KARMAŞIK SAYILAR

I. Karmaşık Sayılar Kümesi

Her reel sayının ikinci kuvveti pozitif olduğundan reel sayılarda $x^2 + 16 = 0$ şeklindeki denklemlerin çözümü yapılamaz. Çünkü;

$x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16$

olup karesi – 16 olan hiçbir reel sayı yoktur. O halde bu şekildeki denklemlerin çözümü için daha büyük bir sayı sistemine gereksinim vardır.

$i^2 = -1$ olan i sayısını düşünelim. İ sayısı reel sayı değildir.

Tanım

$\sqrt{-1}$ sayısına sanal (imajiner) sayı birimi denir. $i = \sqrt{-1}$ şeklinde gösterilir. $i^2 = -1$ dir.

Örnek:

$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere $\sqrt{-5} = \sqrt{5}.\sqrt{-1} = \sqrt{5}.i$ dir.

Örnek:

$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere $\left(\sqrt{-3}\right)^2$ sayısının eşitini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}.i$ olduğuna göre,

$\left(\sqrt{-3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}.i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2.i^2 = 3.(-1) = -3$ tür.

Örnek:

$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}.i$ ve $\sqrt{-27} = \sqrt{27}.i$ olduğuna göre,

$\sqrt{-3}.\sqrt{-27} = \sqrt{3}.i.\sqrt{27}.i = \sqrt{81}.i^2 = 9.(-1) = -9$ dur.

Örnek:

Aşağıda bazı sayıların sanal sayı birimi ile yazılışları verilmiştir.

$\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3.i$

$\sqrt{-2} = \sqrt{2}.\sqrt{-1} = \sqrt{2}.i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = \sqrt{12}.i = 2\sqrt{3}.i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5.i$

$\sqrt{-75} = \sqrt{75}.\sqrt{-1} = \sqrt{75}.i = 5\sqrt{5}.i$

$\sqrt{-27} = \sqrt{27}.\sqrt{-1} = 3\sqrt{3}.i$

$\sqrt{-18} = \sqrt{18}.\sqrt{-1} = 3\sqrt{2}.i$

$\sqrt{-32} = \sqrt{32}.\sqrt{-1} = 4\sqrt{2}.i$

Uyarı

a ve b pozitif reel sayı ve x, y negatif reel sayı olmak üzere,

$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ dir.

$\sqrt{x.y} \neq \sqrt{x}.\sqrt{y}$ dir.

A. Sanal Sayının Kuvvetleri

$\sqrt{-1} = i$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere, aşağıda sanal sayı biriminin bazı kuvvetleri verilmiştir. İnceleyiniz.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i = 1.i = i$

$i^6 = i^5.i = i.i = -1$

Görüldüğü gibi sanal sayı birimi i'nin kuvvetleri;
1, i, -1, -i değerlerinden birine eşit olmaktadır.

Örnek:

$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere, i^{35} sayısının eşitini bulalım.

Çözüm:

$i^3 = -i$ ve $i^4 = 1$ olduğundan $35 = 4.8 + 3$ olmak üzere,

$i^{35} = i^{4.8+3} = \left(i^4\right)^8.i^3 = 1^8.(-i) = -i$ dir.

Örnek:

$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere, i^{-18} sayısının eşitini bulalım.

Çözüm:

$i^2 = -1$ ve $i^4 = 1$ olduğundan $-18 = 4.(-5) + 2$ olmak üzere,

$i^{-18} = i^{4.(-5)+3} = \left(i^4\right)^{-5}.i^2 = 1^{-5}.(-1) = -1$ dir.

Sonuç

Sanal sayı biriminin (i'in) kuvveti x olsun. x tam sayısı 4 ile bölündüğünde,

Kalan 0 ise, i^x ifadesinin eşiti 1 dir. $\left(i^{4k+0} = 1\right)$

Kalan 1 ise, i^x ifadesinin eşiti i dir. $\left(i^{4k+1} = i\right)$

Kalan 2 ise, i^x ifadesinin eşiti -1 dir. $\left(i^{4k+2} = -1\right)$

Kalan 3 ise, i^x ifadesinin eşiti –i dir. $\left(i^{4k+3} = -i\right)$

Örnek:

2719 sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 tür.

Buna göre, $i^{2719} = i^3 = -i$ dir.

Örnek:

Aşağıda sanal sayının bazı kuvvetleri hesaplanmıştır.
İnceleyiniz.

$i^{30} = i^{4.7+2} = -1$

$i^{471} = i^{4.117+3} = -i$

$i^{20} = i^{4.5+0} = 1$

$i^{-34} = i^{4.(-9)+2} = -1$

$i^{121} = i^{4.30+1} = i$

$i^{1994} = i^{4.498+2} = -1$

$i^{2007} = i^{4.501+3} = -i$

$i^{-154} = i^{4.(-39)+2} = -1$

Örnek:

$2 - i^{17} + 2.i^7 + i^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$2 - i^{17} + 2.i^7 + i^2 = 2 - i^{4.4+1} + 2.i^{4.1+3} + i^2$

$= 2 - i + i + (-1) = 1$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 7$ polinomu veriliyor.

P(i) değerini bulunuz..

Çözüm:

$P(x) = 4.i^3 - 2.i^2 + 3.i + 7 = 4.(-i) - 2.(-1) + 3i + 7$

$= -4i + 2 + 3i + 7 = -i + 9$

B. Karmaşık Sayı Tanımı

$a, b \in R$ birer reel sayı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = a + b.i$ şeklinde ifade edilen z sayısına karmaşık sayı (komplex sayı) denir.

Karmaşık sayılar kümesi C ile gösterilir.

Buna göre,

$C = \{z \ / \ z = a + b.i, \ a, b \in R, \ i = \sqrt{-1}\}$ dir.

Örnek:

$3 + 5.i$, $\sqrt{2} - \frac{1}{4}.i$, $-3 + \sqrt{3}.i$,

$0 + 5.i$, $7 + 0.i$, $0 + 0.i$ birer karmaşık sayıdırlar.

Tanım

$z = a + b.i$ karmaşık sayısında a reel sayısına karmaşık sayının reel kısmı, b reel sayısına karmaşık sayısının sanal kısmı denir.

Re(z) = a, İm(z) = b şeklinde gösterilir.

Örnek:

$z = 12 - 6.i$ karmaşık sayısı için,

$Re(z) = 12$ ve $İm(z) = -6$ dır.

Örnek:

$z = 18.i$ karmaşık sayısı için,

$Re(z) = 0$ ve $İm(z) = 18$ dir.

Örnek:

$z = 17$ karmaşık sayısı için,

$Re(z) = 17$ ve $İm(z) = 0$ dır.

Örnek:

$z_1 = 3 + 5.i$ karmaşık sayısında,

$Re(z_1) = 3$, $İm(z_1) = 5$ tir.

$z_2 = \sqrt{2} - \frac{1}{4}.i$ karmaşık sayısında,

$Re(z_2) = \sqrt{2}$, $İm(z_2) = -\frac{1}{4}$ tür.

$z_3 = -3 + \sqrt{3}.i$ karmaşık sayısında

$Re(z_3) = -3$, $İm(z_3) = \sqrt{3}$ tür.

$z_4 = 5.i$ karmaşık sayısında

$Re(z_4) = 0$, $İm(z_4) = 5$ tir.

$z_5 = 7$ karmaşık sayısında

$Re(z_5) = 7$, $İm(z_5) = 0$ dır.

Örnek:

$z = \frac{4 + 6.i}{2}$ karmaşık sayısının reel ve sanal kısımlarını bulalım.

Çözüm:

$z = \frac{4 + 6.i}{2} = \frac{4}{2} + \frac{6.i}{2} = 2 + 3.i$ olup,

$Re(z) = 2$, $İm(z) = 3$ bulunur.

Uyarı

Her reel (gerçel) sayı imajiner kısmı 0 (sıfır) olan bir karmaşık sayıdır. Buna göre, karmaşık sayılar kümesi reel sayılar kümesini kapsar. Yani $R \subset C$ dir.

Örnek:

-4 reel sayısı $-4+0.i$ karmaşık sayısına eşittir.

C. İki Karmaşık Sayının Eşitliği

Reel kısımları ve imajiner kısımları kendi aralarında eşit olan iki karmaşık sayı birbirine eşittir.

Kural

$z_1 = a + b.i$ ve $z_2 = c + d.i$ olsun.

$z_1 = z_2$ ise $a = c$ ve $b = d$ dir.

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = 2^2 + 7.i$ ve $w = 4 + 7.i$ karmaşık sayılarının reel ve imajiner kısımları birbirine eşit olduğundan bu iki karmaşık sayı eşittir.

Buna göre $z = w$ dir.

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = 7 + 3.i$ ve $w = 7 - 3.i$ karmaşık sayılarının reel kısımları birbirine eşit fakat imajiner kısımları birbirine eşit olmadığından bu iki karmaşık sayı eşit değildir.

Buna göre $z \neq w$ dir.

Örnek:

$z_1 = 8 + (a+b).i$ ve $z_2 = a - b + 24.i$ karmaşık sayıları verilyor. $z_1 = z_2$ olduğuna göre $a^2 + b^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$Re(z_1) = 8$, $İm(z_1) = a + b$ dir.

$Re(z_2) = a - b$, $İm(z_2) = 24$ tür.

$z_1 = z_2$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 8 \\ a + b &= 24 \end{aligned}\right\} a = 16 \text{ ve } b = 8 \quad \text{bulunur.}$$

Buna göre,

$a^2 + b^2 = 16^2 + 8^2 = 256 + 64 = 320$ bulunur.

Örnek:

$z_1 = 4a - 3 + 2i$ ve $z_2 = 5 + 7i + bi$ karmaşık sayıları veriliyor. $z_1 = z_2$ olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$Re(z_1) = 4a - 3$, $İm(z_1) = 2$ dir.

$Re(z_2) = 5$, $İm(z_2) = b + 7$ dir.

$z_1 = z_2$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} 4a - 3 &= 5 \\ b + 7 &= 7 \end{aligned}\right\} a = 2 \text{ ve } b = -5 \quad \text{bulunur.}$$

Buna göre,

$a + b = 2 + (-5) = -3$ bulunur.

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = 2x + 3i + (x + y).i$ ve $w = y + 8 - 6.i$ karmaşık sayıları veriliyor. $z = w$ olduğuna göre $x.y$ kaçtır?

Çözüm:

$z = 2x + 3i + (y+1).i = 2x + (y+4).i$ olup,

$Re(z) = 2x$, $İm(z) = y + 4$ tür.

$w = y + 8 - 6.i$ ise,

$Re(w) = y + 8$, $İm(w) = -6$ dır.

$z = w$ olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} 2x = y+8 \\ y+4 = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x - y = 8 \\ y = -10 \end{array}\right\} x = -1 \text{ ve } y = -10 \quad \text{bulunur.}$$

Buna göre,

$x.y = (-1).(-10) = 10$ bulunur.

D. Reel Kökü Olmayan 2.Dereceden Bir Denklemin Sanal Kökleri

a , b ve c birer reel sayı olmak üzere $ax^2 + bx + c$ denklemine 2. dereceden reel katsayılı denklem denir.

Bu denklemin $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

1) $\Delta > 0$ olduğunda iki farklı reel kökü vardır.

Bu kökler sırasıyla; $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2) $\Delta = 0$ olduğunda birbirine eşit olan iki reel kök vardır.

Bu kökler; $x_1 = \frac{-b}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b}{2a}$ dır.

3) $\Delta < 0$ olduğunda denklemin reel kökü yoktur.

Reel kök olmaması durumunda; $\Delta < 0$ olduğundan $-\Delta > 0$ olup denklemin iki farklı sanal kökü vardır.

Bu kökler sırasıyla; $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ bulunur.

Örnek:

$x^2 - 2x + 5$ denkleminin köklerini bulalım.

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.5 = 4 - 20 = -16$ bulunur.

$\Delta < 0$ olduğunda denklemin reel kökü yoktur.

O halde iki farklı komplex kök vardır.

Bunlar;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{-16}}{2.1} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{-16}}{2.1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i \quad \text{dir.}$$

Örnek:

$x^2 - 4x + 7$ denkleminin köklerini bulalım.

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.7 = 16 - 28 = -12$ bulunur.

$\Delta < 0$ olduğunda denklemin reel kökü yoktur. O halde iki farklı komplex kök vardır. Bunlar;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{-12}}{2.1} = \frac{4+2\sqrt{3}.i}{2} = 2+\sqrt{3}i$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{-12}}{2.1} = \frac{4-2\sqrt{3}.i}{2} = 2-\sqrt{3}i$$

bulunur.

E. Karmaşık Sayıların Analitik Düzlemde Belirtilmesi

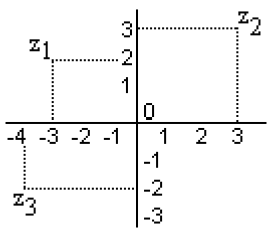
Reel kısmı a, imajiner kısmı b olan karmaşık sayının; $z = a + b.i$ şeklindeki gösterimine karmaşık sayının standart (cebirsel) biçimi, $Z(a,b)$ biçimindeki gösterimine kartezyen koordinatlarıyla gösterilmiş biçimi denir.

Ox eksenine reel eksen, Oy eksenine de sanal (imajiner) eksen diyerek karmaşık sayıları gösterebileceğimiz karmaşık düzlemi elde ederiz.

Karmaşık sayılarla karmaşık düzlemin noktaları bire bir eşlenebilir.

Örnek:

$z_1 = -3 + 2.i$, $z_2 = 3 + 3.i$, $z_3 = -4 - 2.i$ karmaşık sayılarını sayı doğrusunda gösterelim.



Örnek:

$z_1 = (a - 2) + 7.i$ karmaşık sayısının sanal eksen üzerinde,

$z_2 = 5 + (b^3 - 8).i$ karmaşık sayısının reel eksen üzerinde yer alması için a + b toplamı kaç olmalıdır?

Çözüm:

Sanal eksen üzerindeki karmaşık sayıların reel kısımları sıfırdır.

Buna göre; $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ olur.

Reel eksen üzerindeki karmaşık sayıların sanal kısımları sıfırdır.

Buna göre; $b^3 - 8 = 0 \Rightarrow b = 2$ olur.

O halde $a + b = 2 + 2 = 4$ tür.

Uyarı

Karmaşık sayılar; düzlemdeki noktalar olduğundan sıralama özelliği yoktur. Yani karmaşık sayılarda büyüklük veya küçüklük sıralaması yoktur.

F. Karmaşık Sayıların Eşleniği

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = a + b.i$ karmaşık sayısı verilmiş olsun. Bu karmaşık sayının sanal kısmının işaretini değiştirmekle elde edilen $a - b.i$ karmaşık sayısına $z = a + b.i$ karmaşık sayısının eşleniği denir ve $\bar{z} = a + b.i$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$z_1 = 5 + 2.i$ sayısının eşleniği, $\overline{z_1} = 5 - 2.i$ dir.

$z_2 = -8 - 3.i$ sayısının eşleniği, $\overline{z_2} = -8 + 3.i$ dir.

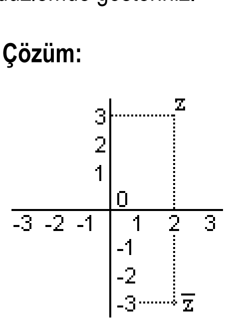
$z_3 = 2.i$ sayısının eşleniği, $\overline{z_3} = 0 - 2.i = -2i$ dir.

$z_4 = 6$ sayısının eşleniği, $\overline{z_4} = 6 - 0.i = 6$ dır.

Örnek:

$z = 2 + 3.i$ karmaşık sayısının eşleniğini bularak komplex düzlemde gösteriniz.

Çözüm:



Şekilden görüldüğü gibi $\bar{z} = 2 - 3.i$ olup z karmaşık sayısı ile onun eşleniği olan $\bar{z}$ karmaşık sayısı reel eksene göre simetriktirler.

Sonuç

$x + y.i$ karmaşık sayısı ile eşleniği olan $x - y.i$ sayısı reel eksene göre (Ox eksenine göre) simetriktir.

Örnek:

$z = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ sayısının eşleniği $\bar{z} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ dir

Örnek:

$z = 5 + 2.i$ karmaşık sayısının eşleniğinin eşleniğini bulalım.

Çözüm:

$z = 5 + 2.i \Rightarrow \bar{z} = 5 - 2.i \Rightarrow \left(\overline{\bar{z}}\right) = 5 + 2i$

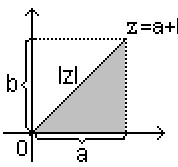
Sonuç

Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği karmaşık sayının kendisine eşittir.

$z = a + b.i$ ise $\bar{z} = a - b.i$ olup $\left(\overline{\bar{z}}\right) = a + b.i = z$ dir.

G. Karmaşık Sayıların Mutlak Değeri (Modülü)

Bir karmaşık sayının eşlendiği noktanın orjine (başlangıç noktasına) olan uzaklığına o karmaşık sayının modülü (mutlak değeri) denir. $z = a + b.i$ karmaşık sayısının modülü $|z|$ ile gösterilir.



Yandaki taralı üçgene pisagor bağıntısı uygulanırsa

$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

bulunur.

O halde bir karmaşık sayının modülü reel ve komplex kısımlarının kareleri toplamının karekökü ile bulunur.

Örnek:

$z = 4 + 3.i$ karmaşık sayısının modülünü bulalım.

Çözüm:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ bulunur.

Örnek:

$z = -2 + 4.i$ karmaşık sayısının ile eşleniğinin modülünü bulalım.

Çözüm:

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ bulunur.

$z = -2 + 4.i \Rightarrow \bar{z} = -2 - 4.i$ olup

$|\bar{z}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Sonuç

Bir karmaşık sayının modülü ile eşleniğinin modülü birbirine eşittir.

Yani $|z| = |\bar{z}|$ dir.

Örnek:

$f(z) = |z|$ ve $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(gof)(3 + 4i)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(3 + 4i) = |3 + 4.i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ tir.

$g(5) = 2.5 + 1 = 11$ olup,

$(gof)(3 + 4i) = g(f(3 + 4i)) = g(5) = 11$ bulunur.

Sonuç

Bir karmaşık sayının mutlak değeri (modülü) negatif olamaz.

Yani $|z| \geq 0$ dır.

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere $z=\cos x+2.i$ ve $|z|=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ olduğuna göre, x in en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$$|z|=\frac{\sqrt{17}}{2}\Rightarrow\sqrt{\cos^2 x+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow\cos^2 x+4=\frac{17}{4}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\ \text{dir.}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\ \text{tür.}$$

H. Karmaşık Sayılarda İşlemler

1) Toplama İşlemi

Karmaşık sayılar toplanırken, reel kısımlar kendi aralarında ve sanal kısımlar kendi aralarında toplanır. Buna göre,

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z=a+b.i$ ve $w=c+d.i$ karmaşık sayılarının toplamı

$z+w=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i$ dir.

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere, $z=8+15.i$ ve $w=-3+4.i$ karmaşık sayılarının toplamını bulalım.

Çözüm:

$$z+w=(8+15.i)+(-3+4.i)$$

$$=(8-3)+(15+4).i=5+19.i$$

Örnek:

$z=3+5.i$, $w=-4.i$ karmaşık sayıları için $z+w$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$z+w=(3+5.i)+(0-4.i)$$

$$=(3+0)+(5-4).i=3+i$$

2) Çıkarma İşlemi

$z+(-w)=z-w$ olduğuna göre, z sayısını w sayısının toplama işlemine göre tersi ile toplamak, z sayısından w sayısını çıkarmak demektir. Buna göre,

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z=a+b.i$ ve $w=c+d.i$ karmaşık sayılarının farkı

$z-w=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i$ dir.

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere, $z=8+15.i$ ve $w=-3+4.i$ karmaşık sayıları veriliyor. $z-w$ farkını bulalım.

Çözüm:

$$z-w=(8+15.i)-(-3+4.i)$$

$$=(8-(-3))+(15-4).i$$

$$=11+11.i$$

3) Çarpma İşlemi

$i^2=-1$ olmak üzere,

$z=a+b.i$ ve $w=c+d.i$ karmaşık sayılarının çarpımı

$$z.w=(a+b.i).(c+d.i)$$

$$=a.c+a.d.i+b.c.i+b.d.i.i$$

$$=(a.c-b.d)+(a.d+b.c).i\ \text{dir.}$$

Örnek:

$i^2 = -1$ olmak üzere, $z = 8 + 15.i$ olduğuna göre $2.z$, $2.i.z$ ve $(2+i).z$ sayılarını bulalım.

Çözüm:

$2.z = 2.(8 + 15.i) = 16 + 30.i$ dir.

$2.i.z = 2.i.(8 + 15.i) = 16.i + 30.i^2 = -30 + 16.i$ dir.

$(2+i).z = (2+i).(8+15.i) = 16 + 30.i + 8.i + 15.i^2$

$= 16 - 15 + 38.i = 1 + 38.i$

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = 2 + 3.i$ ve $w = 4 + 5.i$ karmaşık sayıları veriliyor. $z.w$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$z.w = (2+3.i).(4+5.i) = 8 + 10.i + 12.i + 15.i^2$

$= 8 - 15 + 22.i = -7 + 22.i$

Örnek:

$z = (3+2.i)^2.(1+i)$ karmaşık sayısının reel ve sanal kısımlarını bulalım.

Çözüm:

$(3+2.i)^2 = (3+2.i).(3+2.i) = 5 + 12.i$ olup,

$z = (3+2.i)^2.(1+i) = (5+12.i).(1+i) = -7 + 17.i$

Örnek:

$z = (1+i)^{10} + (1-i)^{11}$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$(1+i)^2 = (1+i).(1+i) = 1 + i + i + i^2 = 2i$

$(1-i)^2 = (1-i).(1-i) = 1 - i - i + i^2 = -2i$

$z = (1+i)^{10} + (1-i)^{11} = \left[(1+i)^2\right]^5 + \left[(1-i)^2\right]^5.(1-i)$

$= (2i)^5 + (-2i)^5 = 32.i^5 - (32).i^5.(1-i)$

$= 32.i - 32.i + 32.i^2 = -32$

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = 2 - 3.i$ olduğuna göre, z nin eşleniği ile çarpımını bulalım.

Çözüm:

$z.\bar{z} = (2-3.i).(2+3.i) = 4 + 6.i - 6.i - 9.i^2$

$= 4 + 9 = 13$

Sonuç

$i = \sqrt{-1}$ ve $z = a + b.i$ olmak üzere, z nin eşleniği ile çarpımı $|z|^2$ dir.

$z.\bar{z} = (a+b.i).(a-b.i) = a^2 - a.b.i + a.b.i - b^2.i^2$

$= a^2 + b^2 = |z|^2$

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = 5 + 3.i$ olduğuna göre, z nin eşleniği ile çarpımını bulalım.

Çözüm:

$z.\bar{z} = (5+3.i).(5-3.i) = 25 - 15.i + 15.i - 9.i^2$

$= 25 + 9 = 34$

$z.\bar{z} = 34 \Rightarrow |z|^2 = 34 \Rightarrow |z| = \sqrt{34}$ tür.

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere, $(1-2i)^4.(1+2i)^4$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$(1-2i)^4.(1+2i)^4=\left[(1-2i).(1+2i)\right]^4=\left[1^2-(2i)^2\right]^4$$

$$=\left[1-4.i^2\right]^4=5^4=625$$

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere, $(1-i)^{12}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$(1-i)^{12}.(1+2i)^4=\left[(1-i)^2\right]^6=\left[1-2i+i^2\right]^6$$

$$=\left[1-2.i-1\right]^6=(-2i)^6=64.i^6$$

$$=64.(-1)=-64$$

Örnek:

$z_1=3+4.i$, $z_2=5+12.i$ karmaşık sayıları için $\left|z_1.z_2\right|$ ve $\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$ değerlerini hesaplayarak karşılaştıralım.

$$\left|z_1.z_2\right|=\left|(3+4.i).(5+12.i)\right|=\left|-33+56.i\right|$$

$$=\sqrt{(-33)^2+56^2}=65$$

$$\left|z_1\right|.\left|z_2\right|=\left|3+4.i\right|.\left|5+12.i\right|=\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{5^2+12^2}$$

$$=5.13=65 \text{ olduğundan}$$

$\left|z_1.z_2\right|=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$ dir.

Örnek:

$z.(1+i)+3.i=-1+8.i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulalım.

Çözüm:

$z=a+b.i$ olsun.

$$z.(1+i)+3.i=(a+b.i).(1+i)+3i$$

$$=a+a.i+b.i+b.i^2+3.i$$

$$=a-b+(a+b+3).i$$

$$z.(1+i)+3.i=-1+8.i\Rightarrow a-b+(a+b+3).i=-1+8.i$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a-b=-1\\a+b+3=8\end{array}\right\}\quad a=2,\ b=3$$

$z=a+b.i=2+3.i$ bulunur.

Sonuç

z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için $\left|z_1.z_2\right|=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$ dir.

Çarpma İşleminde Ters Eleman Özelliği:

$z=a+b.i$ olsun. z sayısının çarpma işlemine göre tersi z^{-1} ile gösterilir. $z.z^{-1}=1$ olmalıdır. Şimdi bu eşitlikten z^{-1} sayısını belirleyeceğiz.

$$z.z^{-1}=1\Rightarrow(a+b.i).z^{-1}=1\Rightarrow z^{-1}=\frac{1}{a+b.i}=\frac{1}{z} \text{ dir.}$$

$z^{-1}=\dfrac{1}{z}$ bulunur.

Örnek:

$z=2-i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi olan z^{-1} sayısını bulalım.

Çözüm:

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2-i}$ olup payda da komplex sayı bulunması tercih edilen bir durum olmadığından son eşitlikteki sayının pay ve paydası $z = 2 - i$ sayısının eşleniği olan $\bar{z} = 2 + i$ ile çarpılarak payda reel sayı yapılmalıdır.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2-i} = \frac{1.(2+i)}{(2-i).(2+i)} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}.i$$

bulunur.

O halde $z^{-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}.i$ dir

Örnek:

$z = \sqrt{3} + \sqrt{2}.i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi olan z^{-1} sayısını bulalım.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}.i} = \frac{1.(\sqrt{3} - \sqrt{2}.i)}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}.i).(\sqrt{3} - \sqrt{2}.i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}.i}{3+2} = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}.i \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$z = \frac{5}{i+2} - \frac{2}{1+i}$ ise Re(z) + İm(z) toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$z = \underset{(1+i)}{\frac{5}{i+2}} - \underset{(i+2)}{\frac{2}{1+i}} = \frac{5+i-4-2.i}{i+2+i^2+2.i} = \frac{1-i}{1+3i}$$

Sayının pay ve paydası eşleniği ile çarpılırsa

$$z = \frac{(1-i).(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i-i+3i^2}{1+9} = \frac{-2-4i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{İm}(z) = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{5} \text{ bulunur}$$

4) Bölme İşlemi

z_1 ve z_2 birer karmaşık sayı olmak üzere $z_2 \neq 0$ olsun.

$z_1.(z_2)^{-1}$ sayısına z_1 in z_2 ye bölümü denir ve $\frac{z_1}{z_2}$ ile gösterilir.

Karmaşık sayılarda bölme işlemi, pay ve paydanın paydanın eşleniği ile çarpılmasıyla yapılır.

Yani $z_1 = a + b.i$ ve $z_2 = c + d.i$ ise,

$$\frac{z_1}{z_2} = \underset{(c-d.i)}{\frac{a+b.i}{c+d.i}} = \frac{(a+b.i).(c-d.i)}{(c+d.i).(c-d.i)} \text{ dir.}$$

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = \frac{3+2i}{4-3i}$ olduğuna göre z sayısını bulalım.

Çözüm:

Pay ve payda, paydanın eşleniği ile çarpılırsa,

$$z = \underset{(4+3i)}{\frac{3+2i}{4-3i}} = \frac{12+8i+9i+6i^2}{16-12i+12i-9i^2} = \frac{12-6+17i}{16+9}$$

$$= \frac{6+17i}{25} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$$

Örnek:

$z = \frac{3+i}{1+i}$ ise $\mathrm{Re}(z^{-1}) + \mathrm{İm}(z^{-1})$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$z = \underset{(1-i)}{\frac{3+i}{1+i}} = \frac{3+i-3i-i^2}{1+i-2i-i^2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{\underset{(2+i)}{2-i}}=\frac{2+i}{4+1}=\frac{2+i}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}.i$$

$$Re(z^{-1})+İm(z^{-1})=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$ bulunur.

Örnek:

$z=\sqrt{3}-i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersinin eşleniğinin mutlak değeri kaçtır?

Çözüm:

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{\underset{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}}=\frac{\sqrt{3}+i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}.i$$

$$\overline{\left(z^{-1}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}.i\Rightarrow\left|\overline{z^{-1}}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

bulunur.

Örnek:

$z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2004}$ sayısının reel kısmı kaçtır?

Çözüm:

$$z=\left(\frac{1-i}{\underset{(1-i)}{1+i}}\right)^{2004}=\left(\frac{1-i-i+i^2}{1+1}\right)^{2004}$$

$$=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{2004}=\left(-i\right)^{2004}=1$$

5. Eşlenik ve Mutlak Değer İle İlgili Bazı Özellikler

z_1 ve z_2 birer karmaşık sayı olmak üzere,

- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ dir.
- $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ dir.
- $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$ dir.
- $\overline{\left[\frac{z_1}{z_2}\right]}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ dir.
- $\overline{(z_1)^n}=(\overline{z_1})^n$ dir.
- $|z_1|=|\overline{z_1}|=|-z_1|=|-\overline{z_1}|$ dir.
- $z_1.\overline{z_1}=|z_1|^2$ dir.
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ dir.
- $|(z_1)^n|=|(z_1)|^n$ dir.
- Her $z=a+b.i$ karmaşık sayısı için $Re(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ ve $İm(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$ dir.

Örnek:

$z=\frac{3+2i}{4-3i}$ olduğuna göre $|z|$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$|z|=\frac{|3+2i|}{|4-3i|}=\frac{\sqrt{3^2+2^2}}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{13}}{5}$$ tir.

Örnek:

$z = \dfrac{1+2i}{1-3i}$ olduğuna göre z nin eşleniğinin mutlak değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|\bar{z}\right| = \left|z\right| = \frac{\left|1+2i\right|}{\left|1-3i\right|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = \dfrac{(2+3i).(1+i)^{-4}}{2-3i}$ olduğuna göre $\left|z^{-1}\right|$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|z^{-1}\right| = \left|\left(\frac{(2+3i).(1+i)^{-4}}{2-3i}\right)^{-1}\right| = \left|\frac{2-3i}{(2+3i).(1+i)^{-4}}\right|$$

$$= \frac{\left|2-3i\right|}{\left|2+3i\right|.\left|(1+i)^{-4}\right|} = \frac{\left|2-3i\right|}{\left|2+3i\right|.\left|1+i\right|^{-4}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}.(\sqrt{2})^{-4}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{-4}} = (\sqrt{2})^{4} = 4$$

Örnek:

$z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i$ ve $z_2 = \dfrac{\sqrt{8}}{3} + i$ karmaşık sayıları için $Re(z_1.z_2)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$Re(z_1.z_2) = a.c - b.d = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{8}}{3} - 1.1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$z + \bar{z} = 10$ ve $z - \bar{z} = -4i$ ise z karmaşık sayısını bulalım.

Çözüm:

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ve}$$

$$İm(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{-4i}{2i} = -2 \text{ olduğundan,}$$

$z = a + b.i = 5 - 2.i$ bulunur.

Örnek:

$\left|-3-3\sqrt{2}.i\right|$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|-3-3\sqrt{2}.i\right| = \left|-3.(1+\sqrt{2}.i)\right| = \left|-3\right|.\left|1+\sqrt{2}.i\right| = 3.\sqrt{3}$$

bulunur.

Örnek:

$\left|(\sqrt{7}-3.i)^2\right|$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|(\sqrt{7}-3.i)^2\right| = \left|\sqrt{7}-3i\right|^2 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+3^2}\right)^2 = 7+9 = 16$$

bulunur.

Örnek:

$\left|\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}.i\right)^6\right|$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|(\sqrt{2}-\sqrt{2}.i)^6\right| = \left|\sqrt{2}-\sqrt{2}.i\right|^6 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}\right)^2$$

$= \left(\sqrt{2+2}\right)^6 = 2^6 = 64$ bulunur.

Örnek:

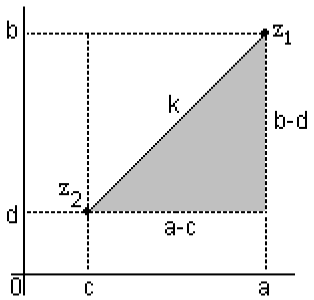
$z = 1 - i$ ise $\left|z^{50}\right|$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|z^{50}\right| = |z|^{50} = \left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right)^{50} = \left(\sqrt{2}\right)^{50} = 2^{25} \text{ bulunur.}$$

K. İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z_1 = a + b.i$ ve $z_2 = c + d.i$ olsun



Bu sayılar arasındaki uzaklık komplex düzlemde bu sayıların görüntüleri arasındaki uzaklığa eşittir.

Bu uzaklığa k dersek şekildeki taralı dik üçgende pisagor bağıntısına göre;

$$k^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 \Rightarrow k = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \text{ dir.}$$

Bu karmaşık sayı arasındaki uzaklık;

$$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$z_1 = 2 + 4.i$ ve $z_2 = 6 + .i$ ise bu karmaşık sayılar arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm:

$$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{(2-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ olur.}$$

Örnek:

$z_1 = 1 + 2.i$ ve $z_2 = -3 - i$ ise bu karmaşık sayılar arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm:

$$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{\left|(1-(-3))^2 + (2-(-1))^2\right|} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

bulunur.

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = 6 + 5.i$ ve $w = -1 + i$ olduğuna göre karmaşık düzlemde z sayısına karşılık gelen noktanın, w sayısına karşılık gelen noktaya uzaklığını bulalım.

Çözüm:

Karmaşık düzlemde z sayısına karşılık gelen noktanın, w sayısına karşılık gelen noktaya uzaklığı $|z - w|$ dir.

$$|z - w| = |6 + 5i - (-1 + i)| = |7 + 4i| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

II.Yol

$z = 6 + 5.i$ ve $w = -1 + i$ olduğuna göre z' nin karmaşık düzlemdeki görüntüsü A(6,5) ve w'nin karmaşık düzlemdeki görüntüsü B(-1,1) dir.

z ile w arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden,

$$|z - w| = \sqrt{(6-(-1))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \text{ olur.}$$

Tanım

Aynı özellikleri taşıyan noktaların oluşturduğu kümeye, bu noktaların geometrik yeri denir.

Noktalar kümesinin geometrik yer olabilmesi için:

1. Verilen koşulu sağlayan tüm noktalar, geometrik yere ait olmalıdır.

2. Geometrik yere ait her nokta, verilen koşulu sağlamalıdır.

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ ve $z=x+y.i$ olmak üzere $|z+3i|=|z|$ olduğuna göre, z'nin karmaşık düzlemdeki geometrik yer denklemini bulunuz.

Çözüm:

$z=x+y.i$ olduğuna göre $|z+3i|=|z|$ ise,

$$|x+yi+3i|=|x+yi| \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+6y+9=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Bu eşitlik sanal eksene dik bir doğru belirtir. Bunun anlamı $y=-\frac{3}{2}$ doğrusu üzerindeki her sayı (nokta) $|z+3i|=|z|$ koşulunu sağlayan z sayısı olabilir.

Kural

Merkezi O(h,k) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi,

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dir.

Örnek:

$x^2+(y+1)^2=25$ denklemini sağlayan (x,y) noktaları merkezi $O(0,-1)$ ve yarı çapı 5 birim olan bir çemberdir.

Örnek:

$i=\sqrt{-1}$ ve $z=x+y.i$ olmak üzere $|z+2-3i|=2$ olduğuna göre, z'nin alabileceği değerleri karmaşık düzlemde gösterelim.

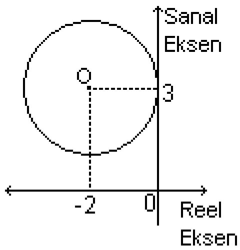
Çözüm:

$z=x+y.i$ ve $|z+2-3i|=2$ olduğuna göre,

$$|x+y.i+2-3i|=2 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=2^2 \text{ dir.}$$

Bu eşitlik merkezi $O(-2,3)$ ve yarı çapı 2 birim olan bir çemberdir.



Yandaki çember üzerindeki her sayı (nokta) $|z+2-3i|=2$ koşulunu sağlayan z sayısı olabilir.

Sonuç

$z=x+y.i$, $w=a+b.i$ iki karmaşık sayı ve r pozitif bir reel sayı olmak üzere,

1. $|z-w|=r$ eşitliğini gerçekleyen z noktalarının kümesi, karmaşık düzlemde merkezi w ye karşılık gelen nokta ve yarıçapı r olan bir çember belirtir.

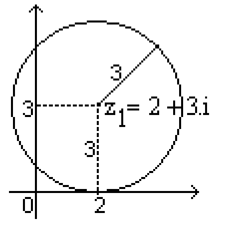
2. $|z-w|<r$ eşitsizliğini gerçekleyen z noktalarının kümesi, karmaşık düzlemde merkezi w ye karşılık gelen nokta ve yarıçapı r olan bir çemberin iç bölgesindeki noktaların kümesini belirtir.

3. $|z-w|>r$ eşitsizliğini gerçekleyen z noktalarının kümesi, karmaşık düzlemde merkezi w ye karşılık gelen nokta ve yarıçapı r olan bir çemberin dış bölgesindeki noktaların kümesini belirtir.

Örnek:

$|z-(2+3i)|=3$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının düzlemdeki görüntüleri olan noktaların kümesini belirtelim.

Çözüm:



$z=x+y.i$ olsun.

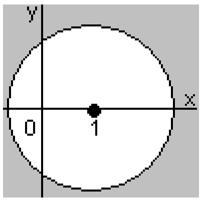
$|z-(2+3i)|=3$ eşitliği $z=x+y.i$ karmaşık sayılarının, $z_1=2+3.i$ karmaşık sayısına uzaklıklarının 3 birim olduğunu gösterir.

Buna göre $z=x+y.i$ karmaşık sayılarının düzlemdeki görüntüleri, merkezi $z_1 = 2 + 3.i$ ve yarıçapı 3 birim olan çemberi oluşturur

Örnek:

$|z - 1| \geq 3$ eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayılarının düzlemdeki görüntüleri olan noktaların kümesini belirtelim.

Çözüm:

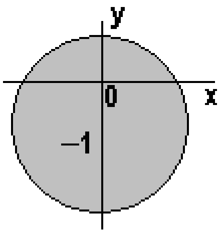


$|z - 1| \geq 3$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesi, merkezi $1 + 0.i$ ve yarıçapı 3 birim olan çemberin üzerindeki ve dışındaki noktalardan oluşur.

Örnek:

$|z - i| \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayılarının düzlemdeki görüntüleri olan noktaların kümesini belirtelim.

Çözüm:

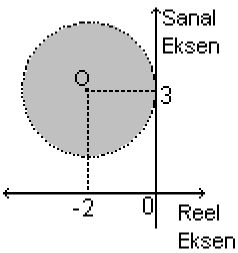


$|z - i| \leq 2$ ifadesini $|z - (0 - i)| \leq 2$ olarak düzenleyelim. $|z - (0 - i)| \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesi, merkezi $(0,-1)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberin üzerindeki noktalar ile içindeki noktalardan oluşur.

Örnek:

$|z + 2 - 3i| < 2$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının düzlemdeki görüntüleri olan noktaların kümesini belirtelim.

Çözüm:



$z = x + y.i$ olmak üzere $|z + 2 - 3i| < 2$ ise

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 < 2^2$ dir.

Bu eşitsizlik merkezi $O(-2,3)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberin iç bölgesini belirtir. Çember üzerindeki noktalar verilen eşitsizliği sağlamadığı için kesikli olarak gösterilmiştir.

Örnek:

$|z - 8 + 7i| \leq 9$ ise $|z - (8 - 7i)| \leq 9$ dur.

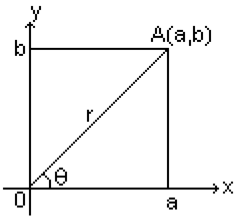
Bu eşitsizliği, merkezi $O(8,-7)$ ve yarıçapı 9 br olan çember ve bu çemberin iç bölgesinde bulunan sayılar sağlar.

Örnek:

$|z + 5 - 10i| \geq 15$ ise $|z - (-5 + 10i)| \geq 15$ dur.

Bu eşitsizliği, merkezi $O(-5,10)$ ve yarıçapı 15 br olan çember ve bu çemberin dış bölgesinde bulunan sayılar sağlar.

II. Kutupsal Koordinat Sistemi ve Karmaşık Sayıların Kutupsal (Trigonometrik) Gösterimi



A noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $|OA| = r$, $|OA|$ ışınının Ox ekseniyle pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü de θ olsun.

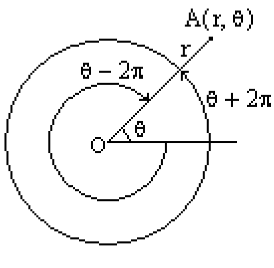
r ve θ reel sayılarına A noktasının kutupsal koordinatları denir. Bu nokta $A(r, \theta)$ şeklinde gösterilir.

Düzlemde bir 0 başlangıç noktası ve bir 0x başlangıç ışını seçelim. O başlangıç noktasına kutup noktası, 0x başlangıç ışınına da kutup ekseni denir. Bir kutup noktası ve bir de kutup ekseninden oluşan koordinat sistemine kutupsal koordinat sistemi denir.

A noktasının kutupsal koordinatları (r, θ) ise r ye yarıçap bileşeni ve θ ya açısal bileşen denir.

Kutupsal koordinatları (r, θ) olan A noktası

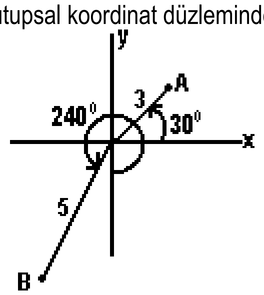
$(r, \theta + 2\pi)$, $(r, \theta + 4\pi)$, $(r, \theta - 2\pi)$,…. İkililerinden biri ile belirtilebilir.



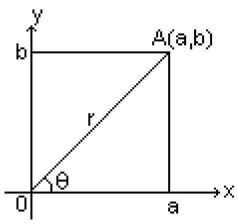
Her $k \in Z$ için $(r, \theta + k.2\pi)$ ikilisi $A(r, \theta)$ noktasının kutupsal koordinatıdır. Buna göre kutupsal koordinat sisteminde, düzlemin bir noktasına birden çok kutupsal koordinat ikilisi karşılık getirilebilir.

Örnek:

Kutupsal koordinatları $A(3,30^{o})$ ve $B(5,240^{o})$ noktalarını kutupsal koordinat düzleminde gösterelim.



A. Bir Noktanın Kartezyen Ve Kutupsal Koordinatları Arasındaki Bağıntılar



Bir A noktasının kartezyen koordinatları $A(a,b)$ kutupsal koordinatları $A(r,\theta)$ olsun.

Yandaki şekilden;

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r}\Rightarrow a=r.\cos\theta$$

$\sin\theta=\frac{b}{r}\Rightarrow b=r.\sin\theta$ olduğu görülür.

Örnek:

Kartezyen koordinatları $A(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ olan A noktasının, kutupsal koordinatlarını yazalım.

Çözüm:

$A(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ kutupsal koordinatları $A(r,\theta)$ ise

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{9}=3$ tür.

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

$\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ olup,

Kosinüsü $\frac{1}{2}$ ve sinüsü $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan açı 4. bölgede olup ölçüsü $\theta=\frac{5\pi}{3}$ tür.

O halde A noktasının kutupsal koordinatları

$A(3,\frac{5\pi}{3})$ olur.

Örnek:

Kutupsal koordinatları $A(4,\frac{2\pi}{3})$ olan A noktasının, kartezyen koordinatlarını yazalım.

Çözüm:

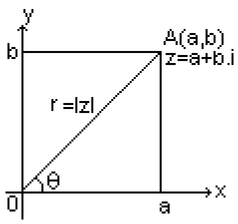
$a=r.\cos\theta=4.\cos\frac{2\pi}{3}=4.\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ ve

$b=r.\sin\theta=4.\sin\frac{2\pi}{3}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ olup

A noktasının kartezyen koordinatları

$A(-2,2\sqrt{3})$ olarak bulunmuş olur.

B. Bir Karmaşık Sayının Kutupsal Koordinatları



Komplex düzlemde $A(a,b)$ noktasına eşlenen $z=a+b.i$ karmaşık sayısının yeri

$|OA|=|z|=r$ ve $s(\hat{HOA})=\theta$ dır.

A noktası $A\left(|z|,\theta\right)$ ikilisiyle belirlenir.

Yukarıdaki şekildeki üçgende

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$\sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \Leftrightarrow b = |z|.\sin\theta$,

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \Leftrightarrow a = |z|.\cos\theta$

a ve b yerine değerleri yazılarak

$z = a + b.i = |z|.\cos\theta + |z|.\sin\theta.i = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ yazılır.

Üçgendeki θ açısının ölçüsü olarak $k \in Z$ ve $0 \le \theta \le 2k\pi$ olmak üzere $\theta + 2k\pi$ sayılarından herhangi biri alınabilir. θ ya bu açının esas ölçüsü denir.

Tanım

$\theta + 2k\pi$ sayılarına $z = a + b.i$ karmaşık sayısının argümentleri denir.

$\arg(z) = \theta + 2k\pi$ yazılır. $0 \le \theta \le 2k\pi$ olmak üzere θ ya bu açının esas argümenti denir. $\arg(z) = \theta$ yazılır.

Örnek:

Kutupsal koordinatları $(\sqrt{6}, \dfrac{5\pi}{3})$ olan karmaşık sayıyı standart biçimde yazalım.

Çözüm:

Kutupsal koordinatları $(\sqrt{6}, \dfrac{5\pi}{3})$ olan karmaşık sayının mutlak değeri (modülü) $\sqrt{6}$ ve argümenti $\dfrac{5\pi}{3}$ tür.

Buna göre,

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta) = \sqrt{6}.\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i.\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{6}.\left(\frac{1}{2} + i.\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{2}.i \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$z = 1 + \sqrt{3}.i$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

Çözüm:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2} \text{ ve } \sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kosinüsü $\dfrac{1}{2}$ ve sinüsü $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olan açı 1. bölgede olup ölçüsü

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ tür.

O halde $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ olup esas argümenti

$\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ tür.

$z = 1 + \sqrt{3}.i$ sayısının kutupsal biçimi;

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta) = 2.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ tür.}$$

$k \in Z$ olmak üzere

$$z = 2.\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) \text{ tür.}$$

Örnek:

$z = 2 - 2.i$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

Çözüm:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } \sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kosinüsü $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve sinüsü $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ olan açı 4. bölgede olup ölçüsü $\theta = \frac{7\pi}{4}$ tür.

O halde $\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ olup esas argümenti $\arg(z) = \frac{7\pi}{4}$ tür.

$z = 2 - 2.i$ sayısının kutupsal biçimi;

$z = 2\sqrt{2}.\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i.\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ tür.

$k \in Z$ olmak üzere

$z = 2\sqrt{2}.\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$ tür.

Örnek:

$z = 4.\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{64}\right)$ karmaşık sayıyı standart biçimde yazalım.

Çözüm:

$z = 4.\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{64}\right) = 4.\left(\cos 150^{o} + i.\sin 150^{o}\right)$

$= 4.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$

Örnek:

$z = 4 - 8.i$ karmaşık sayısının argümenti x olduğuna göre $\tan x$ kaçtır?

Çözüm:

$z = a + b.i$ karmaşık sayısının argümenti θ ise,

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ olur.

$z = 4 - 8.i$ karmaşık sayısının argümenti x olduğuna göre,

$\tan x = \frac{b}{a} = \frac{-8}{4} = -2$ dir.

Örnek:

$z = 2 + 2.i$ karmaşık sayısının esas argümentini bulalım.

Çözüm:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve

$\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Kosinüsü $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve sinüsü $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ olan açı 1. bölgede olup ölçüsü $\theta = \frac{\pi}{4}$ tür.

O halde $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ olup esas argümenti

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ tür.

II.Yol

$z = 2 + 2.i$ karmaşık sayısının reel kısmı ve sanal (imajiner) kısmı pozitif olduğu için, bu sayı birinci bölgededir. Bu durumda, z' nin esas argümenti $(0^{o}, 90^{o})$ aralığındadır. z nin argümenti θ olsun.

Buna göre, $\tan\theta = \frac{2}{2} = 1 = \tan 45^{o}$ ise, $\theta = 45^{o}$ dir.

Örnek:

$z = 2 + 2.i$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

Çözüm:

Bir önceki örnekte $z = 2 + 2.i$ sayısının esas argümentini

$\theta = 45^o$ ve modülünü $|z| = 2\sqrt{2}$ bulmuştuk. O halde bu karmaşık sayının kutupsal şekli

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta) = 2\sqrt{2}.(\cos 45^o + i.\sin 45^o) \text{ dir.}$$

Örnek:

$z = -2\sqrt{3} - 2.i$ karmaşık sayısının modülünü ve esas argümentini bulalım.

Çözüm:

$$|z| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4 \text{ tür.}$$

z karmaşık sayısının reel kısmı ve sanal (imajiner) kısmı negatif olduğu için, bu sayı üçüncü bölgededir. Bu durumda, z' nin esas argümenti $(180^o, 270^o)$ aralığındadır. z nin argümenti θ olsun.

Buna göre, $\tan\theta = \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan 210^o$ olup,

$\theta = 210^o$ dir.

O halde $z = -2\sqrt{3} - 2.i$ karmaşık sayısının kutupsal şekli

$$z = 4.(\cos 210^o + i.\sin 210^o) = 4.\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i.\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= 4.\text{cis}\frac{7\pi}{6}$$

Örnek:

$z = 2.i$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

Çözüm:

$z = 2.i$ karmaşık sayısının modülü,

$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ dir.}$$

z karmaşık sayısının reel kısmı 0 ve sanal (imajiner) kısmı pozitif olduğu için, bu sayı sanal eksenin pozitif tarafı üzerinde bulunur.

Dolayısıyla esas argümenti 90^o dir.

O halde $z = 2.i$ karmaşık sayısının kutupsal şekli

$$z = 2.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4.\text{cis}\frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

Örnek:

$z = 4$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

Çözüm:

$z = 4$ karmaşık sayısının modülü, $|z| = \sqrt{4^2} = 4$ tür.

z karmaşık sayısının reel kısmı 4 ve sanal (imajiner) kısmı 0 olduğu için, bu sayı reel eksenin pozitif tarafı üzerinde bulunur. Dolayısıyla esas argümenti 0^o dir.

O halde $z = 4$ karmaşık sayısının kutupsal şekli

$$z = 2.\left(\cos 0^o + i.\sin 0^o\right) = 4.\text{cis}0^o \text{ olur.}$$

Örnek:

$z = -16$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

Çözüm:

$z = -16$ karmaşık sayısının modülü, $|z| = \sqrt{(-16)^2} = 16$ dır.

z karmaşık sayısının reel kısmı -16 ve sanal (imajiner) kısmı 0 olduğu için, bu sayı reel eksenin negatif tarafı üzerinde bulunur. Dolayısıyla esas argümenti 180^o dir.

O halde $z = -16$ karmaşık sayısının kutupsal şekli

$$z = 16.\left(\cos\pi + i.\sin\pi\right) = 4.\text{cis}\pi \text{ olur.}$$

C. Kutupsal Biçimdeki Karmaşık Sayılarla Çarpma İşlemi

$z_1 = |z_1|.\left(\cos\theta + i.\sin\theta\right)$ ve $z_2 = |z_2|.\left(\cos\alpha + i.\sin\alpha\right)$ karmaşık sayıları verilmiş olsun.

Bunların çarpımı;

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.[\cos(\theta+\alpha) + i.\sin(\theta+\alpha)] \text{ dir.}$$

Buna göre $z_1.z_2$ çarpımında

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ ve

$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta + \alpha$ dır.

O halde kutupsal koordinatlar ile verilen $z_1 = (r_1, \theta)$ ve $z_2 = (r_2, \alpha)$ karmaşık sayıları için $z_1.z_2 = (r_1.r_2, \theta+\alpha)$ dır.

İki karmaşık sayının çarpımının modülü, modüller çarpımına ve çarpımının argümenti, argümentler toplamına eşittir.

Örnek:

$z_1 = 2.(\cos 20^o + i.\sin 20^o)$ ve $z_2 = 3.(\cos 40^o + i.\sin 40^o)$ olmak üzere $z_1.z_2$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = 2.3 = 6$ ve

$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = 20^o + 40^o = 60^o$ olup

$z_1.z_2 = 6.[\cos 60^o + i.\sin 60^o]$ bulunur.

Bu çarpımı standart biçimde yazarsak;

$$z_1.z_2 = 6.[\cos 60^o + i.\sin 60^o] = 6.\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i\right)$$

$$= 3 + 3\sqrt{3}.i \text{ olur.}$$

Örnek:

$z_1 = 5\sqrt{2}.(\cos 135^o + i.\sin 135^o)$ ve

$z_2 = \sqrt{2}.(\cos 15^o + i.\sin 15^o)$ olmak üzere $z_1.z_2$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = 5\sqrt{2}.\sqrt{2} = 10$

$\arg(z_1.z_2) = 135^o + 15^o = 150^o$

$z_1.z_2 = 10.[\cos 150^o + i.\sin 150^o]$

$$= 10.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i\right) = -5\sqrt{3} + 5.i \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ olduğuna göre

$z^2 = r^2.(\cos 2\theta + i.\sin 2\theta)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$z^2 = z.z = r.r.[\cos(\theta+\theta) + i.\sin(\theta+\theta)]$$

$$= r^2.(\cos 2\theta + i.\sin 2\theta)$$

Örnek:

$z = 4cis72^o$ ve $w = 5cis18^o$ olmak üzere $z.w$ karmaşık sayısını standart biçimde yazalım.

Çözüm:

$|z.w| = |z|.|w| = 4.5 = 20$

$\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) = 72^o + 18^o = 90^o$

$z.w = 20.(\cos 90^o + i.\sin 90^o) = 20.(0 + i.1) = 20.i$ olur.

D. De Moivre Formülü

$\forall n \in Z$ için $(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i.\sin\theta)$ dır.

Bu eşitliğe De Moivre formülü denir.

$z = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ olması durumunda De Moivre formülünden dolayı

$\forall n \in Z$ için $z^n = |z|^n.(\cos n\theta + i.\sin n\theta)$ elde edilir.

Örnek:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{76}$ karmaşık sayısını $a + b.i$ şeklinde yazalım.

Çözüm:

De Moivre formülü kullanılarak,

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{76} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right)^{76}$$

$$= \cos\left(76.\frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(76.\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{6} + 6.2\pi\right) + i.\sin\left(\frac{4\pi}{6} + 6.2\pi\right)$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i$$

Örnek:

$z = \cos 45^o + i.\sin 45^o$ ise z^6 değerini bulalım.

Çözüm:

$$z^6 = \left(\cos 45^o + i.\sin 45^o\right)^6 = \cos\left(6.45^o\right) + i.\sin\left(6.45^o\right)$$

$$= \cos 270^o + i.\sin 270^o = 0 + i.(-1) = -i \text{ bulunur.}$$

E. Kutupsal Biçimdeki Karmaşık Sayılarla Bölme İşlemi

$z_1 = |z_1|.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ ve $z_2 = |z_2|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$ karmaşık sayıları verilmiş olsun.

Bunların bölümü;

$$z_1.z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}.\left[\cos(\theta - \alpha) + i.\sin(\theta - \alpha)\right] \text{ dır.}$$

Buna göre $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünde $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ve

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta - \alpha \text{ dır.}$$

O halde kutupsal koordinatlar ile verilen $z_1 = (r_1, \theta)$ ve $z_2 = (r_2, \alpha)$ karmaşık sayıları için $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \theta - \alpha\right)$ dır.

İki karmaşık sayının bölümünün modülü, modüller bölümüne ve bölümünün argümenti, argümentler farkına eşittir.

Örnek:

$z_1 = 12.(\cos 54^o + i.\sin 54^o)$ ve $z_2 = 2.(\cos 24^o + i.\sin 24^o)$ olmak üzere $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünü bulalım.

Çözüm:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{12}{2} = 6,$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = 54^o - 24^o = 30^o \text{ dir.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 6.\left[\cos 30^o + i.\sin 30^o\right] = 6.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right] = 3\sqrt{3} + 3i$$

Örnek:

$z_1 = 4.\left(\cos 210^o + i.\sin 210^o\right)$ ve

$z_2 = 4.\left(\cos 45^o + i.\sin 45^o\right)$ olmak üzere $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünü bulalım.

Çözüm:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = 210^o - 45^o = 165^o \text{ dir.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos 165^o + i.\sin 165^o \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$z = |z|.\left(\cos\theta + i.\sin\theta\right)$ olmak üzere $z^{-1} = \frac{1}{z}$ karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazalım

Çözüm:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1.\left(\cos 0^o + i.\sin 0^o\right)}{|z|.\left(\cos\theta + i.\sin\theta\right)}$$

$$= \frac{|1|}{|z|}.\left(\cos\left(0-\theta\right) + i.\sin\left(0-\theta\right)\right)$$

$$= \frac{1}{|z|}.\left(\cos\left(-\theta\right) + i.\sin\left(-\theta\right)\right)$$

$z = |z|.\left(\cos\theta + i.\sin\theta\right)$ için

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}.\left(\cos\left(-\theta\right) + i.\sin\left(-\theta\right)\right) \text{ dir.}$$

$\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$ ve $\mathrm{Arg}\left(z^{-1}\right) = -\mathrm{Arg}\left(z\right)$ dir.

Örnek:

$z = 2.\left(\cos 60^o + i.\sin 60^o\right)$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersini bulalım.

Çözüm:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2.(\cos 60^o + i.\sin 60^o)}$$

$$= \frac{1.(\cos 60^o - i.\sin 60^o)}{2.(\cos^2 60^o + \sin^2 60^o)} \text{ olup .}$$

$\cos 60^o = \cos(-60^o)$ olduğundan

$$z^{-1} = \frac{1.\left(\cos(-60^o) + i.\sin(-60^o)\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\cos(360^o - 60^o) + i.\sin(360^o - 60^o)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\cos 300^o + i.\sin 300^o\right]$$

Örnek:

$z = 20.\left(\cos 19^o + i.\sin 19^o\right)$ ve $w = 5.\left(\cos 71^o + i.\sin 71^o\right)$ olduğuna göre $\frac{z}{w}$ bölümünü bulalım.

Çözüm:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{20}{5} = 4 \text{ tür.}$$

$$\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w) = 19^o - 71^o = -52^o = 308^o$$

$$\frac{z}{w}=4.\left(\cos 308^{o}+i.\sin 308^{o}\right)=4cis308^{o}$$

Örnek:

$z=\dfrac{3i}{5.(\cos 20^{o}+i.\sin 20^{o})}$ karmaşık sayısının esas argümentini bulalım.

Çözüm:

$$z=\frac{3.(\cos 90^{o}+i.\sin 90^{o})}{5.(\cos 20^{o}+i.\sin 20^{o})}=\frac{3}{5}.\left(\cos 70^{o}+i.\sin 70^{o}\right) \text{ olur.}$$

O halde z karmaşık sayısının esas argümenti 70^{o} dir.

Örnek:

$z=5.\left(\cos 10^{o}+i.\sin 10^{o}\right)$ olduğuna göre z^{3} ün kutupsal koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

$$z^{3}=5^{3}.\left(\cos(3.10^{o})+i.\sin(3.10^{o})\right)$$

$$=125.\left(\cos 30^{o}+i.\sin 30^{o}\right) \text{ olur.}$$

Buna göre z^{3} ün kutupsal koordinatları $\left(125,30^{o}\right)$ dir.

Örnek:

$z=-1+\sqrt{3}.i$ olduğuna göre z^{100} ü standart biçimde gösterelim.

Çözüm:

$$|z|=\sqrt{(-1)^{2}+(\sqrt{3})^{2}}=\sqrt{4}=2 \text{ dir.}$$

z karmaşık sayısının reel kısmı negatif, imajiner kısmı pozitif olduğundan bu sayı komplex düzlemde ikinci bölgededir. Bu durumda z karmaşık sayısının esas argümenti $\left(90^{o},180^{o}\right)$ aralığındadır.

z nin esas argümenti θ olsun.

Buna göre,

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}=\tan 120^{o} \text{ olup } \theta=120^{o} \text{ bulunur.}$$

Buna göre z nin kutupsal gösterimi,

$$z=2.\left(\cos 120^{o}+i.\sin 120^{o}\right) \text{ dir.}$$

$$z^{100}=2^{100}.\left(\cos(100.120^{o})+i.\sin(100.120^{o})\right)$$

$$=2^{100}.\left(\cos 12000^{o}+i.\sin 12000^{o}\right)$$

$$=2^{100}.\left(\cos 120^{o}+i.\sin 120^{o}\right)$$

$$=2^{100}.\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i\right)=-2^{99}+2^{99}\sqrt{3}.i$$

12000^{o} nin esas ölçüsü 120^{o} olduğundan 12000^{o} yerine 120^{o} yazıldı.

Örnek:

$z=5.\left(\cos 12^{o}+i.\sin 12^{o}\right)$ sayısının çarpma işlemine göre tersinin esas argümenti kaç derecedir?

Çözüm:

z karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi z^{-1} dir.

Buna göre,

$$z^{-1}=\left[5.\left(\cos 12^{o}+i.\sin 12^{o}\right)\right]^{-1}$$

$$=5^{-1}\left[\cos\left(-1.12^{o}\right)+i.\sin\left(-1.12^{o}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}.\left[\cos\left(-12^{o}\right)+i.\sin\left(-12^{o}\right)\right]$$

$= \frac{1}{5}.\left(\cos 348^{o} + i.\sin 348^{o}\right)$ olur.

Burada -12^{o} nin esas ölçüsü 348^{o} olduğu için -12^{o} yerine 348^{o} yazıldı.

Buna göre z^{-1} nin esas argümenti 348^{o} dir.

Sonuç

$z = r.cis\theta$ olmak üzere $z^{-1} = \frac{1}{r}.cis(2\pi - \theta)$ dir.

Örnek:

$z = 2.\left(\cos 70^{o} + i.\sin 70^{o}\right)$ karmaşık sayısının eşleniğinin kutupsal koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

$z = 2.\left(\cos 70^{o} + i.\sin 70^{o}\right)$ ise

$\bar{z} = 2.\left(\cos 70^{o} - i.\sin 70^{o}\right)$

$= 2.\left(\cos(-70) + i.\sin(-70)\right)$

$= 2.\left(\cos 290^{o} + i.\sin 290^{o}\right)$

olduğuna göre $\bar{z}$ nin kutupsal koordinatları $\left(2, 290^{o}\right)$

Sonuç

$z = r.cis\theta$ olmak üzere $\bar{z} = r.cis(2\pi - \theta)$ dır. Buna göre, bir karmaşık sayının esas argümentinin ölçüsü raydan türünden θ ise, bu karmaşık sayının eşleniğinin esas argümenti $2\pi - \theta$ dır.

Örnek:

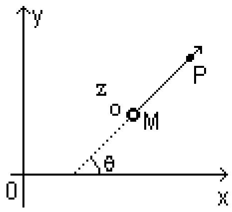
$z = 2.cis\frac{\pi}{5}$ karmaşık sayısının eşleniğinin kutupsal koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

$\bar{z} = 2.cis\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = 2.cis\frac{9\pi}{5}$ olur.

Kural

$z_0 = a + b.i$ karmaşık sayısının komplex düzlemdeki görüntüsü $M(a,b)$ noktası olsun.



$\arg(z - z_0) = \theta$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsü MP yarı doğrusudur.

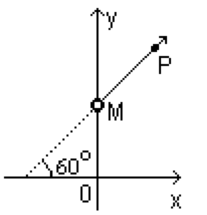
Örnek:

$z = x + y.i$ olmak üzere $\arg(z - i) = 60^{o}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsünü gösterelim.

Çözüm:

i karmaşık sayısının düzlemdeki görüntüsü $M(0,1)$ dir.

$\arg(z - i) = 60^{o}$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü MP yarı doğrusudur.



MP yarı doğrusu üzerindeki her sayı (nokta) $\arg(z - i) = 60^{o}$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayısı olabilir.

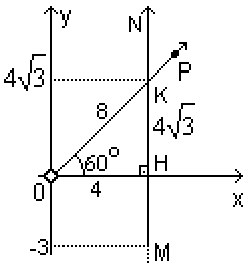
Örnek:

$z = x + y.i$ olmak üzere $\arg(z - 4 + 3i) = 90^{o}$ ve $\arg(z) = 60^{o}$ eşitliklerini sağlayan z karmaşık sayısını bulalım.

Çözüm:

$\arg(z)=60^{o}$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayıları OP yarı doğrusu üzerindeki sayılardır.

$\arg(z-4+3i)=90^{o}$ ise $\arg\left(z-(4-3i)\right)=90^{o}$ dir. Bu koşulu sağlayan z karmaşık sayıları $M(4,-3)$ olmak üzere MN yarı doğrusu üzerindeki karmaşık sayılardır.



Her iki koşulu da sağlayan z karmaşık sayısı OP yarı doğrusu ile MN yarı doğrusunun kesiştiği noktadır. Bu noktayı OHK dik üçgeninden buluruz. Buna göre $K\left(4,4\sqrt{3}\right)$ tür.

Bu durumda $z=4+4\sqrt{3}.i$ dir.

F. Orijin Etrafında Döndürme

$z=r.\text{cis}\theta$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde α kadar döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı,

$w=r.\text{cis}\left(\theta+\alpha\right)$ olur.

Bu durumda $w=z.\left(\cos\alpha+i.\sin\alpha\right)$ diyebiliriz.

Örnek:

$z=17.\left(\cos35^{o}+i.\sin35^{o}\right)$ sayısının orijin etrafında 70^{o} döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayıyı bulalım.

Çözüm:

$z=17.\left(\cos35^{o}+i.\sin35^{o}\right)$ sayısının orijin etrafında pozitif yönde 70^{o} döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı,

$w=17.\left(\cos\left(35^{o}+70^{o}\right)+i.\sin\left(35^{o}+70^{o}\right)\right)$

$=17.\left(\cos105^{o}+i.\sin105^{o}\right)$

$=17.\text{cis}105^{o}$

Örnek:

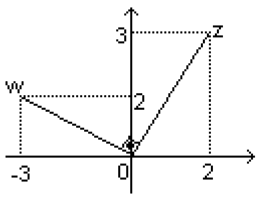
$z=2+3.i$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde 90^{o} döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı w olduğuna göre z ve w karmaşık sayılarını komplex düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$z=2+3.i$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde 90^{o} döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı,

$w=z.\left(\cos90^{o}+i.\sin90^{o}\right)=\left(2+3i\right).\left(0+i\right)$

$=2i+3i^{2}=-3+2i$



Örnek:

$z=9.\left(\cos25^{o}+i.\sin25^{o}\right)$ karmaşık sayısının orijin etrafında negatif yönde 10^{o} döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayıyı bulalım.

Çözüm:

$z=9.\left(\cos25^{o}+i.\sin25^{o}\right)$ karmaşık sayısı orijin etrafında negatif yönde 10^{o} döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı,

$w=9.\left(\cos\left(25^{o}-10^{o}\right)+i.\sin\left(25^{o}-10^{o}\right)\right)$

$=9.\left(\cos15^{o}+i.\sin15^{o}\right)=9.\text{cis}15^{o}$

III. Bir Karmaşık Sayının Kökleri

u ve z birer kompleks sayı ve $n\in N^{+}$ olmak şartıyla

$z^n = u$ denklemini sağlayan z karmaşık sayısına u karmaşık sayısının n inci kuvvetten kökü denir.

$z = \sqrt[n]{u}$ ise $z^n = u$ dur.

Örnek:

$z^2 = 5 - 12.i$ denkleminin köklerini bulalım.

Çözüm:

$z = x + y.i$ olsun.

$z^2 = 5 - 12.i$ ise,

$(x + y.i)^2 = 5 - 12.i \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2.i^2 = 5 - 12i$

$\Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = 5 - 12i$

Karmaşık sayıların eşitliğinden,

$x^2 - y^2 = 5$ ve $xy = -6$ olmalıdır.

Bu eşitlikler değerlendirilerek,

[$x = 3$ ve $y = -2$] veya [$x = -3$ ve $y = 2$] olması

gerektiği bulunur.

Buna göre, $z = 3 - 2i$ veya $z = -3 + 2i$ olur.

Sonuç

$z^2 = w$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları toplama işlemine göre birbirinin tersidirler.

Yani $z^2 = w$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları, z_1 ve z_2 ise $z_1 = -z_2$ dir.

Örnek:

$z^2 = 6 - 8.i$ denkleminin köklerinden biri $-\sqrt{2} + \sqrt{2}.i$, diğeri $-\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}.i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}.i$ dir.

Kural

$w = r.\left(\cos\theta + i.\sin\theta\right)$

$= r.\left(\cos\left(\theta + k.2\pi\right) + i.\sin\left(\theta + k.2\pi\right)\right)$

bir karmaşık sayı ve $n \in N^+$ olmak şartıyla $z^n = w$ denkleminin kökleri aşağıdaki eşitliği sağlayan z_k sayısında k yerine, 0,1,2,…,(n-1) yazılarak bulunur.

$$z_k = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\left(\frac{\theta + k.2\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta + k.2\pi}{n}\right)\right] \text{ dir.}$$

Örnek:

$z^2 = 9.cis50^o$ denkleminin köklerini bulalım.

Çözüm:

$$z_k = \sqrt{9}.cis\left(\frac{50^o + k.2\pi}{2}\right)$$

$$z_k = 3.cis\left(25^o + k.180^o\right)$$

Bu eşitlikte k yerine 0 ile 1 yazıldığında,

$z^2 = 9.cis50^o$ denkleminin kökleri,

$z_0 = 3.cis\left(25^o + 0.180^o\right) = 3.cis25^o$

$z_1 = 3.cis\left(25^o + 1.180^o\right) = 3.cis205^o$ bulunur.

Örnek:

$z = 4.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$ karmaşık sayısının kareköklerini bulalım.

Çözüm:

$$z_o = \sqrt{4}.\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+0.2\pi}{2} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{3}+0.2\pi}{2} \right)$$

$$= 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = \sqrt{4}.\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+1.2\pi}{2} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{3}+1.2\pi}{2} \right)$$

$$= 2.\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) \right)$$

$$= 2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$

Örnek:

$z = -3$ karmaşık sayısının kareköklerini bulalım.

Çözüm:

$z = -3 = -3 + 0.i$ ise $z^{\frac{1}{2}} = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ olup,

$z_0 = \sqrt{-3} = \sqrt{3}.i$

$z_1 = -z_0 = -\sqrt{3}i$ bulunur.

Örnek:

$z = i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulalım.

Çözüm:

$z = i = 1.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2} \right)$ olur.

$$z_o = \sqrt{1}.\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0.2\pi}{2} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0.2\pi}{2} \right)$$

$$= 1.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \sqrt{1}.\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+1.2\pi}{2} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{2}+1.2\pi}{2} \right)$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Örnek:

$z^2 = 1 + i$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$1 + i = \sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4} \right)$ olup

$z^2 = |z|^2.(\cos 2\theta + i.\sin 2\theta)$ dır.

Buradan

$|z|^2.(\cos 2\theta + i.\sin 2\theta) = \sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4} \right)$ olup

Bu eşitlikten,

$$\Rightarrow |z|^2 = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt[4]{2} \text{ ve}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ olur.}$$

k = 0 ve k = 1 değerlerini alır. Diğer değerler için aynıdır.

k = 0 için; $\theta = \frac{\pi}{8}$ olup $z_o = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i.\sin\frac{\pi}{8}\right)$,

k = 1 için; $\theta = \frac{9\pi}{8}$ olup $z_o = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i.\sin\frac{9\pi}{8}\right)$

bulunur.

Örnek:

$z = 8$ sayısının küpköklerini bulalım

$z = 8 = 8.\left(\cos 0^o + i.\sin 0^o\right)$ olduğundan bu sayının küp kökleri

Çözüm:

$$z_0 = \sqrt[3]{8}.\left(\cos\frac{0^o + 0.2\pi}{3} + i.\sin\frac{0^o + 0.2\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\left(\cos 0^o + i.\sin 0^0\right) = 2 \ ,$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}.\left(\cos\frac{0^o + 1.2\pi}{3} + i.\sin\frac{0^o + 1.2\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i \ ,$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}.\left(\cos\frac{0^o + 2.2\pi}{3} + i.\sin\frac{0^o + 2.2\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

Çözümlü Sorular

1. $i^2 = -1$ olmak üzere $\sqrt{-5}.\sqrt{3}.\sqrt{-15}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$\sqrt{-5}.\sqrt{3}.\sqrt{-15}$ ifadesi reel sayılarda tanımsızdır. Ancak komplex sayılarda sonucunu bulabiliriz.

$$\sqrt{-5}.\sqrt{3}.\sqrt{-15} = \sqrt{5.(-1)}.\sqrt{3}.\sqrt{5.3.(-1)}$$

$$= \sqrt{5}.i.\sqrt{3}.\sqrt{5}.\sqrt{3}.i$$

$$= 5.3.i^2 = -15$$

2. $i^2 = -1$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere

$\dfrac{i^{4n+3} - i^{8n-1}}{i^{2-16n}}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

$i^2 = -1$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

$4n + 3$ ün 4 ile bölümünden kalan 3 tür.

Bu nedenle $i^{4n+3} = i^3 = -i$ dir.

$8n - 1$ in 4 ile bölümünden kalan -1 dir. -1 de mod 4 te 3 e denktir.

Bu nedenle $i^{8n-1} = i^{-1} = i^{3} = -i$ dir.

$2-16n$ in 4 ile bölümünden kalan 2 dir.

Bu nedenle $i^{2-16n} = i^{2} = -1$ dir.

O halde, $\dfrac{i^{4n+3} - i^{8n-1}}{i^{2-16n}} = \dfrac{-i-(-i)}{-1} = 0$ bulunur.

3. $i^2 = -1$ olmak üzere $\left(\bar{z}+1\right).\left(1+i\right)+z = 8+4i$ olduğuna göre $\mathrm{Re}(z).\mathrm{İm}(z)$ kaçtır?

Çözüm:

$i^2 = -1$ olmak üzere $z = x + y.i$ olsun.

$\left(\bar{z}+1\right).\left(1+i\right)+z = 8+4i$ ise,

$\Rightarrow \bar{z} + \bar{z}.i + 1 + i + z = 8+4i$

$\Rightarrow \left(x-y.i\right) + \left(x-y.i\right).i + 1 + i + x + yi = 8+4i$

$\Rightarrow 2x + x.i - y.i^2 + 1 + i = 8+4i$

$\Rightarrow \left(2x+y+1\right) + \left(x+1\right).i = 8+4i$

$\Rightarrow x+1 = 4 \quad$ ve $\quad 2x+y = 7$

$\Rightarrow x = 3 \quad$ ve $\quad y = 1$ bulunur.

O halde

$z = x + y.i = 3 + i$ dir.

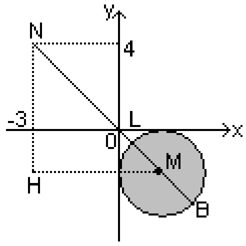
$\mathrm{Re}(z).\mathrm{İm}(z) = 3.1 = 3$ olarak bulunur.

4. $i^2 = -1$ ve $z = x + y.i$ olmak üzere $\left|z-1+i\right| \le 1$ olduğuna göre $\left|z+3-4i\right|$ nin alabileceği en büyük değer kaç birimdir?

Çözüm:

$\left|z-1+i\right| \le 1$ eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayıları merkezi $M\left(1,-1\right)$ ve yarıçapı 1 birim olan çemberin üzerindeki noktalar veya bu çemberin iç bölgesindeki noktalardır.

$\left|z+3-4i\right| = \left|z-\left(-3+4i\right)\right|$ ifadesi, z karmaşık sayıları ile $-3+4i$ sayısı arasındaki uzaklığı ifade eder.



Yandaki şekil verilen koşullara uygun olarak çizilmiştir.
NHM dik üçgeninde pisagor teoreminden,

$\left|NM\right|^2 = \left|NH\right|^2 + \left|HM\right|^2$

$\left|NM\right|^2 = 5^2 + 4^2 = 41$

$\Rightarrow \left|NM\right| = \sqrt{41}$ dir.

$\left|z-1+i\right| \le 1$ koşulunu sağlayan karmaşık sayılardan;

N noktasına en yakın olan M merkezli çember üzerindeki L noktası, N noktasına en uzak olan M merkezli çember üzerindeki B noktasıdır. $\left|MB\right| = 1$ br.

$\left|NB\right| = \left|NM\right| + \left|MB\right| = \sqrt{41} + 1$ dir.

Bu soruyu iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kullanarak çözelim; $N\left(-3,4\right)$ ve $M\left(1,-1\right)$ olmak üzere,

$\left|NM\right| + \left|MB\right| = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-(-1))^2} + 1 = \sqrt{41} + 1$ dir.

5. $i^2 = -1$ olmak üzere $z = \dfrac{(1+i)^5 + i}{1-i}$ olduğuna göre $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{İm}(z)$ kaçtır?

Çözüm:

$\left(1+i\right)^2 = (1+i).(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 2i$ ve

$\left(1+i\right)^5 = \left[(1+i)^2\right]^2.(1+i) = 4i^2.(1+i) = -4-4i$

olduğuna göre,

$z = \dfrac{(1+i)^5 + i}{1-i} = \dfrac{-4-4i+i}{1-i} = \dfrac{(-4-3i).(1+i)}{(1-i).(1+i)}$

$$= \frac{-4-4i-3i-3i^2}{1+i-i-1^2} = \frac{-1-7i}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$$

$Re(z) - İm(z) = -\frac{1}{2}+\frac{7}{2} = 3$ bulunur.

6. $i^2 = -1$ olmak üzere $x^3 - (3+i).x^2 + 2.(k+i).x = 0$ denkleminin köklerinden biri $1+i$ olduğuna göre k reel sayısı kaçtır?

Çözüm:

$(1+i)^2 = (1+i).(1+i) = 1+2i+i^2 = 2i$ ve

$(1+i)^3 = (1+i)^2.(1+i) = 2i.(1+i) = -2+2i$ dir.

$x^3 - (3+i).x^2 + 2.(k+i).x = 0$ denkleminin köklerinden biri $1+i$ olduğuna göre, bu kök denklemi sağlar.

Buna göre,

$x^3 - (3+i).x^2 + 2.(k+i).x = 0$ ise,

$(1+i)^3 - (3+i).(1+i)^2 + 2.(k+i).(1+i) = 0$

$-2+2i-(3+i).2i+2.(k+i).(1+i) = 0$

$-2+2i-6i-2i^2+2k+2k.i+2i+2i^2 = 0$

$-2i+2k+2k.i-2 = 0$

$(2k-2)i+2k-2 = 0+0.i$

$k = 1$ bulunur.

7. $i^2 = -1$ olmak üzere $1 < \left|\frac{z-1-i}{i}\right| \le 3$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$i^2 = -1$ ve $z = x+y.i$ olmak üzere $1 < \left|\frac{z-1-i}{i}\right| \le 3$ ise,

$$1 < \frac{|z-1-i|}{|i|} \le 3 \Rightarrow 1 < \frac{|x+y.i-1-i|}{1} \le 3$$

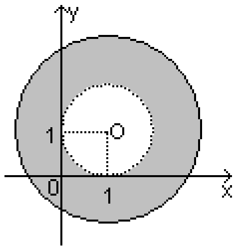
$\Rightarrow 1 < |(x-1)+(y-1).i| \le 3$

$\Rightarrow 1 < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \le 3$

$\Rightarrow 1^2 < (x-1)^2+(y-1)^2 \le 3^2$ dir.

$(x-1)^2+(y-1)^2 > 1^2$ eşitsizliğini merkezi $O(1,1)$ ve yarıçapı 1 br olan çemberin dış bölgesindeki sayılar (noktalar) sağlar.

$(x-1)^2+(y-1)^2 \le 3^2$ eşitsizliğini merkezi $O(1,1)$ ve yarıçapı 3 br olan çemberin üstündeki noktalar ile bu çemberin iç bölgesinde bulunan sayılar (noktalar) sağlar.



Buna göre yanda taranmış olarak gösterilen bölgedeki sayılar verilen eşitsizliği sağlar.

8. $i^2 = -1$ olmak üzere, köklerinden biri $4+i$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm:

$i^2 = -1$ olmak üzere, köklerinden biri $4+i$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklemin diğer kökü $4+i$ nin eşleniği olan $4-i$ dir.

Kökleri $4+i$ ve $4-i$ olan ikinci dereceden denklem,

$[x-(4+i)].[x-(4-i)] = 0$

$[x-4-i].[x-4+i] = 0$

$x^2 - 4x + x.i - 4x + 16 - 4i - x.i + 4i - i^2 = 0$

$x^2 - 8x + 17 = 0$ olarak bulunur.

9. $i^2 = -1$ ve $x \in R$ olmak üzere, $z = 1 + (x+1).i$, $|\overline{-z + i.z}| = 2\sqrt{13}$ olduğuna göre, x in alabileceği değerlerden küçük olanı kaçtır?

Çözüm:

$z = 1 + (x+1).i$ ve $|\overline{-z + i.z}| = 2\sqrt{13}$ eşitlikleri verilmiştir.

Bir karmaşık sayının eşleniğinin mutlak değeri, o karmaşık sayının mutlak değerine eşittir. Buna göre,

$|\overline{-z + i.z}| = |-z + i.z|$ dir.

Bir karmaşık sayının toplama işlemine göre tersinin mutlak değeri, o karmaşık sayının mutlak değerine eşittir. Buna göre,

$|-z + i.z| = |z - i.z|$ dir.

Bu durumda,

$|\overline{-z + i.z}| = 2\sqrt{13}$

$|z - i.z| = 2\sqrt{13} \Rightarrow |z.(1-i)| = 2\sqrt{13} \Rightarrow |z|.|1-i| = 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow |z|.\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{13} \Rightarrow |z|.\sqrt{2} = 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{26} \Rightarrow |1 + (x+1).i| = \sqrt{26}$

$\Rightarrow \sqrt{1^2 + (x+1)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow 1 + (x+1)^2 = 26$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 25 \Rightarrow x + 1 = 5$ veya $x + 1 = -5$

$\Rightarrow x = 4$ veya $x = -6$ olur.

x in alabileceği değerlerden küçük olanı -6 dır.

10. $i^2 = -1$ olmak üzere, $z.\bar{z} + |z| - 30 = 0$ olduğuna göre $[Re(z)]^2 + [İm(z)]^2$ kaçtır?

Çözüm:

$i^2 = -1$ olmak üzere, $z = x + y.i$ olsun.

$z.\bar{z} = (x + y.i).(x - y.i) = x^2 + y^2 = |z|^2$ dir.

$z.\bar{z} + |z| - 30 = 0 \Rightarrow |z|^2 + |z| - 30 = 0$

$\Rightarrow (|z| + 6).(|z| - 5) = 0 \Rightarrow |z| = -6$ veya $|z| = 5$ tir.

Ancak $|z| = -6$ olamayacağından $|z| = 5$ tir.

$|z| = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

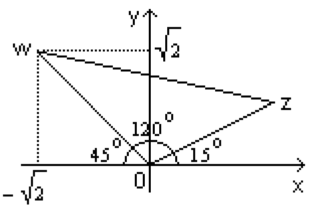
$[Re(z)]^2 + [İm(z)]^2 = 25$ bulunur.

11. $i^2 = -1$ olmak üzere, $z = 2.cis15^o$ ve $w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}.i$ olduğuna göre z ile w karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözüm:

$u = r.cis\theta$ biçiminde verilen u karmaşık sayısının orjine uzaklığı (modülü) r dir. u karmaşık sayısını orjine birleştiren doğru parçasının x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı θ dır.

$z = 2.cis15^o$ ve $w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}.i$ karmaşık sayılarını komplex düzlemde gösterelim.



$|Oz| = 2$ br.

$|Ow| = 2$ br.

$m(w\hat{O}z) = 120^o$ ve

$|wz| = x$ br. olsun.

x in değerini, wOz ikizkenar üçgeninde, ikizkenar üçgen özelliklerini kullanarak bulabiliriz. Biz kosinüs teoremini kullanarak bulacağız.

wOz ikizkenar üçgeninde kosinüs teoreminden,

$|wz|^2 = |Ow|^2 + |Oz|^2 - 2.|Ow|.|Oz|.\cos 120^o$

$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2.2.2.\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 4 + 4 = 12$

$x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ bulunur.

12. $i^2 = -1$ olmak üzere, $z = 3.(\sin 66^o + i.\cos 66^o)$, $u = 2.(\cos 56^o - i.\sin 236^o)$, $w = cis 2^o$ karmaşık sayıları veriliyor. $T = \frac{z.u}{w}$ olduğuna göre T karmaşık sayısının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

Sorunun cevabını bulmamız için önümüzdeki ilk engel karmaşık sayıların kutupsal gösterimlerinin standart olmayışıdır.

Bu durumda verilen sayıları $r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ formuna getirmeliyiz.

$\sin 66^o = \cos(90^o - 66^o) = \cos 24^o$ dir.

$\cos in 66^o = \sin(90^o - 66^o) = \sin 24^o$ dir.

$$-\sin 236^o = \sin(-236^o) = \sin(360^o - 236^o)$$
$$= \sin 124^o = \sin(180^o - 124^o)$$
$$= \sin 56^o$$

Buna göre,

$z = 3.(\sin 66^o + i.\cos 66^o) = 3.(\cos 24^o + i.\sin 24^o)$

$u = 2.(\cos 56^o - i.\sin 236^o) = 2.(\cos 56^o + i.\sin 56^o)$

$w = \cos 2^o + i.\sin 2^o = 1.(\cos 2^o + i.\sin 2^o)$ olur.

$T = \frac{z.u}{w}$ ise $|T| = \left|\frac{z.u}{w}\right| = \frac{|z|.|u|}{|w|} = \frac{3.2}{1} = 6$ dır.

$$\arg(T) = \arg\left(\frac{z.u}{w}\right) = \arg(z.u) - \arg(w)$$
$$= \arg(z) + \arg(u) - \arg(w)$$
$$= 24^o + 56^o - 2^o = 78^o$$

O halde T karmaşık sayısının kutupsal koordinatları,

$\left(|T|, \arg(T)\right) = \left(6, 78^o\right)$ olarak bulunur.

13. $i^2 = -1$ olmak üzere, $z^2 = 4i$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm:

$z^2 = 4i = 0 + 4.i = 4.(\cos 90^o + \sin 90^o)$ olup

$$z_k = \sqrt{4}.cis\left(\frac{90^o + k.2\pi}{2}\right)$$

$$z_k = 2.cis\left(45^o + k.180^o\right)$$

Bu eşitlikte k yerine 0 ile 1 yazıldığında,

$z^2 = 4i$ denkleminin kökleri,

$$z_0 = 2.cis\left(45^o + 0.180^o\right) = 2.cis 45^o$$
$$= 2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}.i$$

$$z_1 = 2.cis\left(45^o + 1.180^o\right) = 2.cis 225^o$$
$$= 2.\left(-\cos 45^o - i.\sin 45^o\right)$$
$$= 2.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.i\right)$$
$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}.i \text{ bulunur.}$$

14. $i^2 = -1$ olmak üzere, $z^2 = 5 + 8i$ denkleminin kökleri oranı kaçtır?

Çözüm:

$z^2 = w$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları z_1 ve z_2 ise, $z_1 = -z_2$ dir.

Bu durumda $z^2 = 5 + 8i$ denkleminin kökleri oranı -1 dir.

15. $i^2 = -1$ olmak üzere, $z^3 = 8i$ denkleminin köklerini köşe kabul eden üçgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:

$z^3 = 8i \Rightarrow z^3 = 8.(\cos 90^o + i.\sin 90^o)$ dir.

Bu durumda,

$$z_k = \sqrt[3]{8}.\left[\cos\left(\frac{90^o + k.2\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{90^o + k.2\pi}{n}\right)\right]$$

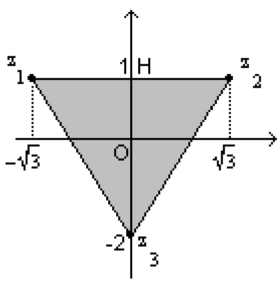
$$z_k = 2.\left[\cos\left(30^o + k.120^o\right) + i.\sin\left(30^o + k.120^o\right)\right] \text{ dir.}$$

$$z_k = 2.\left[\cos\left(30^o + k.120^o\right) + i.\sin\left(30^o + k.120^o\right)\right]$$

$$z_1 = 2.\left[\cos 150^o + i.\sin 150^o\right] = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2.\left[\cos 270^o + i.\sin 270^o\right] = -2i \text{ dir.}$$

Bu kökleri komplex düzlemde gösterelim.



Oluşan üçgenin taban uzunluğu $2\sqrt{3}$ birim ve yüksekliği 3 birim olduğundan, $z^3 = 8i$ denkleminin köklerini köşe kabul eden üçgenin alanı,

$$A = \frac{2\sqrt{3}.3}{2} = 3\sqrt{3} \text{ birim karedir.}$$

Konu Bitmiştir.