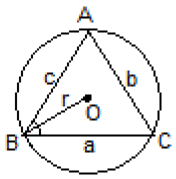
TRİGONOMETRİ-3

A. Üçgende Trigonometrik Bağıntılar

1. Sinüs Teoremi

Bir üçgenin kenarlarının uzunlukları ile karşılarındaki açıların sinüslerinin oranı sabittir. Bu oran, üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir.



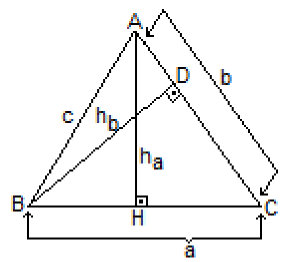
Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları; a,b,c ve çevrel çemberinin yarıçapı r birim olmak üzere,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r \text{ dir.}$$

Bu bağıntıya sinüs teoremi denir.

Şimdi bu bağıntıyı ispatlayalım. İspat'ı dar açılı üçgen için yapacağız. Diğer üçgen çeşitleri için benzer şekilde yapılabilir.

İspat:



Yandaki şekle göre; ABD dik üçgeninde,

$\sin A = \dfrac{h_b}{c}$ dir.

$\Rightarrow h_b = c.\sin A$ dir

CBD dik üçgeninde, $\sin C = \dfrac{h_b}{a}$ dir.

$\Rightarrow h_b = a.\sin C$ dir.

O halde $a.\sin C = c.\sin A$ olup $\boxed{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}}$ ...(1) elde edilir.

Benzer şekilde;

AHC dik üçgeninde, $\sin C = \dfrac{h_a}{b}$ dir.

$\Rightarrow h_a = b.\sin C$ dir.

ABH dik üçgeninde, $\sin B = \dfrac{h_a}{c}$ dir.

$\Rightarrow h_a = c.\sin B$ dir.

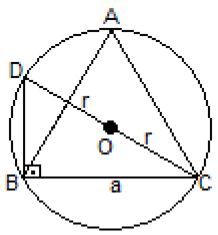
O halde $b.\sin C = c.\sin B$ olup

$\boxed{\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}}$ ...(2) elde edilir.

Bu (1) ve (2) eşitliklerinden,

$\boxed{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}}$ ...(3) elde edilir.

Şimdi ABC üçgeninin çevrel çemberini çizelim.



O merkez r yarıçaplı çember, ABC üçgeninin çevrel çemberidir. $D\hat{B}C$ açısı çapı gören çevre açı olduğundan $m(D\hat{B}C) = 90^{o}$ dir.

Aynı yayı göre çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan

$m(B\hat{D}C) = m(B\hat{A}C)$ dir.

BDC dik üçgeninde

$$\sin B = \frac{b}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{b}{\sin B}$$

$$\sin C = \frac{c}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{c}{\sin C} \text{ bulunur.}$$

Bu değerlerle birlikte (3) eşitliği,

$\boxed{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r}$ olur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 60^o$ ve $|BC| = 6$ birim olduğuna göre, bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapının uzunluğu kaçtır?

Çözüm:

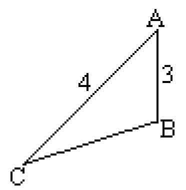
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ bağıntısından

$\frac{6}{\sin 60^o} = 2r \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r \Rightarrow r = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ bulunur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninde $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) + 90^o$, $|AB| = 3$ ve $|AC| = 4$ birim olduğuna göre, $\cot\hat{C}$ kaçtır?

Çözüm:



$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

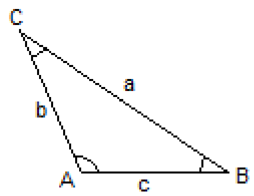
$\frac{4}{\sin\left(90^o + C\right)} = \frac{3}{\sin C}$

$\frac{4}{\cos C} = \frac{3}{\sin C}\quad \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan C = \frac{4}{3}$ bulunur.

2. Kosinüs Teoremi

Bir üçgenin kenar uzunlukları biliniyorsa bu üçgenin herhangi bir açısının ölçüsünü bulmak; ya da iki kenar uzunluğu ile bunlar arasındaki açının ölçüsü biliniyorsa diğer kenarının uzunluğunu bulmak için kosinüs teoreminden yararlanılır.

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a,b,c olmak üzere



$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

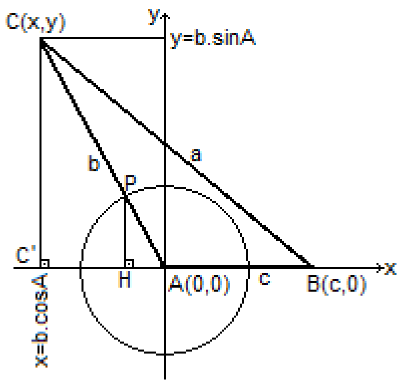
$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$ dir.

Bu bağıntıya kosinüs teoremi denir.

Şimdi bu bağıntılardan $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$ yı ispatlayalım. Diğerleri benzer şekilde ispatlanır.

İspat:



Şekildeki ABC üçgeninin düzlemine dik koordinat sistemini yerleştirelim. Üçgenin A köşesini başlangıç noktası, $[AB]$ kenarını da Ox ekseni olarak alalım.

$A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(x,y)$ olsun. CAC' dik üçgeninde,

$\cos\hat{A} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b.\cos\hat{A}$

olup,

$\sin\hat{A} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b.\sin\hat{A}$

$C(x,y) = C(b.\cos\hat{A}, b.\sin\hat{A})$ elde edilir.

$C'BC$ dik üçgenine pisagor teoremi uygulanırsa,

$|CB|^2 = |C'B|^2 + |C'C|^2$

$|CB|^2 = (b.\cos\hat{A} - c)^2 + (b.\sin\hat{A} - 0)^2$

$a^2 = b^2.\cos^2\hat{A} - 2b.c.\cos\hat{A} + c^2 + b^2.\sin^2\hat{A}$

$$a^2 = b^2.\left(\cos^2\hat{A} + \sin^2\hat{A}\right) + c^2 - 2b.c.\cos\hat{A}$$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\hat{A}}$ elde edilmiş olur.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

$m(\hat{A}) = 90^o$ olması durumunda $\cos 90^o = 0$ olduğundan, kosinüs teoreminin ifadesi $a^2 = b^2 + c^2$ ye dönüşür.

Bu, pisagor teoreminin ifadesidir.

Yukarıdaki eşitliklerden

$$\boxed{\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b.c.}}$$

$$\boxed{\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a.c.}}$$

$\boxed{\cos\hat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}}$ yazılır.

Örnek:

Kenarlarını uzunlukları $a = 2\sqrt{7}$, $b = 4$, $c = 6$ olan ABC üçgeninin A açısının ölçüsünü bulalım

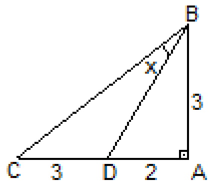
Çözüm:

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b.c.} = \frac{4^2 + 6^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2}{2.4.6}$$

$$= \frac{16 + 36 - 28}{48} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$\cos\hat{A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = \dfrac{\pi}{3}$ bulunur.

Örnek:



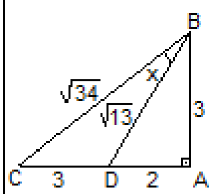
ABC dik üçgeninde

$m(\hat{A}) = 90^o$

$|CD| = |AB| = 3$ birim

olduğuna göre $\cos x$ değeri kaçtır?

Çözüm:



Kosinüs teoremi yardımıyla çözelim: DAB ve CAB dik üçgenlerinde pisagor bağıntısı uygulanarak,

$|BD| = \sqrt{13}$, $|BC| = \sqrt{34}$ bulunur.

BCD üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$\cos x = \frac{|BD|^2 + |BC|^2 - |CD|^2}{2.|BD|.|BC|} = \frac{\sqrt{34}^2 + \sqrt{13}^2 - 3}{2.\sqrt{34}.\sqrt{13}}$$

$\cos x = \dfrac{34 + 13 - 3}{2.\sqrt{442}} = \dfrac{19}{\sqrt{442}}$ bulunur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninin kenarları arasında $a^2 = b^2 + c^2 + b.c$ bağıntısı varsa A açısının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

Herhangi bir üçgende $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$ bağıntısı olduğuna göre

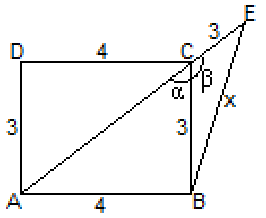
$a^2 = b^2 + c^2 + b.c$ ve $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

bağıntısının ortak çözümünü araştıralım;

$$b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - b.c$$

$\Rightarrow -2\cos\hat{A} = 1 \Rightarrow \cos\hat{A} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = \dfrac{2\pi}{3}$ bulunur.

Örnek:



Yandaki şekilde ABCD dikdörtgen ve $[AC]$ köşegendir. AC köşegeninin uzantısı üzerinde $|CE| = |CB| = 3$ birim ise $|BE|$ kaç birimdir?

Çözüm:

ADC üçgeninde pisagor teoremi uygulanırsa $|AC| = 5$ birim bulunur.

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}\ ,\ \cos\beta = \cos\left(180^o - \alpha\right) = -\cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

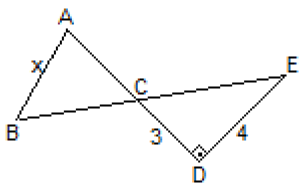
olur.

BCE üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3.\left(-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{144}{5}$$

$x = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ bulunur.

Örnek:



Şekilde $m(\hat{D}) = 90^o$, $|CD| = 3$, $|DE| = 4$ birim, $|CE| = |AD|$ ve $|BE| = 8$ birim olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?

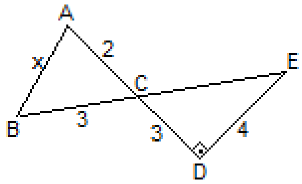
Çözüm:

CDE dik üçgeninde pisagor bağıntısından $|CE| = 5$ birim bulunur.

$|CE| = |AD|$ ise $|AD| = 5$ birimdir.

$|AD| = |AC| + |CD| \Rightarrow |AC| = 5 - 3 = 2$ birim bulunur.

$|BE| = 8 \Rightarrow |BE| = |BC| + |CE| \Rightarrow |BC| = 8 - 5 = 3$ tür.



Şekildeki ABC ve DCE üçgenlerine ayrı ayrı kosinüs teoremi uygulanırsa

CDE dik üçgeninde

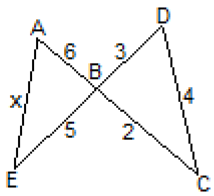
$\cos\hat{C} = \dfrac{3}{5}$ tir.

ABC üçgeninde

$$\frac{3}{5} = \cos\hat{C} = \frac{2^2 + 3^2 - x^2}{2.2.3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{13 - x^2}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{29}{5} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{29}{5}}$$ olur.

Örnek:



Yandaki şekilde A,b,c noktaları doğrusal olduğu gibi, D,B,E noktaları da doğrusaldır.
$|AB| = 6$, $|BC| = 2$
$|CD| = 4$, $|DB| = 3$,
$|BE| = 5$ birim olduğuna göre $|AE| = x$ kaç birimdir?

Çözüm:

BCD üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$|DC|^2 = |BD|^2 + |BC|^2 - 2.|BD|.|BC|.\cos\hat{B}$$

$$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2.3.2.\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = -\frac{1}{4}$$ bulunur.

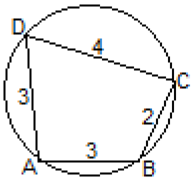
ABE üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |EB|^2 - 2.|AB|.|EB|.\cos\hat{B}$$

$$x^2 = 6^2 + 5^2 - 2.6.5.\left(-\frac{1}{4}\right) = 61 + 15 = 76$$

$x = \sqrt{76}$ bulunur.

Örnek:

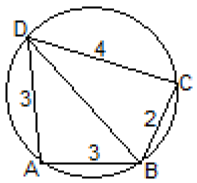


ABCD kirişler dörtgenidir.

$|AD| = 3$, $|AB| = 3$

$|BC| = 2$, $|CD| = 4$ birim olduğuna göre $\cos(B\hat{C}D)$ kaçtır?

Çözüm:



Kirişler dörtgeninde, karşılıklı açılar bütünlerdir.

Yani $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^0$ ise

$m(\hat{A}) = 180^0 - m(\hat{C})$ dir.

Buna göre, $\cos\hat{A} = \cos(180^o - \hat{C}) = -\cos\hat{C}$ dir.

B ve D noktalarını birleştirerek, ABD ve BCD üçgenlerini oluşturalım.

ABD üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım,

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2.|AB|.|AD|.\cos\hat{A}$$

$$|BD|^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3.\cos\hat{A}$$

$$|BD|^2 = 18 + 18.\cos\hat{C} \text{ dir.}$$

BCD üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım,

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |DC|^2 - 2.|BC|.|DC|.\cos\hat{C}$$

$$18 + 18.\cos\hat{C} = 2^2 + 4^2 - 2.2.4.\cos\hat{C}$$

$$18 + 18.\cos\hat{C} = 20 - 16.\cos\hat{C}$$

$$34.\cos\hat{C} = 2 \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{1}{17} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Kenar uzunlukları $a = 4$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{7}$ olan bir üçgenin iç açılarından kosinüsü en küçük olanın ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

Kenar uzunlukları verilen kenar uzunlukları arasındaki bağıntı c > a > b dir.

Bir üçgende en büyük iç açı, en uzun kenar karşısında bulunur.

$(0^o, 180^o)$ aralığında açının değeri büyüdükçe kosinüsü küçülür. Bu durumda bizden istenen ölçüsü en büyük olan açının kosinüsüdür. Buna göre, $\cos\hat{C}$ yi bulmalıyız.

ABC üçgenine kosinüs teoremini uygulayalım.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - 2.|BC|.|AC|.\cos\hat{C}$$

$$(2\sqrt{7})^2 = 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\cos\hat{C}$$

$$28 = 20 - 16.\cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m(\hat{C}) = 120^o \text{ bulunur.}$$

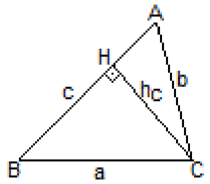
B. Üçgenin Alan Formülleri

1. İki Kenar Uzunluğu ve Bu Kenarlar Arasındaki Açısı Bilinen Üçgenin Alanını Bulma

Bir üçgenin alanı, üçgenin iki kenarının uzunluğu ile bu kenarların oluşturduğu açının sinüsünün çarpımının yarısına eşittir.

$$\boxed{A(ABC) = \frac{b.c.\sin\hat{A}}{2} = \frac{a.b.\sin\hat{C}}{2} = \frac{a.c.\sin\hat{B}}{2}}$$

İspat:



$[CH] \perp [AB]$ çizelim. ABC üçgeninin alanı,

$$A(ABC) = \frac{c.h_c}{2} \text{ dir.}$$

Diğer yandan, BHC dik üçgeninde,

$$\sin\hat{B} = \frac{|HC|}{|BC|} = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a.\sin\hat{B} \text{ elde edilir.}$$

$h_c = a.\sin\hat{B}$ değerini $A(ABC) = \frac{c.h_c}{2}$ eşitliğinde yazarsak,

$$A(ABC) = \frac{c.a.\sin\hat{B}}{2} = \frac{.a.c.\sin\hat{B}}{2} \text{ bulunur.}$$

Diğer eşitlikler benzer şekilde ispatlanabilir.

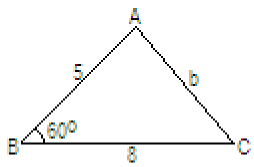
Örnek:

Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 150^o$, $b = 4$ ve $c = 2$ birim olduğuna göre $A(ABC)$ kaçtır?

Çözüm:

$$A(ABC) = \frac{b.c.\sin\hat{A}}{2} = \frac{4.2\sin 150^o}{2} = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek:



Yandaki ABC üçgeninde,

$|BC| = 8$, $|AB| = 5$ ve $m(\hat{A}) = 60^o$ olduğuna göre $A(ABC)$ yi, $|AC|$ uzunluğunu ve $\sin\hat{C}$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$A(ABC) = \frac{.a.c.\sin\hat{B}}{2} = \frac{8.5.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Kosinüs teoreminden,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B} = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\frac{1}{2}$$

$$b^2 = 64 + 25 - 40 = 49 \Rightarrow b = 7 \text{ bulunur.}$$

Sinüs teoreminden,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sin\hat{C}}$$

$$14.\sin\hat{C} = 5\sqrt{3} \Rightarrow \sin\hat{C} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \text{ bulunur.}$$

2. Kenar Uzunlukları ve Çevrel Çemberinin Yarıçapı Verilen Bir Üçgenin Alanı

Kenar uzunlukları a,b,c ve çevrel çemberinin yarıçapı r olan ABC üçgeninin alanı

$$\boxed{A(ABC) = \frac{a.b.c}{4r}} \text{ dir.}$$

İspat:

ABC üçgeninin alanının $A(ABC) = \frac{b.c.\sin\hat{A}}{2}$ olduğunu daha önce ispatlamıştık.

Sinüs teoreminden $\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2r$ dir.

Buradan

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2r \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{a}{2r} \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu değer $A(ABC) = \frac{b.c.\sin\hat{A}}{2}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$A(ABC) = \frac{b.c.\sin\hat{A}}{2} = \frac{b.c.\frac{a}{2r}}{2} = \frac{a.b.c}{4r} \text{ bulunur.}$$

3. Üç Kenar Uzunluğu Verilmiş Olan Bir Üçgenin Alanını Bulma

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a,b,c olsun.

$u = \dfrac{a+b+c}{2}$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı

$A(ABC) = \sqrt{u.(u-a).(u-b).(u-c)}$ dir.

İspat:

$u = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow a+b+c = 2u$ dur.

$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 A$ ...(1)

Kosinüs teoreminden, $\cos \hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b.c.}$ dir.

$\cos \hat{A}$ nın bu değerini (1) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b.c.}\right)^2$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2.c^2}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2.c^2}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)}{4b^2.c^2}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{(b+c-a).(b+c+a).(a+b-c).(a-b+c)}{4b^2.c^2}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{(2u-2a).(2u).(2u-2c).(2u-2b)}{4b^2.c^2}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{2(u-a).2u.2(u-c).2.(u-b)}{4b^2.c^2}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{4u(u-a).(u-c).(u-b)}{b^2.c^2}$$

$$\sin\hat{A} = \frac{2}{bc}.\sqrt{u(u-a).(u-c).(u-b)}$$

$$A(ABC) = \frac{b.c.\sin\hat{A}}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{b.c.\frac{2}{bc}.\sqrt{u(u-a).(u-c).(u-b)}}{2}$$

$\boxed{A(ABC) = \sqrt{u(u-a).(u-c).(u-b)}}$ elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Örnek:

Kenar uzunlukları, 5 cm, 4 cm, ve 7 cm olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç cm dir?

Çözüm:

$a = 5$, $b = 4$, $c = 7$ ise $u = \dfrac{5+4+7}{2} = 8$ dir.

$A(ABC) = \sqrt{8.(8-5).(8-4).(u-7)} = 4\sqrt{6}$ dır.

Buna göre, $A(ABC) = \dfrac{a.b.c}{4r} \Rightarrow 4\sqrt{6} = \dfrac{5.4.7}{4r}$

$$\Rightarrow r = \frac{5.4.7}{16\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$$

bulunur.

Çözümlü Sorular

3. $\operatorname{arc\,cot}(x-1) = \arctan 3$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$\text{arc cot}(x-1) = \arctan 3 = \alpha$ olsun.

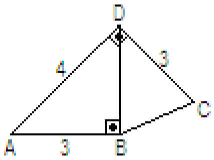
Bu durumda $\tan\alpha = 3$ ve $\cot\alpha = x-1$ dir.

Buna göre,

$\tan\alpha.\cot\alpha = 3.(x-1) = 1$ dir.

$x-1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ bulunur.

2.

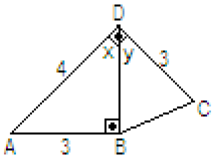


$[AD] \perp [DC]$, $[AB] \perp [BD]$

$|AD| = 4$, $|AB| = |DC| = 3$

olduğuna göre BCD üçgeninin alanı kaç birim karedir?

Çözüm:



ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulandığında,

$|DB| = \sqrt{7}$ bulunur.

$m(B\hat{D}A) = x$ ve $m(B\hat{D}C) = y$ olsun.

$x + y = 90^o$ olduğundan, $\cos x = \sin y$ dir.

ABD dik üçgeninde,

$\sin y = \cos x = \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ tür.

CBD üçgeninin alanı,

$$A(CBD) = \frac{|DB|.|DC|.\sin y}{2} = \frac{\sqrt{7}.3.\frac{\sqrt{7}}{4}}{2} = \frac{21}{8}$$

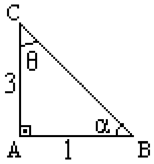
bulunur.

3. $\text{arc cot}\,3 + \arctan 3 = \arcsin x$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$\text{arc cot}\,3 = \theta$ olsun. Bu durumda $\cot\theta = 3$ tür.

Bu koşula uygun dik üçgen çizelim.



ABC dik üçgeninde

$\tan\alpha = 3 \Rightarrow \arctan 3 = \alpha$ dır.

Buna göre,

$\text{arc cot}\,3 + \arctan 3 = \arcsin x$

$\theta + \alpha = \arcsin x$

$90^o = \arcsin x \Rightarrow x = \sin 90^o = 1$ olur.

4. $f(x) = 3 + \cos\frac{x}{2}$ fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

Çözüm:

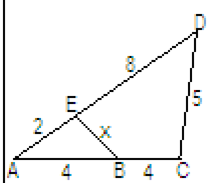
a, b, c, d birer reel sayı ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$g(x) = a + b.\cos^m(cx + d)$

fonksiyonunun esas periyodu, m tek sayı ise $\frac{2\pi}{|c|}$ idi.

$f(x) = 3 + \cos\frac{x}{2} = 3 + \cos^1\left(\frac{1}{2}.x\right)$ fonksiyonunda, 1 tek sayı olduğu için, esas periyot, $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ dir.

5.



Yandaki şekilde ACD ile ABE üçgenleri verilmiştir.

Verilenlere göre x^2 kaçtır?

Çözüm:

ACD üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak,

$$|DC|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2.|AC|.|AD|.\cos\hat{A}$$

$$5^2 = 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{139}{160}$$

ABE üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak,

$$|EB|^2 = |AB|^2 + |AE|^2 - 2.|AB|.|AE|.\cos\hat{A}$$

$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\frac{139}{160} \Rightarrow x^2 = \frac{61}{10} \text{ olur.}$$

6. $4.\text{arc}\cot\left(x^2 - x - 29\right) = 5\pi$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$4.\text{arc}\cot\left(x^2 - x - 29\right) = 5\pi$ ise,

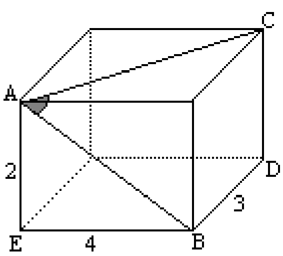
$$\text{arc}\cot\left(x^2 - x - 29\right) = \frac{5\pi}{4}$$

$$\cot\frac{5\pi}{4} = x^2 - x - 29$$

$$1 = x^2 - x - 29 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0$$

$(x-6).(x+5) = 0 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -5$ bulunur.

7.



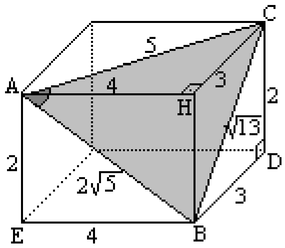
Yanda verilen dikdörtgenler prizmasında

$|AE| = 2$, $|EB| = 4$,

$|BD| = 3$

olduğuna göre, BAC açısının kosinüsü kaçtır?

Çözüm:



AHC dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$|AC| = 5$ bulunur.

AEB dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$|AB| = 2\sqrt{5}$ bulunur.

BDC dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$|BC| = \sqrt{13}$ bulunur.

BAC üçgenine kosinüs teoremini uygulayalım,

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AB|.|AC|.\cos\hat{A}$$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + 5^2 - 2.2\sqrt{5}.5.\cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{8\sqrt{5}}{25} \text{ bulunur.}$$

8. Kenar uzunlukları a, b ve c olan bir ABC üçgeninde $a^2 - b^2 - c^2 + bc = 0$ olduğuna göre, bu üçgenin A açısı kaç derecedir?

Çözüm:

$a^2 - b^2 - c^2 + bc = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = -bc$ olmak üzere

ABC üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$ ise,

$a^2 - b^2 - c^2 = -2.b.c.\cos\hat{A}$ olur.

Yukarıdaki eşitlikle bu eşitliğin ortak çözümünden,

$$-bc = -2.b.c.\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{1}{2}$$

$\cos\hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow m\left(\hat{A}\right) = 60^o$ bulunur.

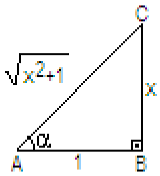
9. $0^o < x < 90^o$ olmak üzere $f(\tan x) = \sin x$ olduğuna göre $f(x)$ i bulunuz?

Çözüm:

$\arctan x = \alpha$ olsun.

Bu durumda $\tan\alpha = x$ olur.

Bu koşula uygun dik üçgeni çizelim.



$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

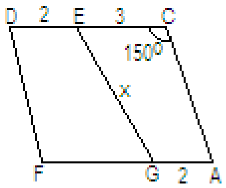
Buna göre,

$$f(\tan(\arctan x)) = \sin(\arctan x)$$

$$f(x) = \sin(\arctan x) = \sin\alpha$$

$f(x) = \sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ bulunur.

10. Aşağıdaki şekilde, FACD bir eşkenar dörtgendir.



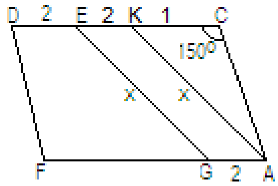
$m(\hat{C}) = 150^o$

$|EC| = 3$, $|DE| = 2$

$|GA| = 2$, $|EG| = x$ olduğuna göre x^2 kaçtır?

Çözüm:

Eşkenar dörtgenin tüm kenar uzunlukları eşittir. Paralel kenarın karşılıklı kenar uzunlukları eşittir. $[EG] // [KA]$ çizelim. Bu durumda $|EK| = |GA| = 2$ birim olur.



$|EC| = 3$ birim, $|EK| = 2$ birim ise,

$|KC| = 1$ birim olur.

KAC üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım.

$$|KA|^2 = |KC|^2 + |CA|^2 - 2.|KC|.|CA|.\cos\hat{C}$$

$$x^2 = 1^2 + 5^2 - 2.1.5.\cos 150^o$$

$$x^2 = 1 + 25 - 10.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$x^2 = 26 + 5\sqrt{3}$ bulunur.

11. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{3x-2}{4}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığında kaç farklı tamsayı vardır?

Çözüm:

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ olduğu için $\arccos x$ in tanım aralığı $[-1,1]$ dir.

Buna göre,

$f(x) = \arccos\left(\dfrac{3x-2}{4}\right)$ ise $\dfrac{3x-2}{4} \in [-1,1]$ dir.

Bu durumda,

$$-1 \le \frac{3x-2}{4} \le 1 \Rightarrow -4 \le 3x-2 \le 4$$

$-\dfrac{2}{3} \le x \le 2 \Rightarrow -2 \le 3x \le 6$ dir.

Bu aralıktaki tamsayılar 0,1,2 olup üç tanedir.

12. $f(x) = a.\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} - b$ fonksiyonunun grafiği $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$ ve $\left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$ noktalarından geçtiğine göre a.b çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = a.\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} - b$ fonksiyonunun grafiği

$\left(\dfrac{3\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$ ve $\left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$ noktalarından geçtiğine göre

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$ ve $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ dir.

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow a.\frac{\sin\left(2.\frac{3\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(2.\frac{3\pi}{2}\right)} - b = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a.\frac{0}{1+1} - b = \sqrt{2} \Rightarrow b = -\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow a.\frac{\sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)} - b = 2$$

$$\Rightarrow a.\frac{1}{1+0} + \sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = 2 - \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

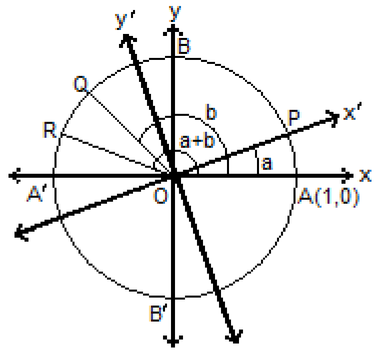
$$a.b = \left(2-\sqrt{2}\right).\left(-\sqrt{2}\right) = 2 - 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

C. İki Yay Toplamının Veya Farkının Trigonometrik Oranları

1. a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

$$\cos(a+b) = \cos a.\sin b - \sin a.\cos b \text{ dir.}$$

İspat:



Birim çember üzerinde a, b ve a+b sayılarına karşılık gelen noktalar sırasıyla P,Q ve R olsun.

$A(1,0)$, $P(\cos a, \sin a)$, $Q(\cos b, \sin b)$ ve

$R(\cos(a+b), \sin(a+b))$ dir.

Şimdi $|AR|^2$ yi hesaplayalım:

$$|AR|^2 = [1-\cos(a+b)]^2 + [0-\sin(a+b)]^2$$

$$|AR|^2 = 1 - 2.\cos(a+b) + \cos^2(a+b) + \sin^2(a+b)$$

$$|AR|^2 = 1 - 2.\cos(a+b) + 1$$

$$|AR|^2 = 2 - 2.\cos(a+b) \text{ olur.}$$

Orjin yine O noktasında olmak üzere $[OP$ ışını Ox' ekseni olacak şekilde yeni bir $x'Oy'$ dik koordinat sistemini seçelim.

Bu koordinat sistemine göre,

A noktası $A(\cos(-a), \sin(-a)) = (\cos a, -\sin a)$

P noktası $P(1,0)$

R noktası $R(\cos b, \sin b)$ olur. Bu koordinat sisteminde

$|AR|^2$ yi hesaplayalım:

$$|AR|^2 = [\cos a - \cos b]^2 + [-\sin a - \sin b]^2$$

$$= \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \sin^2 a$$
$$- 2.\sin a.\sin b + \sin^2 b$$

$$= \cos^2 a + \sin^2 a + \cos^2 b + \sin^2 b$$
$$- 2[.\cos a.\cos b + \sin a.\sin b]$$

$$= 2 - 2[.\cos a.\cos b + \sin a.\sin b]$$ olur.

$|AR|$ her iki koordinat sisteminde de aynı olduğundan,

$$2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2[.\cos a.\cos b + \sin a.\sin b]$$ olur.

Buradan da $\forall a, b \in R$ için,

$\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\sin b - \sin a.\cos b}$ bulunur.

Bu bağıntıdan yararlanarak $\cos(a-b)$ yi de şöyle hesaplarız:

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b))$ dir.

$$\cos(a+(-b)) = \cos a.\sin(-b) - \sin a.\cos(-b)$$

$\boxed{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b}$ bulunur.

2. a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

$\boxed{\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b}$ dir.

İspat:

$$\sin(a-b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin b$$ olur.

Buradan,

$\boxed{\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b}$ bulunur.

Bu bağıntıdan yararlanarak $\sin(a+b)$ yi de şöyle hesaplarız:

$\sin(a+b) = \sin(a-(-b))$ dir.

$$\sin(a-(-b)) = \sin a.\cos(-b) - \cos a.\sin(-b)$$

$$\sin(a-(-b)) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

O halde,

$\boxed{\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b}$ dir.

Örnek:

$\sin 15^{o}$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$\sin 15^{o} = \sin\left(45^{o} - 30^{o}\right)$ dir.

$$\sin\left(45^{o} - 30^{o}\right) = \sin 45^{o}.\cos 30^{o} - \cos 45^{o}.\sin 30^{o}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Örnek:

$\dfrac{\tan 30^{o}.\cos 10^{0} - \sin 10^{o}}{\tan 60^{o}.\sin 20^{o}} = \dfrac{2}{3}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$\dfrac{\tan 30^{o}.\cos 10^{0} - \sin 10^{o}}{\tan 60^{o}.\sin 20^{o}} = x$ olsun.

$$x = \frac{\dfrac{\sin 30^{o}}{\cos 30^{o}}.\cos 10^{0} - \sin 10^{o}}{\tan 60^{o}.\sin 20^{o}}$$

$$x = \frac{\sin 30^{o}.\cos 10^{0} - \cos 30^{o}\,\sin 10^{o}}{\cos 30^{o}.\tan 60^{o}.\sin 20^{o}}$$

$$x = \frac{\sin\left(30^o - 10^0\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}.\sin 20^o} = \frac{\sin 20^o}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}.\sin 20^o}$$

$x = \frac{2}{3}$ bulunur.

Örnek:

$\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ tir.

$y = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ tir.

Bu iki duruma uygun dik üçgen çizilirse veya $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$ bağıntısından,

$\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ve $\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur.

$$\sin\left(x + y\right) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5}{5} = 1$$

$\sin\left(x + y\right) = 1 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$ dir.

$\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} = x + y = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

Örnek:

$\frac{\sin 45^o}{\sin 15^o} - \frac{\cos 45^o}{\cos 15^o}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sin 45^o}{\sin 15^o} - \frac{\cos 45^o}{\cos 15^o} = \frac{\sin 45^o.\cos 15^o - \cos 45^o.\sin 15^o}{\sin 15^o.\cos 15^o}$$

$$= \frac{\sin\left(45^o - 15^o\right)}{\sin 15^o.\cos 15^o} = \frac{\sin 30^o}{\sin 15^o.\cos 15^o}$$

$$= \frac{\sin\left(15^o + 15^o\right)}{\sin 15^o.\cos 15^o}$$

$$= \frac{\sin 15^o.\cos 15^o + \sin 15^o.\cos 15^o}{\sin 15^o.\cos 15^o}$$

$= \frac{2.\sin 15^o.\cos 15^o}{\sin 15^o.\cos 15^o} = 2$ bulunur.

Örnek:

$\sin\frac{5\pi}{12}$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ dır. Buna göre,

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Örnek:

Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü x,y,z olmak üzere $\cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ işleminin sonucunun z türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

$x+y+z=180^{o} \Rightarrow x+y=180^{o}-z$ dir.

Buna göre,

$\cos x.\cos y-\sin x.\sin y=\cos(x+y)$

$=\cos\left(180^{o}-z\right)=-\cos z$ dir.

Kural

$a,b\in R$ olmak üzere $K=a.\sin x+b.\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer $\sqrt{a^2+b^2}$ ve en küçük değer $-\sqrt{a^2+b^2}$ dir.

Bu kuralın doğruluğunu K nin her tarafı a ile bölünüp,

$\frac{b}{a}=\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dönüşümü yapıldıktan sonra toplam

formülü uygulanarak gösterilebilir.

Örnek:

$3.\sin x+4.\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

Verilen ifadenin en büyük değeri,

$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ tir.

Cevabını bulduğumuz soru ile " $3.\sin x+4.\cos y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?" sorusunu birbirine karıştırmamak gerekir. $3.\sin x+4.\cos y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer,

$x=90^{o}$, $y=0^{o}$ için, 3 + 4 = 7 dir.

Halbuki $3.\sin x+4.\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer 5 tir.

Örnek:

$3.\sin x+4.\cos x$ ifadesinin alabileceği en küçük değer,

$-\sqrt{3^2+4^2}=-\sqrt{25}=-5$ tir.

Örnek:

$2.\sin x-4.\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer,

$\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ tir.

3. a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

$\boxed{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}}$ dir.

İspat:

$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ dir.

$\tan(a+b)=\frac{\sin a.\cos b+\cos a.\sin b}{\cos a.\cos b-\sin a.\sin b}$

olup pay ve paydayı $\cos a.\cos b$ ye bölersek.

$\tan(a+b)=\frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a.\sin b}{\cos a.\cos b}}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$ bulunur.

Bulunan bu bağıntıda b yerine –b yazırsa,

$\tan(a-b)=\frac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a.\tan(-b)}$

$\boxed{\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}}$ elde edilir.

Sonuç

- $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$
- $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$
- $\cos(a+b)=\cos a.\sin b-\sin a.\cos b$
- $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

Örnek:

$\tan\left(45^{o}+x\right)$ ifadesinin $\tan x$ türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$\tan 45^{o}=1$ olmak üzere,

$\tan\left(45^{o}+x\right)=\dfrac{\tan 45^{o}+\tan x}{1-\tan 45^{o}.\tan x}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ olur.

Örnek:

$\tan 75^{o}$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$75^{o}=45^{o}+30^{o}$ olup,

$\tan 75^{o}=\tan\left(45^{o}+30^{o}\right)=\dfrac{\tan 45^{o}+\tan 30^{o}}{1-\tan 45^{o}.\tan 30^{o}}$

$\tan 75^{o}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1.\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}.\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ bulunur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri, A,B,C dir.

$\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A.\tan B.\tan C}$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$\tan\left(180^{o}-x\right)=-\tan x$ tir. ABC üçgeninde,

$m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^{o}$ dir.

$\Rightarrow m(\hat{A})+m(\hat{B})=180^{o}-m(\hat{C})$

$\tan(A+B)$ yi $\tan(180^{o}-C)$ ye eşitleyerek sonucu bulalım.

$\tan(A+B)=\tan(180^{o}-C)$

$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A.\tan B.\tan C$

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

$\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A.\tan B.\tan C}=1$ bulunur.

Örnek:

$\tan 70^{o}=x$ olmak üzere, $\cot 40^{o}$ yi x türünden bulunuz.

Çözüm:

Toplamları 90^{o} olan iki açıdan birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

$\cot 40^{o}=\tan 50^{o}$, $\tan 20^{o}=\cot 70^{o}$ ve

$\tan 70^{o}.\cot 70^{o}=1$ dir.

Buna göre,

$\cot 40^{o}=\tan 50^{o}=\tan\left(70^{o}-20^{o}\right)$

$$\cot 40^\circ = \frac{\tan 70^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 70^\circ . \tan 20^\circ} = \frac{\tan 70^\circ - \cot 70^\circ}{1 + \tan 70^\circ . \cot 70^\circ}$$

$$\cot 40^\circ = \frac{\tan 70^\circ - \dfrac{1}{\tan 70^\circ}}{2} = \frac{x - \dfrac{1}{x}}{2}$$

$\cot 40^\circ = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$ bulunur.

Örnek:

$\tan x = a$ olmak üzere, $\cot\left(135^\circ - x\right)$ ifadesini a türünden bulunuz.

Çözüm:

Önce $\tan\left(135^\circ - x\right)$ in eşitini bulalım.

$$\tan\left(135^\circ - x\right) = \frac{\tan 135^\circ - \tan x}{1 + \tan 135^\circ . \tan x}$$

$$\tan\left(135^\circ - x\right) = \frac{-1 - \tan x}{1 - \tan x} = \frac{-1 - a}{1 - a}$$

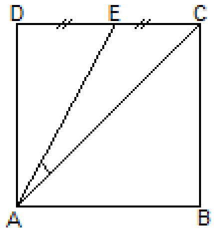
$\tan\left(135^\circ - x\right) = \dfrac{1 + a}{a - 1}$ olur.

Buna göre,

$$\cot\left(135^\circ - x\right) = \frac{1}{\tan\left(135^\circ - x\right)} = \frac{1}{\dfrac{1 + a}{a - 1}}$$

$\cot\left(135^\circ - x\right) = \dfrac{a - 1}{a + 1}$ bulunur.

Örnek:

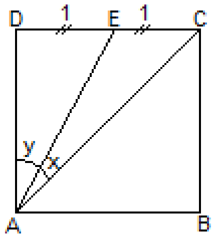


Yandaki şekilde ABCD bir karedir.

$|DE| = |EC|$ olduğuna göre

$\cot\left(C\hat{A}E\right)$ kaçtır?

Çözüm:



ABCD kare olduğu için $[AC]$ köşegendir. Ve $\cot\left(C\hat{A}D\right) = 45^\circ$ dir.

$\cot\left(C\hat{A}E\right) = \cot x$

$x + y = 45^\circ \Rightarrow x = 45^\circ - y$

$\cot\left(C\hat{A}E\right) = \cot x = \cot\left(45^\circ - y\right)$ dir.

$$\tan\left(45^\circ - y\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan y}{1 + \tan 45^\circ . \tan y}$$

$$\tan\left(45^\circ - y\right) = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y} = \frac{1 - \dfrac{|DE|}{|DA|}}{1 + \dfrac{|DE|}{|DA|}}$$

$\tan\left(45^\circ - y\right) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$ dir.

Buna göre,

$\cot\left(C\hat{A}E\right) = \cot\left(45^\circ - y\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$ tür.

D. Yarım Açı Formülleri

Burada, herhangi bir reel sayının trigonometrik değerini, bu sayının yarısının trigonometrik değeri cinsinden veren bağıntıları toplam formüllerinden yararlanarak bulacağız.

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz formüller yardımıyla $(a+b)$ ifadesinde b yerine a yazarak $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\tan 2a$ formüllerini elde edelim;

1. $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$ ise b yerine a yazarsak,

$$\sin(a+a) = \sin a.\cos a + \cos a.\sin a$$

$\boxed{\sin 2a = 2.\sin a.\cos a}$ elde edilir.

2. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ olduğunu biliyoruz.

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a.\cos a - \sin a.\sin a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a$$

$\boxed{\cos 2a = 1 - 2.\sin^2 a}$ veya bunun eşiti olan,

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$\boxed{\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a}$ bulunur.

3. $\tan 2a = \tan(a+a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a.\tan a}$

$\boxed{\tan 2a = \dfrac{2.\tan a}{1 - \tan^2 a}}$ bulunur.

4. $\cot 2a = \cot(a+a) = \dfrac{\cot a.\cot a - 1}{\cot a + \cot a}$

$\boxed{\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2.\cot a}}$ bulunur.

Sonuç

Yarım açı formülleri,

- $\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$
- $\cos 2a = 1 - 2.\sin^2 a$

  $\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\tan 2a = \dfrac{2.\tan a}{1 - \tan^2 a}$
- $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2.\cot a}$ dır.

Örnek:

$\dfrac{\sin 2x}{2.\cos x}$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm:

Pay ve paydayı $\sin x$ ile çarpalım,

$$\frac{\sin 2x.\sin x}{2.\cos x.\sin x} = \frac{\sin 2x.\sin x}{\sin 2x} = \sin x \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin\dfrac{\pi}{8}.\cos\dfrac{\pi}{8}$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{\sin 2x}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\left(2.\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

$\cos^4 15^o - \sin^4 15^o$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\cos^4 15^o - \sin^4 15^o = \left(\cos^2 15^o\right)^2 - \left(\sin^2 15^o\right)^2$$

$$= \left(\cos^2 15^o - \sin^2 15^o\right)\left(\cos^2 15^o + \sin^2 15^o\right)$$

$$= \left(\cos^2 15^o - \sin^2 15^o\right)\left(\cos^2 15^o + \sin^2 15^o\right)$$

$$= \cos^2 15^o - \sin^2 15^o = \cos\left(2.15^o\right) = \cos 30^o$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\tan\frac{\pi}{8}$ ifadesinin sonucun bulalım.

1.Çözüm:

$\tan\frac{\pi}{8} = x$ olsun.

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(2.\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 1 = \frac{2.\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2.x}{1-x^2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemin köklerini bulalım;

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 2^2 - 4.1.(-1) = 8 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2} > 0 \text{ ve}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} < 0 \text{ dir.}$$

$\tan\frac{\pi}{8} > 0$ olduğundan x_2 kök olamaz.

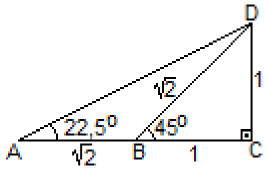
O halde

$\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$ dir.

2.Çözüm:

$\frac{\pi}{4} = 45^o$ ve $\frac{\pi}{8} = 22{,}5^o$ dir.

Dik kenar uzunlukları 1 er birim olan bir DBC dik üçgeni çizelim: $|BD|$ pisagor teoreminden $\sqrt{2}$ birim bulunur.



CA doğru parçasında

$|BC| = 1$ ve $|AB| = \sqrt{2}$ birim olsun.

$|BD| = \sqrt{2}$ birim olduğu için, ABD ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgenin iki açısının ölçüsü birbirine eşittir.

$m\left(B\hat{A}D\right) = m\left(A\hat{D}B\right)\ldots(1)$

Üçgenin bir dış açısının ölçüsü, bu açıya komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir.

$$m\left(C\hat{B}D\right) = m\left(B\hat{A}D\right) + m\left(A\hat{D}B\right)$$

$$45^o = m\left(B\hat{A}D\right) + m\left(B\hat{A}D\right)$$

$$45^o = 2.m\left(B\hat{A}D\right) \text{ dir.}$$

$$m\left(B\hat{A}D\right) = 22{,}5^o \text{ dir.}$$

ACD dik üçgeninde A açısının tanjantını bulalım.

$$\tan\left(A\hat{C}D\right) = \tan\frac{\pi}{8} = \frac{|DC|}{|CA|} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2} \text{ bulunmuş}$$

olur.

E. Dönüşüm Ve Ters Dönüşüm Formülleri

Toplam durumundaki trigonometrik ifadeleri, çarpım biçimine getirmeye yarayan trigonometrik eşitliklere dönüşüm formülleri denir. Bu formüller, toplam ve fark formüllerinden elde edilir.

I. Dönüşüm Formülleri

a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

a) $\cos a + \cos b = 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ dir.

b) $\cos a - \cos b = -2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ dir.

c) $\sin a + \sin b = 2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ dir.

d) $\sin a - \sin b = 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ dir.

İspat:

Toplam ve fark formüllerinden,

a) $\cos(p+q) = \cos p.\sin q - \sin p.\cos q$

$\cos(p-q) = \cos p.\cos q + \sin p.\sin q$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$\cos(p+q) + \cos(p-q) = 2\cos p.\cos q$ ...(1) elde edilir.

$\left.\begin{matrix} p+q=a \\ p-q=b \end{matrix}\right\}$ eşitliklerinden, $p = \frac{a+b}{2}$, $q = \frac{a-b}{2}$

bulunur.

Bu değerler (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\boxed{\cos a + \cos b = 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ bulunur.

b) $\cos(p+q) = \cos p.\sin q - \sin p.\cos q$

$\cos(p-q) = \cos p.\cos q + \sin p.\sin q$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$\cos(p+q) - \cos(p-q) = -2\sin p.\sin q$ elde edilir.

$p = \frac{a+b}{2}$ ve $q = \frac{a-b}{2}$ değerleri bu eşitlikte

yerine yazılırsa,

$\boxed{\cos a - \cos b = -2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ bulunur.

c) $\sin(p+q) = \sin p.\cos q + \cos p.\sin q$

$\sin(p-q) = \sin p.\cos q - \cos p.\sin q$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$\sin(p+q) + \sin(p-q) = 2\sin p.\cos q$ elde edilir.

$p = \frac{a+b}{2}$ ve $q = \frac{a-b}{2}$ değerleri bu eşitlikte

yerine yazılırsa,

$\boxed{\sin a + \sin b = 2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ bulunur.

d) Son eşitlikte b yerine –b yazılırsa,

$\sin a + \sin(-b) = 2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\sin a - \sin = 2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Örnek:

$x=\frac{\pi}{12}$ ise, $\frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x+\sin x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x+\sin x}=\frac{2.\cos\frac{5x+3x}{2}.\cos\frac{5x-3x}{2}}{2.\sin\frac{5x+3x}{2}.\cos\frac{5x-3x}{2}}$$

$$=\frac{2.\cos 4x.\cos x}{2.\sin 4x.\cos x}=\cot 4x=\cot\frac{4\pi}{12}$$

$$\frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x+\sin x}=\cot 60^{o}=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\cos 130^{o}-\sin 20^{o}+\cos 10^{o}+\sin 150^{o}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\cos 130^{o}-\sin 20^{o}+\cos 10^{o}+\sin 150^{o}=x$ olsun.

$$x=\cos 130^{o}+\cos 10^{o}+\sin 150^{o}-\sin 20^{o}$$

$$=2.\cos\frac{130^{o}+10^{o}}{2}.\cos\frac{130^{o}-10^{o}}{2}^{o}+\frac{1}{2}-\sin 20^{o}$$

$$=2.\cos 70^{o}.\cos 60^{o}+\frac{1}{2}-\sin 20^{o}$$

$$=2.\sin 20^{o}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\sin 20^{o}$$

$$=\sin 20^{o}+\frac{1}{2}-\sin 20^{o}=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\cos 25^{o}=x.\sqrt{2}$ olmak üzere $\sin 70^{o}+\cos 70^{o}$ ifadesinin x türünden değeri nedir?

Çözüm:

Toplamı 90^{o} olan iki açıdan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne eşit olduğu için $\cos 70^{o}=\sin 20^{o}$ dir.

Verilen ifadedeki $\cos 70^{o}$ yerine $\sin 20^{o}$ yi yazıp sonra da dönüşüm formülünü uygulayalım.

$$\sin 70^{o}+\cos 70^{o}=\sin 70^{o}+\sin 20^{o}$$

$$=2.\sin\frac{70^{o}+20^{o}}{2}.\cos\frac{70^{o}-20^{o}}{2}$$

$$=2.\sin 45^{o}.\cos 25^{o}$$

$$=2.\frac{\sqrt{2}}{2}.x.\sqrt{2}=2x \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\cos\left(-105^{o}\right)+\cos 15^{o}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\cos\left(-105^{o}\right)+\cos 15^{o}=\cos 105^{o}+\cos 15^{o}$$

$$=2.\cos\frac{105^{o}+15^{o}}{2}.\cos\frac{105^{o}-15^{o}}{2}$$

$$=2.\cos 60^{o}.\cos 45^{o}$$

$$=2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\operatorname{cosec} 18^{o}-\sec 36^{o}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Toplamı 90^{o} olan iki açıdan birinin sekantı diğerinin kosekantına eşit olduğu için $\sec 36^{o}=\operatorname{cosec} 54^{o}$ dir.

Buna göre,

$$\operatorname{cosec}18^\circ - \sec 36^\circ = \operatorname{cosec}18^\circ - \operatorname{cosec}54^\circ$$

$$= \frac{1}{\sin 18^\circ} - \frac{1}{\sin 54^\circ}$$

$$= \frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ . \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{2.\sin\frac{54^\circ - 18^\circ}{2} . \cos\frac{54^\circ + 18^\circ}{2}}{\sin 54^\circ . \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{2.\sin 18^\circ . \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ . \sin 18^\circ} = \frac{2.\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = 2$$

bulunur.

Örnek:

$\dfrac{\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 50^\circ}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = 2.\sin\frac{10^\circ + 50^\circ}{2} . \cos\frac{10^\circ - 50^\circ}{2}$$

$$= 2.\sin 30^\circ . \cos(-20^\circ) = 2.\sin 30^\circ . \cos 20^\circ$$

$$\cos 10^\circ + \cos 50^\circ = 2.\cos\frac{10^\circ + 50^\circ}{2} . \cos\frac{10^\circ - 50^\circ}{2}$$

$$= 2.\cos 30^\circ . \cos(-20^\circ) = 2.\cos 30^\circ . \cos 20^\circ$$

Buna göre,

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 50^\circ}$$

$$= \frac{2.\sin 30^\circ . \cos 20^\circ + \sin 30^\circ}{2.\cos 30^\circ . \cos 20^\circ + \cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ . (2.\cos 20^\circ + 1)}{\cos 30^\circ . (2.\cos 20^\circ + \cos 30^\circ)}$$

$= \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Sonuç

- $\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a . \cos b}$
- $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a . \cos b}$
- $\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a . \sin b}$
- $\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a . \sin b}$

Örnek:

$\tan 75^\circ + \tan 15^\circ$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan 75^\circ + \tan 15^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 75^\circ . \cos 15^\circ + \cos 75^\circ . \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ \cos 75^\circ}$$

$$= \frac{\sin(75^\circ + 15^\circ)}{\cos 15^\circ . \sin 15^\circ} = \frac{\sin 90^\circ}{\frac{1}{2} . \sin(2.15^0)}$$

$= \dfrac{\sin 90^\circ}{\frac{\sin 30^\circ}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ bulunur.

Örnek:

$\cot\frac{a}{2} - \cot a$ ifadesinin eşiti olan ifadeyi bulalım.

Çözüm:

$$\cot\frac{a}{2} - \cot a = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} - \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$= \frac{\sin a.\cos\frac{a}{2} - \cos a.\sin\frac{a}{2}}{\sin a.\sin\frac{a}{2}} = \frac{\sin\left(a - \frac{a}{2}\right)}{\sin a.\sin\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin a.\sin\frac{a}{2}} = \operatorname{cosec} a$$

Kural

- $\dfrac{\sin x + \sin\frac{x+y}{2} + \sin y}{\cos x + \cos\frac{x+y}{2} + \cos y} = \tan\dfrac{x+y}{2}$ dir.

- $\dfrac{\cos x + \cos\frac{x+y}{2} + \cos y}{\sin x + \sin\frac{x+y}{2} + \sin y} = \cot\dfrac{x+y}{2}$ dir.

Örnek:

$\dfrac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x} = \frac{\sin x + \sin\frac{x+7x}{2} + \sin 7x}{\cos x + \cos\frac{x+7x}{2} + \cos 7x}$$

$$= \tan\frac{x+7x}{2} = \tan 4x \text{ tir.}$$

Örnek:

$\dfrac{\cos 5^o + \cos 13^o + \cos 21^o}{\sin 5^o + \sin 13^o + \sin 21^o}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

5,13,21 sayılarının ardışık terimleri arasındaki fark sabittir.

Aynı zamanda, $\frac{5+21}{2} = 13$ tür.

Bu durumda,

$$\frac{\cos 5^o + \cos 13^o + \cos 21^o}{\sin 5^o + \sin 13^o + \sin 21^o}$$

$$= \frac{\cos 5^o + \cos\frac{5^o + 21^o}{2} + \cos 21^o}{\sin 5^o + \sin\frac{5^o + 21^o}{2} + \sin 21^o}$$

$$= \cot\frac{5^o + 21^o}{2} = \cot 13^o \text{ tür.}$$

Örnek:

$\dfrac{\sin x + \sin 5x + \sin 9x + \sin 13x}{\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \cos 13x}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

Yukarıdaki örneği genelleştirebiliriz:

Yukarıdaki örnekteki gibi; pay ve payda ardışık iki terimin açılarının artış miktarının sabit olduğu dizilimlerde ilk terimin açı değeri ile son terimin açı değerinin ortalaması (toplamın yarısı) sonucun açı değerini verir.

Kesrin payındaki terimler sinüslü, paydasındaki terimler de kosinüslü ise sonuç tanjantlıdır. Eğer kesrin payındaki terim kosinüslü, paydasındaki terimler de sinüslü ise sonuç kotanjantlıdır.

x, 5x, 9x, 13x te ardışık iki terimin farkı sabit olduğu için yukarıdaki anlatılanlara göre,

$$\frac{\sin x+\sin 5x+\sin 9x+\sin 13x}{\cos x+\cos 5x+\cos 9x+\cos 13x}=\frac{\sin\frac{x+13x}{2}}{\cos\frac{x+13x}{2}}$$

$$=\tan\frac{x+13x}{2}=\tan 7x \text{ olur.}$$

Örnek:

$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 7x+\sin 9x}{\sin 5x.\cos 3x.\cos x}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\sin x+\sin 9x=2.\sin\frac{x+9x}{2}.\cos\frac{x-9x}{2}$$

$$=2.\sin 5x.\cos(-4x)=2.\sin 5x.\cos 4x \ldots(1)$$

$$\sin 3x+\sin 7x=2.\sin\frac{3x+7x}{2}.\cos\frac{3x-7x}{2}$$

$$=2.\sin 5x.\cos(-2x)=2.\sin 5x.\cos 2x \ldots(2)$$

$$\cos 4x+\cos 2x=2.\cos\frac{4x+2x}{2}.\cos\frac{4x-2x}{2}$$

$$=2.\cos 3x.\cos x \ldots(3)$$

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 7x+\sin 9x}{\sin 5x.\cos 3x.\cos x}$$

$$=\frac{2.\sin 5x.\cos 4x+2.\sin 5x.\cos 2x}{\sin 5x.\cos 3x.\cos x}$$

$$=\frac{2.\sin 5x.(\cos 4x+\cos 2x)}{\sin 5x.\cos 3x.\cos x}$$

$$=\frac{2.\sin 5x.(2.\cos 3x.\cos x)}{\sin 5x.\cos 3x.\cos x}=4 \text{ bulunur.}$$

II. Ters Dönüşüm Formülleri

Çarpım durumundaki trigonometrik ifadeleri toplam biçimine getirmeye yarayan trigonometrik eşitliklere ters dönüşüm formülleri denir. Bu formüller toplam ve fark formüllerinden elde edilir.

a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

a) $\cos a.\cos b=\frac{1}{2}.[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ dir.

b) $\sin a.\sin b=-\frac{1}{2}.[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$ dir.

c) $\sin a.\cos b=\frac{1}{2}.[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ dir.

d) $\cos a.\sin b=\frac{1}{2}.[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$ dir.

İspat:

Toplam ve fark formüllerinden,

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$$

eşitlikleri önce taraf tarafa toplanır, sonra çıkarılırsa,

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2.\cos a.\cos b \ldots(1)$$

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2.\sin a.\sin b \ldots(2) \text{ bulunur.}$$

Buradan,

$$\boxed{\cos a.\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]} \text{ ve}$$

$$\boxed{\sin a.\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]} \text{ bulunur.}$$

Toplam ve fark formüllerinden,

$$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$$

eşitlikleri önce taraf tarafa toplanır, sonra çıkarılırsa,

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2.\sin.\cos b$ ...(1)

$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2.\cos a.\sin b$ ...(2) bulunur.

Buradan,

$\boxed{\sin a.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]}$ ve

$\boxed{\cos a.\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]}$ bulunur.

Örnek:

$\sin\frac{7\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\sin\frac{7\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} \text{ olur.}$$

Örnek:

$\sin 70^{o}=x$ ise $\cos 55^{o}.\cos 35^{o}$ ifadesinin x türünden değeri nedir?

Çözüm:

$$\cos 55^{o}.\cos 35^{o}=\frac{1}{2}.[\cos(55^{o}+35^{o})+\cos(55^{o}-35^{o})]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[\cos 90^{o}+\cos 20^{o}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[\cos 90^{o}+\sin 70^{o}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.[0+x]=\frac{x}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\cos 80^{o}.\cos 60^{o}.\cos 20^{o}.\cos 40^{o}$ ifadesinin şitini bulunuz.

Çözüm:

$$\cos 80^{o}.\cos 40^{o}=\frac{1}{2}.\left[\cos 120^{o}+\cos 40^{o}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[-\frac{1}{2}+\cos 40^{o}\right] \text{ dir.}$$

$$\cos 80^{o}.\cos 60^{o}.\cos 20^{o}.\cos 40^{o}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+\cos 40^{o}\right].\cos 20^{o}$$

$$=-\frac{1}{8}.\cos 20^{o}+\frac{1}{4}.\cos 40^{o}.\cos 20^{o}$$

$$=-\frac{1}{8}.\cos 20^{o}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left[\cos 60^{o}+\cos 20^{o}\right]$$

$$=-\frac{1}{8}.\cos 20^{o}+\frac{1}{8}.\cos 60^{o}+\frac{1}{8}.\cos 20^{o}$$

$$=\frac{1}{8}.\cos 60^{o}=\frac{1}{8}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$4.\sin x.\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$\sin a.\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$ olduğundan,

$$4.\sin x.\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$=4.\sin x.\frac{-1}{2}.\left[\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 2x\right]$$

$$=-2.\sin x.\left[-\frac{1}{2}-\cos 2x\right]=\sin x+2.\sin x.\cos 2x$$

$$=\sin x+2.\sin x.\left(1-2.\sin^2 x\right)$$

$$=\sin x+2.\sin x-4.\sin^3 x$$

$$=3.\sin x-4.\sin^3 x=\sin 3x \text{ olur.}$$

Örnek:

$\sin 15^{\circ}.\cos 75^{\circ}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$ olduğundan,

$$\sin 15^{\circ}.\cos 75^{\circ}=\frac{1}{2}.\left[\sin 90^{\circ}+\sin\left(-60^{\circ}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[\sin 90^{\circ}-\sin 60^{\circ}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}=-\frac{1}{2}.\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{2}-\cos\frac{\pi}{9}\right]=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\cos\frac{\pi}{9} \ldots(1) \text{ dur.}$$

$\frac{4\pi}{9}+\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{2}$ olduğu için $\sin\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{18}$ dir.

Buna göre,

$$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{18}$$

$$=\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\cos\frac{\pi}{9}\right].\cos\frac{\pi}{18}$$

$$=-\frac{1}{4}.\cos\frac{\pi}{18}+\frac{1}{2}.\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{18}$$

$$=-\frac{1}{4}.\cos\frac{\pi}{18}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{18}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}.\cos\frac{\pi}{18}+\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\pi}{18}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}.\cos\frac{\pi}{18}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{4}.\cos\frac{\pi}{18}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\cot 10^{\circ}=x$ olmak üzere $\cos 10^{\circ}.\cos 20^{\circ}.\cos 40^{\circ}$ ifadesinin x türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

Çarpımı, ters dönüşüm formülünü kullanarak çözebiliriz. Ancak burada başka bir yöntem kullanacağız. Çözüm için sinüsün yarım açı formülünden yararlanmak için; ifadeyi $2.\sin 10^{\circ}$ ile çarpıp, $2.\sin 10^{\circ}$ ile bölelim.

$$\cos 10^{\circ}.\cos 20^{\circ}.\cos 40^{\circ}$$

$$=\frac{2.\sin10^{o}.\cos10^{o}.\cos20^{o}.\cos40^{o}}{2.\sin10^{o}}$$

$$=\frac{\sin20^{o}.\cos20^{o}\cos40^{o}}{2.\sin10^{o}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin40^{o}.\cos40^{o}}{2.\sin10^{o}}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin80}{2.\sin10^{o}}=\frac{\sin80^{o}}{8.\sin10^{o}}$$

$$=\frac{\cos10^{o}}{8.\sin10^{o}}=\frac{1}{8}.\cot10^{o}=\frac{x}{8}\ \text{bulunur.}$$

Örnek:

$\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{4\pi}{3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Bir önceki örnekte yapılan işlemleri tekrar ettirirsek, ifadeyi

$2.\sin\frac{\pi}{3}$ ile çarpıp, $2.\sin\frac{\pi}{3}$ ile bölelim.

$$\frac{2.\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{4\pi}{3}}{2.\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}.\sin\frac{4\pi}{3}}{2.\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}.\sin\frac{4\pi}{3}.\cos\frac{4\pi}{3}}{2.\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\sin\frac{8\pi}{3}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{8}\ \text{bulunur.}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}.\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{8}\ \text{bulunur.}$$

Çözümlü Sorular

1. $3x+3y=\pi$ olmak üzere, $\frac{\cos x-\cos y}{\sin x-\sin y}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\cos x-\cos y}{\sin x-\sin y}=\frac{-2.\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}}{2.\sin\frac{x-y}{2}.\cos\frac{x+y}{2}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{bulunur.}$$

2. $\tan\left[\arctan\frac{1}{2}+\operatorname{arc}\cot\frac{2}{3}\right]$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$\arctan\frac{1}{2}=\theta$ ve $\operatorname{arc}\cot\frac{2}{3}=\alpha$ olsun.

Bu durumda

$\tan\theta=\frac{1}{2}$ ve $\cot\alpha=\frac{2}{3}$ olur.

$\cot\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{3}{2}$ dir.

Buna göre,

$$\tan\left[\arctan\frac{1}{2}+\operatorname{arc}\cot\frac{2}{3}\right]=\tan(\theta+\alpha)$$

$$=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta.\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8\ \text{bulunur.}$$

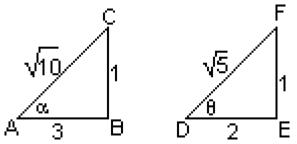
3. $\text{arc}\cot 3 + \tan\frac{1}{2} = \arcsin x$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$\text{arc}\cot 3 = \alpha \Rightarrow \cot\alpha = 3$ tür.

$\arctan\frac{1}{2} = \theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$ dir.

Bu iki duruma uygun dik üçgenler çizilirse,



$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ bulunur.

$\text{arc}\cot 3 + \tan\frac{1}{2} = \arcsin x$

$\Rightarrow \alpha + \theta = \arcsin x$

$\Rightarrow x = \sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha.\cos\theta + \cos\alpha.\sin\theta$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

4. $\frac{\sin 36^{\circ}}{\sin 12^{\circ}} - \frac{\cos 36^{\circ}}{\cos 12^{\circ}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{\sin 36^{\circ}}{\sin 12^{\circ}} - \frac{\cos 36^{\circ}}{\cos 12^{\circ}} = \frac{\sin 36^{\circ}.\cos 12^{\circ} - \cos 36^{\circ}.\sin 12^{\circ}}{\sin 12^{\circ}.\cos 12^{\circ}}$$

$$= \frac{\sin(36^{\circ} - 12^{\circ})}{\frac{1}{2}\sin 24^{\circ}} = \frac{2.\sin 24^{\circ}}{\sin 24^{\circ}} = 2 \text{ bulunur.}$$

5. $\sin 25^{\circ} = x$ olmak üzere $\cos 40^{\circ}$ ifadesinin x türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

$\sin 25^{\circ} = x$ olmak üzere,

$\sin^2 25^{\circ} + \cos^2 25^{\circ} = 1 \Rightarrow \cos 25^{\circ} = \sqrt{1 - x^2}$ dir.

Toplamı 90° olan iki açıdan birinin kosinüsü diğerinin sinüsüne eşit olduğu için, $\cos 40^{\circ} = \sin 50^{\circ}$ dir.

Buna göre,

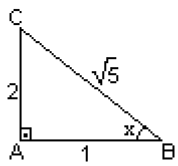
$\cos 40^{\circ} = \sin 50^{\circ} = \sin(2.25^{\circ})$

$= 2.\sin 25^{\circ}.\cos 25^{\circ} = 2.x.\sqrt{1 - x^2}$ bulunur.

6. $\tan x = 2$ olmak üzere $\sin 2x + \cos 2x$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$\tan x = 2$ koşuluna uyan dik üçgeni çizersek,



$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

olduğuna göre,

$\sin 2x + \cos 2x = 2.\sin x.\cos x + 2.\cos^2 x - 1$

$= 2.\frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}} + 2.\frac{1}{5} - 1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{1}{5}$ bulunur.

7. $11x = 270^{\circ}$ olmak üzere $\frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin x.\cos 7x}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$11x = 270^{\circ} \Rightarrow 4x + 7x = 270^{\circ}$ dir.

Bu durumda,

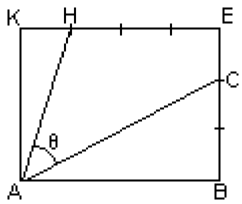
$\sin 4x = \sin\left(270^{o} - 7x\right) = -\cos 7x$ olur.

Buna göre,

$$\frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin x.\cos 7x} = \frac{-2.\sin\frac{5x-3x}{2}.\sin\frac{5x+3x}{2}}{\sin x.\cos 7x}$$

$$= \frac{-2.\sin x.\sin 4x}{\sin x.\cos 7x} = \frac{-2.(-\cos 7x)}{\cos 7x} = 2 \text{ dir.}$$

8. Aşağıdaki şekilde ABEK dikdörtgendir.



$|HE| = 3.|KH|$,

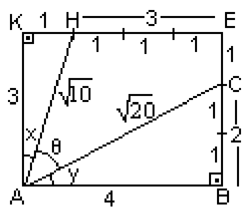
$|BC| = 2.|CE|$,

$|KH| = |CE|$,

$3.|AB| = 4.|BE|$, $m(H\hat{A}C) = \theta$ olduğuna göre $\sin\theta$ kaçtır?

Çözüm:

Aşağıdaki şekilde ABEK dikdörtgeninde,



$|KH| = 1$, $|KA| = 3$

$|CB| = 2$, $|AB| = 4$

$m(K\hat{A}H) = x$,

$m(C\hat{A}H) = y$ olsun.

$|HE| = 3.|KH|$, $|BC| = 2.|CE|$, $|KH| = |CE|$, $3.|AB| = 4.|BE|$ dir.

Buna göre,

$\sin\theta = \sin\left(90^{o} - (x+y)\right) = \cos(x+y)$

$= \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{4}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{2}{\sqrt{20}}$$

$$= \frac{12-2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

9. $270^{o} < x < 360^{o}$ olmak üzere $3.\cos x = 1$ olduğuna göre $\cos\frac{x}{2}$ kaçtır?

Çözüm:

$270^{o} < x < 360^{o} \Rightarrow 135^{o} < \frac{x}{2} < 180^{o}$ dir.

$\frac{x}{2}$ ikinci bölgede olduğu için $\cos\frac{x}{2} < 0$ dır.

$3.\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$ tür.

$\cos 2x = 2.\cos^{2} x - 1$ olduğuna göre,

$$\cos x = 2.\cos^{2}\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = 2.\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2} - 1$$

$$\Rightarrow 2.\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2} = \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ tür.}$$