullanırız.

- $a>1$ olmak üzere $\log_a f(x)>c$ ise $f(x)>a^c$ dir.
- $a>1$ olmak üzere $\log_a f(x)<c$ ise $0<f(x)<a^c$ dir.

- $0 < a < 1$ olmak üzere $\log_a f(x) > c$ ise

  $0 < f(x) < a^c$ dir.

- $0 < a < 1$ olmak üzere $\log_a f(x) < c$ ise $f(x) > a^c$ dir.

Örnek:

$f(x) = \log_{(x+4)}(3 - x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm:

Logaritma fonksiyonunun özelliğinden,

1. $3 - x > 0$
2. $x + 4 > 0$
3. $x + 4 \neq 1$

olmalıdır. Bu üç koşulu sağlayan x değerleri $-4 < x < 3$ ve $x \neq -3$ olmalıdır. Buna göre, verilen fonksiyonun en geniş tanım kümesi

$T = \{x / -4 < x < 3, x \neq -3\}$ olur.

Örnek:

$\log_5(x+3) > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

Taban 1 den büyük olduğundan eşitsizliğin yönü aynı kalır. Buna göre,

$\log_5(x+3) > 2 \Rightarrow x + 3 > 5^2 \Rightarrow x + 3 > 25 \Rightarrow x > 22$

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

Ç.K. $= \{x \ / \ x > 22, \ x \in R\}$ dir.

Örnek:

$\log_5(x+3) \geq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\log_5(x+3) \geq 2 \Rightarrow x + 3 \geq 5^2 \Rightarrow x + 3 \geq 25 \Rightarrow x \geq 22$

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

Ç.K. $= \{x \ / \ x \geq 22, \ x \in R\}$ dir.

Örnek:

$\log_3(x+1) < 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

Taban 1 den büyük olduğundan eşitsizliğin yönü aynı kalır. Buna göre,

$\log_3(x+1) < 4 \Rightarrow 0 < x + 1 < 3^4 \Rightarrow -1 < x < 80$ dir.

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

Ç.K. $= \{x \ / \ -1 < x < 80, \ x \in R\}$ dir.

Örnek:

$\log_3(x+1) \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

$\log_3(x+1) \leq 4 \Rightarrow 0 < x + 1 \leq 3^4 \Rightarrow -1 < x \leq 80$ dir.

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

Ç.K. $= \{x \ / \ -1 < x \leq 80, \ x \in R\}$ dir.

Örnek:

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

Taban 1 den küçük olduğu için eşitsizliğin yönü değişir.

Buna göre,

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 3 \Rightarrow x-2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x > \frac{17}{8}$ dir.

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç.K. = \{x \ / \ x > \frac{17}{8}, \ x \in R\}$ dir.

Örnek:

$3.\log_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{2}-2) > 9$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

Taban 1 den küçük olduğu için eşitsizliğin yönü değişir.
Buna göre,

$3.\log_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{2}-2) > 9 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{2}-2) > 3$ olup,

$0 < \frac{x}{2} - 2 < (\frac{1}{3})^3 \Rightarrow 0 < \frac{x-4}{2} < \frac{1}{27} \Rightarrow 0 < x-2 < \frac{2}{27}$

$4 < x < \frac{110}{27}$ dir.

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç.K. = \{x \ / \ 4 < x < \frac{110}{27}, \ x \in R\}$ dir.

Örnek:

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{x+2}{2}) \geq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

Taban 1 den küçük olduğu için eşitsizliğin yönü değişir.

Buna göre,

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{x+2}{2}) \geq 2$ ise $0 < \frac{x+2}{2} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ olup,

$0 < x+2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2 < x \leq -1$ dir.

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç.K. = \{x \ / \ -2 < x \leq -1, \ x \in R\}$ dir.

Uyarı

Logaritmalı eşitsizliklerin çözüm kümesini bulma işlemlerinde, logaritmanın özelliğinden daha çok basit eşitsizlikler ve fonksiyon eşitsizlikleri kullanılıyor. Bu nedenle eşitsizlikler konusu iyi bilinmelidir.

Örnek:

$8^{\ln x} + x^{\ln 8} < 32$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$8^{\ln x} + x^{\ln 8} < 32$ ise $8^{\ln x} + 8^{\ln x} < 32$ dir.

$\Rightarrow 2.8^{\ln x} < 32 \Rightarrow 2^{3.\ln x} < 16 \Rightarrow 2^{3.\ln x} < 2^4$

$\Rightarrow 3.\ln x < 4 \Rightarrow \ln x < \frac{4}{3} \Rightarrow 0 < x < e^{\frac{4}{3}}$ olur.

Bu durumda verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç.K. = \{x \ / \ 0 < x < e^{\frac{4}{3}}, \ x \in R\}$ dir.

$e > 1$ olduğundan eşitsizliğin yönü aynı kaldı.

Çözümlü Sorular

1. $\log 2 = 0{,}301$ olmak üzere $a = 2^{24}$, $b = 5^{18}$, $c = 4^{12}$ sayılarını sıralayınız.

Çözüm:

$c = 4^{12} = (2^2)^{12} = 2^{24}$ olduğu için $a = c$ dir.

$\log 2 = 0{,}301$ olmak üzere,

$\log b = \log 5^{18} = 18.\log 5 = 18.\log\dfrac{10}{2} = 18.(\log 10 - \log 2)$

$= 18.(1 - 0{,}301) = 12{,}582$ dir.

$\log a = \log 2^{24} = 24.\log 2 = 24.0{,}301 = 7{,}224$ dir.

Buna göre,

$7{,}224 < 12{,}582 \Rightarrow \log a < \log b \Rightarrow a < b \Rightarrow a = c < b$ dir.

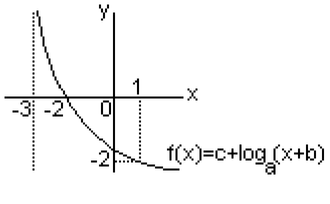
2. $-2 < \ln x \le \log_{\frac{1}{2}} 2$ denkleminin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$-2 < \ln x \le \log_{\frac{1}{2}} 2 \Rightarrow -2 < \ln x \le \log_{2^{-1}} 2$

$-2 < \ln x \le -1 \Rightarrow e^{-2} < x \le e^{-1} \Rightarrow x \in \left(e^{-2}, e^{-1}\right]$

3.



Yandaki şekilde $y = c + \log_a (x + b)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre a + b + c toplamı kaçtır?

Çözüm:

Şekilden anlaşılacağı gibi $f(x)$ fonksiyonu $x > -3$ te tanımlıdır. Buna göre $x + 3 > 0$ dır.

$f(x) = c + \log_a (x + b)$ ifadesi $x + b > 0$ da tanımlıdır.

$x + 3 > 0$ ve $x + b > 0$ eşitsizliklerinden $b = 3$ olduğu anlaşılır.

Şekildeki $f(x) = c + \log_a (x + b)$ fonksiyonunun grafiği $(-2{,}0)$, $(1{,}-2)$ noktalarından geçmektedir.

Bu durumda $f(-2) = 0$ ve $f(1) = -2$ dir.

$b = 3$ ve $f(-2) = 0$ ise,

$c + \log_a (-2 + 3) = 0 \Rightarrow c + \log_a 1 = 0$

$\Rightarrow c + 0 = 0 \Rightarrow c = 0$

$b = 3$, $c = 0$ ve $f(1) = -2$ ise,

$0 + \log_a (1 + 3) = -2 \Rightarrow \log_a 4 = -2$

$\Rightarrow a^{-2} = 4 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

bulunur.

O halde $a + b + c = \dfrac{1}{2} + 3 + 0 = \dfrac{7}{2}$ dir.

4. $a = \log 45000$ ve $b = \log 2$ olduğuna göre $\log 3$ ün a ve b türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$a = \log 45000 = \log(3^2.5.10^3) = 2.\log 3 + \log 5 + 3.\log 10$

$= 2.\log 3 + \log\dfrac{10}{2} + 3 = 2.\log 3 + \log 10 - \log 2 + 3$

$= 2.\log 3 + 1 - \log 2 + 3$

$a = 2.\log 3 - \log 2 + 4 = 2.\log 3 - b + 4$

$\Rightarrow \log 3 = \dfrac{a + b - 4}{2}$

5. $\ln^2 x + \ln x - 12 = 0$ denkleminin kökleri çarpımını bulunuz.

Çözüm:

$\ln^2 x = (\ln x)^2$ dir.

$\ln^2 x$ ile $\ln x^2$ karıştırılmamalıdır. $\ln x^2 = 2.\ln x$ tir.

Buna göre,

$\ln^2 x + \ln x - 12 = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 + \ln x - 12 = 0$

$\Rightarrow (\ln x - 3).(\ln x + 4) = 0 \Rightarrow \ln x = 3$ veya $\ln x = -4$

$\Rightarrow x = e^3$ veya $x = e^{-4}$ tür.

O halde denklemin kökleri çarpımı $e^3.e^{-4} = e^{-1}$ dir.

6. $x^{\log x} - 10.x = 0$ denkleminin farklı kökleri çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$x^{\log x} - 10.x = 0$ ise $x^{\log x} = 10.x$ tir.

Bu eşitliğin her iki tarafının 10 tabanında logaritması alınırsa,

$\log(x^{\log x}) = \log(10.x) \Rightarrow \log x.\log x = \log 10 + \log x$

$\Rightarrow (\log x)^2 = 1 + \log x \Rightarrow (\log x)^2 - \log x - 1 = 0$

Bu eşitlikte $\log x = m$ dönüşümü yapılırsa,

$m^2 - m - 1 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemin kökleri m_1 ve m_2 ise $\log x = m$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre $m_1 = \log x_1$ ve $m_2 = \log x_2$ dir.

Bizden istenen $x_1.x_2$ dir.

$m^2 - m - 1 = 0$ denkleminin kökler toplamı,

$m_1 + m_2 = -\frac{-1}{1} = 1$ dir.

Buna göre,

$m_1 + m_2 = \log x_1 + \log x_2 = 1 \Rightarrow \log(x_1.x_2) = 1$

$\Rightarrow x_1.x_2 = 10^1 = 10$ bulunur.

7. $\ln(x + y) = \ln x + \ln y$ olduğuna göre, x in y türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$\ln(x + y)$ ifadesinin özdeşini bilmiyoruz. Ancak $\ln x + \ln y = \ln(x.y)$ olduğunu biliyoruz.

Bu durumda,

$\ln(x + y) = \ln x + \ln y = \ln(x.y) \Rightarrow x + y = x.y$ dir.

$\Rightarrow x.(1 - y) = -y \Rightarrow x = \frac{y}{y - 1}$ dir.

8. $\frac{1}{\log_{125} 15} + \frac{3}{\log_3 15}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$\frac{1}{\log_{125} 15} + \frac{3}{\log_3 15} = \log_{15} 125 + 3.\log_{15} 3$

$= \log_{15}(125.3^3) = \log_{15} 15^3 = 3$

9. $\log_6\left(\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 0$ olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

Çözüm:

$$\log_6\left(\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=0 \text{ ise,}$$

$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=6^0=1 \text{ dir.}$$

Buradan,

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1 \Rightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ olup,}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ dir.}$$

Burada $k\in Z$ olup şıklar incelendiğinde, $k=3$ için

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+3\pi \Rightarrow x=\frac{17}{6} \text{ olur.}$$

Konu Bitmiştir…