# TRİGONOMETRİ-4

## A. Trigonometrik Denklemler

İçinde bilinmeyenin trigonometrik fonksiyonları bulunan, bilinmeyenin bazı değerleri için doğru olan eşitliklere trigonometrik denklem denir.

Denklemi sağlayan değerlere denklemin kökleri, köklerin oluşturduğu kümeye çözüm kümesi denir.

Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de denklemi çözme denir.

**Örnek:**

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ifadesinde x yerine $30^{o}$ yazıldığında ifade doğru olur.

Ancak x yerine $60^{o}$ yazıldığında ifade yanlış olur.

Verilen eşitliği doğru kılan tek değer $30^{o}$ değildir. Başka değerler için de bu eşitlik doğru olabilir.

**Örnek:**

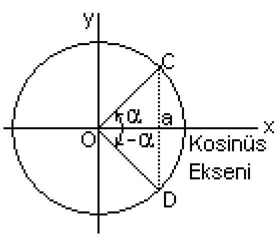
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ifadesinde x yerine hangi sayı yazılırsa yazılsın, ifade her zaman doğru olur.

**Uyarı**

Birinci örnekteki gibi bilinmeyenin bazı değerleri için doğru olan ifadelere denklem denir.
İkinci örnekteki gibi bilinmeyenin her değeri için doğru olan eşitliklere özdeşlik denir.

### 1. $\cos x = a$ Denkleminin Çözümü

Kosinüsü a olan reel sayıların birim çemberdeki görüntüleri C ve D noktaları olsun




$k \in Z$ olmak üzere

C noktasına $\alpha + k.2\pi$ ,

D noktasına $-\alpha + k.2\pi$

reel sayıları karşılık gelir.

Bu durumda, $\cos x = a$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{ x : x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = -\alpha + k.2\pi \}$ olur.

**Örnek:**

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

Kosinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan bir açı $30^{o} = \frac{\pi}{6}$ dır.

Buna göre,

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ise $x = \frac{\pi}{6}$ olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi;

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi \right\}$$

$-\frac{\pi}{6}$ nin esas ölçüsü $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ olduğundan

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \text{ veya } x = \frac{11\pi}{6} + k.2\pi \right\}$$ olur.

Dikkat edilirse kosinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan başka bir açı da

$330^{o} = \frac{11\pi}{6}$ dır.

**Örnek:**

$\cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

Kosinüsü 0 olan bir açı $90^{o} = \frac{\pi}{2}$ dir.

Buna göre, $\cos x = 0$ ise $x = \dfrac{\pi}{2}$ olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi;

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi \right\}$$

$-\dfrac{\pi}{2}$ nin esas ölçüsü $2\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$ olduğundan

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \text{ veya } x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \right\} \text{ olur.}$$

Dikkat edilirse kosinüsü 0 olan başka bir açı da

$270^{o} = \dfrac{3\pi}{2}$ dir.

**Örnek:**

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

Kosinüsü $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olan bir açı $150^{o} = \dfrac{5\pi}{6}$ dır.

Buna göre,

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ise $x = \dfrac{5\pi}{6}$ olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi;

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \text{ veya } x = -\frac{5\pi}{6} + k.2\pi \right\}$$

$-\dfrac{5\pi}{6}$ nin esas ölçüsü $2\pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ olduğundan

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \text{ veya } x = \frac{7\pi}{6} + k.2\pi \right\} \text{ olur.}$$

**Sonuç**

$\cos x = \cos\alpha$ biçimindeki denklemlerin çözüm kümesi:

$Ç = \{ x : x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = -\alpha + k.2\pi \}$ dir.

**Örnek:**

$0^{o} < x < 360^{o}$ olmak üzere $\cos(2x+4) = \cos 50^{o}$ olduğuna göre x in alabileceği değerlerin toplamı kaç derecedir?

**Çözüm:**

$k \in Z$ olmak üzere $\cos(2x+4) = \cos 50^{o}$ ise,

$2x + 4 = 50^{o} + k.360^{o}$ veya

$2x + 4 = -50^{o} + k.360^{o}$ dir.

$2x + 4 = 50^{o} + k.360^{o}$ ise;

$2x + 4 = 50^{o} + k.360^{o} \Rightarrow 2x = 46^{o} + k.360^{o}$

$\Rightarrow x = 23^{o} + k.180^{o}$ dir.

Burada k nın 0 ve 1 değeri için x in değerleri sırasıyla $23^{o}$ ve $203^{o}$ dir.

$2x + 4 = -50^{o} + k.360^{o}$ ise;

$2x + 4 = -50^{o} + k.360^{o} \Rightarrow 2x = -54^{o} + k.360^{o}$

$\Rightarrow x = -27^{o} + k.180^{o}$ dir.

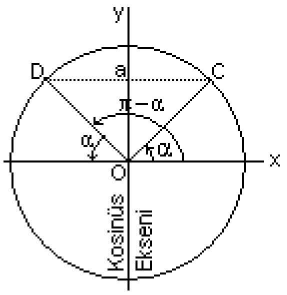
Burada k nın 1 ve 2 değeri için x in değerleri sırasıyla $153^{o}$ ve $333^{o}$ dir.

Buna göre x in alabileceği değerler toplamı

$23^{o} + 203^{o} + 153^{o} + 333^{o} = 712^{o}$ bulunur.

## 2. $\sin x = a$ Denkleminin Çözümü

Sinüsü a olan reel sayıların birim çemberdeki görüntüleri C ve D noktaları olsun




$k \in Z$ olmak üzere C noktasına $\alpha + k.2\pi$,

D noktasına $\pi - \alpha + k.2\pi$

reel sayıları karşılık gelir.

Bu durumda, $\sin x = a$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{ x : x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = \pi - \alpha + k.2\pi \}$ olur.

**Örnek:**

$\sin 3x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

Sinüsü $\frac{1}{2}$ olan bir açı $30^{o} = \frac{\pi}{6}$ dır.

Buna göre,

$\sin 3x = \frac{1}{2}$ ise $3x = \frac{\pi}{6}$ olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi;

$$Ç = \left\{ x : 3x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \ \text{V} \ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + k.2\pi \right\}$$

$$Ç = \left\{ x : 3x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \ \text{V} \ 3x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \right\}$$

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{18} + k.\frac{2\pi}{3} \ \text{V} \ x = \frac{5\pi}{18} + k.\frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$Ç = \left\{ x : x = 10^{o} + k.120^{o} \ \text{V} \ x = 50^{o} + k.120^{o} \right\} \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$\sin x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

**Çözüm:**

Sinüsü $-1$ olan bir açı $270^{o} = \frac{3\pi}{2}$ dir.

Buna göre,

$\sin x = -1$ ise $x = \frac{3\pi}{2}$ olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi;

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \ \text{V} \ x = \pi - \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \right\}$$

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \ \text{V} \ x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi \right\}$$

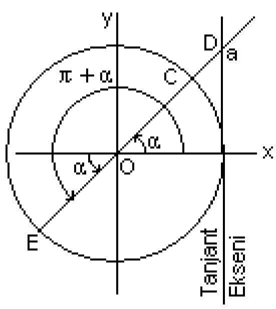
$-\frac{\pi}{2}$ nin esas ölçüsü $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ olduğundan

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \ \text{V} \ x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \right\}$$

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \right\} \text{ olur.}$$

## 3. $\tan x = a$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Tanjantı a olan reel sayıların birim çemberdeki görüntüleri C ve E noktaları olsun




$k \in Z$ olmak üzere C noktasına $\alpha + k.2\pi$,

Enoktasına $\pi + \alpha + k.2\pi$

reel sayıları karşılık gelir.

Her iki açının da tanjant eksenindeki görüntüsü D noktasıdır.

Tanjant fonksiyonunun esas periyodu $\pi$ olduğundan, $\tan x = a$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{ x : x = \alpha + k.\pi \}$ olur.

**Örnek:**

$\tan x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

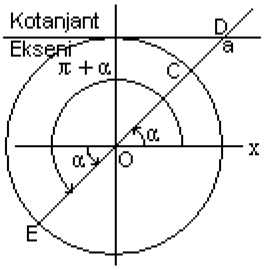
Tanjantı -1 olan bir açı $135^O = \dfrac{3\pi}{4}$ tür. Buna göre

$\tan x = -1$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{ x : x = \dfrac{3\pi}{4} + k.\pi \right\} = \left\{ x : x = 135^O + k.180^O \right\}$ olur.

### 4. $\cot x = a$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Tanjantı a olan reel sayıların birim çemberdeki görüntüleri C ve E noktaları olsun




$k \in Z$ olmak üzere C noktasına $\alpha + k.2\pi$ ,

E noktasına $\pi + \alpha + k.2\pi$

reel sayıları karşılık gelir.

Her iki açının da kotanjant eksenindeki görüntüsü D noktasıdır.

Kotanjant fonksiyonunun esas periyodu $\pi$ olduğundan, $\tan x = a$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{ x : x = \alpha + k.\pi \}$ olur.

**Örnek:**

$\cot x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

Kotanjantı -1 olan bir açı $135^O = \dfrac{3\pi}{4}$ tür. Buna göre $\cot x = -1$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{ x : x = \dfrac{3\pi}{4} + k.\pi \right\} = \left\{ x : x = 135^O + k.180^O \right\}$ olur.

**Örnek:**

$\cot 2x = \cot 40^O$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$\cot 2x = \cot 40^O$ ise $k \in Z$ olmak üzere

$2x = 40^O + k.180^O \Rightarrow x = 20^O + k.90^O$ dir.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{ x : x = 20^O + k.90^O \right\}$ dir.

**Örnek:**

$\cot 3x = -\tan x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$\cot\left(90^O + x\right) = -\tan x$ tir. Buna göre,

$\cot 3x = -\tan x \Rightarrow \cot 3x = \cot\left(90^O + x\right)$ tir.

$3x = 90^O + x + k.180^O \Rightarrow 2x = 90^O + k.180^O$

$x = 45^O + k.90^O$ olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{ x : x = 45^O + k.90^O \right\}$ dir.

**Örnek:**

$$\frac{\cot x+\dfrac{\cos^3 x+\sin^2 x.\cos^3 x}{1-\sin^4 x}-\cos x}{\sin x}=0$$ eşitliğinin çözüm kümesinin eleman sayısı kaçtır?

**Çözüm:**

$$\frac{\cot x+\dfrac{\cos^3 x+\sin^2 x.\cos^3 x}{1-\sin^4 x}-\cos x}{\sin x}=0 \ldots(*)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot x+\dfrac{\cos^3 x.\left(1+\sin^2 x\right)}{\left(1+\sin^2 x\right).\left(1-\sin^2 x\right)}-\cos x}{\sin x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cot x+\dfrac{\cos^3 x}{1-\sin^2 x}-\cos x}{\sin x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cot x+\dfrac{\cos^3 x}{\cos^2 x}-\cos x}{\sin x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cot x+\cos x-\cos x}{\sin x}=0 \Rightarrow \frac{\cot x}{\sin x}=0$$

$$\Rightarrow \cot x=0 \Rightarrow x=90^{O}+k.180^{O} \text{ dir.}$$

En başta verilen kesirlerin paydasını sıfır yapan x değeri çözüm kümesine alınmaz.

$\sin\left(90^{O}+k.180^{O}\right)$ ifadesinin değeri 1 veya -1 dir. Her iki durumda da (*) daki kesir tanımsız olur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

## 5. Kosinüs Ve Sinüse Göre Lineer Denklemler

$a, b, c$ sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere, $a.X+b.Y=c$ biçimindeki denklemlere X ve Y ye göre lineer(doğrusal) denklem denir.

Buna göre $X=\cos x$ ve $Y=\sin x$ iken,

$a.\cos x+b.\sin x=c$ biçimindeki denklemlere $\cos x$ ve $\sin x$ e göre lineer denklem denir.

Lineer denklemlerin çeşitli çözüm yöntemleri vardır.

Bunlardan bazılarını örneklerle inceleyelim.

**Örnek:**

$\sin x+\sqrt{3}.\cos x=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\sin x+\sqrt{3}.\cos x=0 \Rightarrow \sin x+\tan 60^{O}.\cos x=0$$

$$\Rightarrow \sin x+\frac{\sin 60^{O}}{\cos 60^{O}}.\cos x=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x.\cos 60^{O}+\cos x.\sin 60^{O}}{\cos 60^{O}}=0$$

$$\Rightarrow \sin x.\cos 60^{O}+\cos x.\sin 60^{O}=0$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+60^{O}\right)=0 \Rightarrow \sin\left(x+60^{O}\right)=\sin 0^{O} \text{ dir.}$$

Bu durumda k tamsayı olmak üzere,

$x+60^{O}=0^{O}+k.360^{O}$ veya

$x+60^{O}=180^{O}-0^{O}+k.360^{O}$ dir.

$x+60^{O}=0^{O}+k.360^{O} \Rightarrow x=-60^{O}+k.360^{O}$ dir.

$x+60^{O}=180^{O}-0^{O}+k.360^{O}$ ise

$x=120^{O}+k.360^{O}$ dir.

k tam sayı olmak üzere verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç=\left\{x : x=-60^{O}+k.360^{O} \text{ veya } x=120^{O}+k.360^{O}\right\}$$

bulunur.

**Örnek:**

$\sin 2x + 2.\cos 4x = \frac{3}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$\cos 4x = \cos(2.2x) = 1 - 2.\sin^2 2x$ tir.

Buna göre,

$$\sin 2x + 2.\cos 4x = \frac{3}{2}$$

$$\sin 2x + 2.\left(1 - 2.\sin^2 2x\right) = \frac{3}{2}$$

$$\sin 2x + 2 - 4.\sin^2 2x = \frac{3}{2}$$

$$2.\sin 2x + 4 - 8.\sin^2 2x = 3$$

$$8.\sin^2 2x - 2.\sin 2x - 4 = -3$$

$$8.\sin^2 2x - 2.\sin 2x - 1 = 0$$

Burada sin2x = t dersek,

$$8.t^2 - 2.t - 1 = 0 \Rightarrow (2t-1).(4t+1) = 0$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$ veya $t = -\frac{1}{4}$ bulunur.

$\Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$ veya $\sin 2x = -\frac{1}{4}$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin 30^{o}$$

$2x = 30^{o} \Rightarrow x = 15^{o}$ olabilir.

Buna göre $\sin 2x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = 30^{o} + k.360^{o} \text{ veya } x = 180^{o} - 30^{o} + k.360^{o}\right\}$$

$Ç = \left\{x : x = 30^{o} + k.360^{o} \text{ veya } x = 150^{o} + k.360^{o}\right\}$ dir.

$\sin 2x = -\frac{1}{4}$ denkleminin çözümü de aynı yolla bulunur.

**ÇÖZÜMLÜ SORULAR**

**1.** $0 \le x < 2\pi$ ise $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$ denkleminin farklı kökleri toplamı kaç raydandır?

**Çözüm:**

$\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$ ise

$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin x$ tir.

$\Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ olup,

Buradan

$$2x = \frac{\pi}{2} - x + k.2\pi \text{ veya } 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k.2\pi$$

$$2x + x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \text{ veya } 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k.2\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$$

$x = \frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{3}$ veya $x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$ dir.

$0 \le x < 2\pi$ olmak üzere,

$k = 0$ için, $x = \frac{\pi}{6}$ veya $x = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ dir.

$k=1$ için, $x=\dfrac{5\pi}{6}$ veya $x=\dfrac{3\pi}{2}$ dir.

$k=2$ için, $x=\dfrac{3\pi}{2}$ veya $x=-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{7\pi}{2}$ dir.

Fakat $\dfrac{7\pi}{2}\notin[0,2\pi)$ olduğunda çözüm değildir.

Bu durumda verilen koşulları sağlayan farklı x değerlerinin toplamı,

$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{3\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{2}$ dir.

**2.** $0\le x<2\pi$ ise $\sin 3x+\sin x=\cos x$ denkleminin kaç farklı kökü vardır?

**Çözüm:**

$\sin 3x+\sin x=\cos x$

$2.\sin\dfrac{3x+x}{2}.\cos\dfrac{3x-x}{2}=\cos x$

$2.\sin 2x.\cos x=\cos x$

$\cos x.(2.\sin 2x-1)=0$

$\cos x=0$ veya $2.\sin 2x-1=0$

$\cos x=0$ veya $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=0$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç_1=\left\{x : x=\dfrac{\pi}{2}+k.2\pi \text{ veya } x=-\dfrac{\pi}{2}+k.2\pi\right\}$

$Ç_1=\left\{x : x=\dfrac{\pi}{2}+k.2\pi \text{ veya } x=\dfrac{3\pi}{2}+k.2\pi\right\}$

$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç_2=\left\{x : 2x=\dfrac{\pi}{6}+k.2\pi \text{ veya } 2x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k.2\pi\right\}$

$Ç_2=\left\{x : x=\dfrac{\pi}{12}+k.\pi \text{ veya } x=\dfrac{5\pi}{12}+k.\pi\right\}$ olur.

$0\le x<2\pi$ olmak üzere, $k=0$ ve $k=1$ için $Ç_1$ den 2 kök, $k=0$ ve $k=1$ için $Ç_2$ den 4 kök elde edilir.

Bu durumda verilen koşullara uyan 6 tane x değeri vardır.

**3.** $0<x<45^{o}$ olmak üzere

$\cos^2 x+\cos 2x=\sin^2 x+2.\sin 2x$ olduğuna göre,

$\cos 2x$ kaçtır?

**Çözüm:**

$\cos^2 x+\cos 2x=\sin^2 x+2.\sin 2x$

$\cos^2 x-\sin^2 x+\cos 2x=2.\sin 2x$

$\cos 2x+\cos 2x=2.\sin 2x$

$2.\cos 2x=2.\sin 2x \Rightarrow \cos 2x=\sin 2x$

$\cos 2x=\cos(90^{o}-2x)$ olup,

$2x=90^{o}-2x+k.360^{o}$ veya

$2x=-(90^{o}-2x)+k.360^{o}$ (kök yok)

$2x=90^{o}-2x+k.360^{o} \Rightarrow 4x=90^{o}+k.360^{o}$

$\Rightarrow 2x=45^{o}+k.180^{o}$

$k=0$ için $2x=45^{o} \Rightarrow \cos 2x=\cos 45^{o}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

$0<x<45^{o}$ olduğundan diğer köklere bakmaya gerek yoktur.

Bu durumda, $\cos 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tir.

**4.** $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos x=0$ denkleminin kökü olan en küçük iki farklı pozitif x değerinin toplamı kaç radyandır?

**Çözüm:**

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos x=0$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos x$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) \text{ ise}$$

$$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}-x+k.2\pi \ \ldots(1) \text{ veya}$$

$$3x-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+k.2\pi \ \ldots(2) \text{ olur.}$$

$$k=0 \text{ için } 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}-x+0.2\pi$$

$$4x=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{16} \text{ dir.}$$

$$k=1 \text{ için } 3x-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+1.2\pi$$

$$2x=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{8} \text{ dir.}$$

Buna göre, verilen denklemi sağlayan en küçük iki pozitif x değerinin toplamı,

$$\frac{7\pi}{16}+\frac{7\pi}{8}=\frac{21\pi}{16} \text{ dır.}$$

**5.** $0\le x<360^{o}$ olmak üzere $\sin x+\cos x=1$ denkleminin kökleri toplamı kaçtır?

**Çözüm:**

$\sin x+\cos x=1$ denkleminin çözüm kümesini bulmak için birkaç yöntem vardır. Biz burada en sade olanını kullanacağız.

Verilen denklemde eşitliğin her iki tarafının karesini alırsak,

$$(\sin x+\cos x)^2=1^2$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2.\sin x.\cos x=1$$

$$1+2.\sin x.\cos x=1$$

$$\sin 2x=0\Rightarrow \sin 2x=\sin 0^{o} \text{ ise,}$$

$$2x=0^{o}+k.360^{o} \text{ veya } 2x=180^{o}-0^{o}+k.360^{o}$$

$k=0$ için $x=0^{o}$ veya $x=90^{o}$ dir.

$k=1$ için $x=180^{o}$ veya $x=270^{o}$ dir.

$k=2$ için $x=360^{o}$ veya $x=450^{o}$ dir.

Bulunan bu altı değer $\sin 2x=0$ denkleminin kökleridir. Her iki tarafın karesini aldığımızda esas denkleme ait olmayan kökler oluşmuş olur.

Bunun için, bu köklerden $0\le x<360^{o}$ ve $\sin x+\cos x=1$ koşullarına uyanları almalıyız.

$x=180^{o}$ için $\sin 180^{o}+\cos 180^{o}\ne 1$ olduğundan $180^{o}$ kök değildir.

Aynı gerekçe ile $270^{o}$ de kök değildir.

O halde $\sin x+\cos x=1$ denkleminin kökleri $0^{o}$ ve $90^{o}$ dir.

$0^{o}+90^{o}=90^{o}$ dir.

**6.** $\cot x=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}2y+\cot 2y}$ olduğuna göre x + y nin değeri kaçtır?

**Çözüm:**

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{cosec}2y + \cot 2y} = \frac{1}{\frac{1}{\sin 2y} + \frac{\cos 2y}{\sin 2y}}$$

$$\cot x = \frac{1}{\frac{1+\cos 2y}{\sin 2y}} = \frac{\sin 2y}{1+\cos 2y} = \frac{2.\sin y.\cos y}{1+2.\cos^2 y - 1}$$

$$\cot x = \frac{2.\sin y.\cos y}{2.\cos^2 y} = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y$$

$$\cot x = \tan y$$

Toplamı $90^{o}$ olan iki açıdan birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşit olduğundan,

$\cot x = \tan y \Rightarrow x + y = 90^{o}$ dir.

**7.** $4\pi < x < 7\pi$ olmak üzere $\sin^2 x + 11.\cos x - 11 = 0$ denkleminin kökü kaç radyandır?

**Çözüm:**

$$\sin^2 x + 11.\cos x - 11 = 0$$

$$1 - \cos^2 x + 11.\cos x - 11 = 0$$

$$\cos^2 x - 11.\cos x + 10 = 0$$

$(\cos x - 10).(\cos x - 1) = 0$ ise,

$\cos x - 10 = 0$ veya $\cos x - 1 = 0$ dir.

$\cos x = 10$ veya $\cos x = 1$ dir.

$\cos x$ in en geniş tanım aralığı $[-1,1]$ olduğu için $\cos x$ in değeri 10 olamaz.

$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0$ dır.

Buradan,

$x = 0^{o} + k.2\pi$ veya $x = -0^{o} + k.2\pi$

$x = k.2\pi$ dir.

$4\pi < x < 7\pi$ olması için k = 3 seçilirse,

$x = 6\pi$ bulunur.

**8.** $0 \le x < 2\pi$ olmak üzere $3\sin x - 4\cos x = 6$ eşitliğinin çözüm kümesinin eleman sayısı kaçtır?

**Çözüm:**

a ve b birer reel sayı olmak üzere $a.\sin x + b.\cos x$ in alabileceği en büyük değer $\sqrt{a^2 + b^2}$ , alabileceği en küçük değer $-\sqrt{a^2 + b^2}$ dır.

Buna göre $3\sin x - 4\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ tir.

Bu durumda hiçbir sayı için $3\sin x - 4\cos x$ in sonucu 6 olamaz.

Buna göre verilen eşitliğin çözüm kümesi $Ç = \phi$ dir. Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.

**9.** $0 \le x < 360^{o}$ olmak üzere $\cos 6x + \cos 5x + \cos 4x = 0$ olduğuna göre x in alabileceği kaç farklı değer vardır?

**Çözüm:**

$$\cos 6x + \cos 5x + \cos 4x = 0$$

$$2.\cos\frac{4x+6x}{2}.\cos\frac{4x-6x}{2} + \cos 5x = 0$$

$$2.\cos 5x.\cos x + \cos 5x = 0$$

$\cos 5x.(2.\cos x + 1) = 0$ ise,

$\cos 5x = 0$ veya $\cos x = \frac{-1}{2}$ dir.

$$\cos 5x = 0 \Rightarrow \cos 5x = \cos 90^{o}$$

$5x = 90^{o} + k.360^{o}$ veya $5x = -90^{o} + k.360^{o}$

$x = 18^{o} + k.72^{o}$ veya $x = -18^{o} + k.72^{o}$ dir.

$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos 120^{o}$

$x = 120^{o} + k.360^{o}$ veya $x = -120^{o} + k.360^{o}$ dir.

k nın 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 değeri için $x = 18^{o} + k.72^{o}$

veya $x = -18^{o} + k.72^{o}$ dan 10 tane farklı kök bulunur.

k nın 0 değeri için $x = 120^{o} + k.360^{o}$ den 1 kök bulunur.

k nın 1 değeri için $x = -120^{o} + k.360^{o}$ den 1 kök bulunur.

Buna göre verilen denklemin 12 kökü vardır.

10. $90^{o} < x < 180^{o}$ olmak üzere

$\frac{\sin 5^{o}.\cos 7^{o} + \cos 5^{o}.\sin 7^{o}}{4.\cos 84^{o}.\cos 6^{o}} = \sin x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

**Çözüm:**

$$\frac{\sin 5^{o}.\cos 7^{o} + \cos 5^{o}.\sin 7^{o}}{4.\cos 84^{o}.\cos 6^{o}} = \sin x$$

$$\frac{\sin\left(5^{o} + \cos 7^{o}\right)}{2.2.\sin 6^{o}.\cos 6^{o}} = \sin x$$

$$\frac{\sin 12^{o}}{2.\sin 12^{o}} = \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$\sin x = \sin 30^{o}$

$x = 30^{o} + k.360^{o}$ veya $x = 180^{o} - 30^{o} + k.360^{o}$

k nın 0 değeri için $x = 180^{o} - 30^{o} + 0.360^{o}$

$x = 150^{o}$ bulunur.

**KONU BİTMİŞTİR...**