A. Periyodik Fonksiyonlar

Ay, Dünya ve Güneş'in hareketleri ile Ay ve Güneş tutulmaları belirli süreler içinde tekrarlanır. Bu tür olayların periyodik olarak meydana geldiğini söyleriz.

Matematikte de bazı fonksiyonların grafikleri belli aralıklarda kendilerini yinelerler. Bu tür fonksiyonlar periyodik fonksiyon olarak adlandırılır.

f, A kümesinden B kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun.

$f : A \to B$ olmak üzere

$\forall x \in A$ için $f(x+T) = f(x)$

olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir T reel sayısı varsa; f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T reel sayısına f fonksiyonunun **periyodu** denir.

Bu eşitliği sağlayan birden fazla T reel sayısı varsa, bunların pozitif olanlarının en küçüğüne f fonksiyonunun **esas periyodu** denir.

Örnek:

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunu inceleyelim.
Sinüs fonksiyonunun tanımından $\sin(x + k.2\pi) = \sin(x)$ olduğunu biliyoruz.

$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \sin(x+T) = \sin(x)$

$\Rightarrow x + T = x + k.2\pi$

$\Rightarrow T = k.2\pi$ bulunur.

T reel sayısının en küçük olması k = 1 ile

mümkündür. O halde

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu periyodiktir. Periyodu $\boxed{T = 2\pi}$ dir.

Örnek:

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunu inceleyelim.
Kosinüs fonksiyonunun tanımından

$\cos(x + k.2\pi) = \cos(x)$ olduğunu biliyoruz.

$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cos(x+T) = \cos(x)$

$\Rightarrow x + T = x + k.2\pi$

$\Rightarrow T = k.2\pi$ bulunur.

T reel sayısının en küçük olması k = 1 ile mümkündür.

O halde

$f(x) = \cos x$ fonksiyonu periyodiktir. Periyodu $\boxed{T = 2\pi}$ dir.

Örnek:

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunu inceleyelim.
Tanjant fonksiyonunun tanımından $\tan(x + k.\pi) = \tan(x)$ olduğunu biliyoruz.

$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \tan(x+T) = \tan(x)$

$\Rightarrow x + T = x + k.\pi$

$\Rightarrow T = k.\pi$ bulunur.

T reel sayısının en küçük olması k = 1 ile mümkündür.

O halde

$f(x) = \tan x$ fonksiyonu periyodiktir. Periyodu $\boxed{T = \pi}$ dir.

Örnek:

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunu inceleyelim.
Kotanjant fonksiyonunun tanımından $\cot(x + k.\pi) = \cot(x)$ olduğunu biliyoruz.

$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cot(x+T) = \cot(x)$

$\Rightarrow x + T = x + k.\pi$

$\Rightarrow T = k.\pi$ bulunur.

T reel sayısının en küçük olması k = 1 ile mümkündür.

O halde

$f(x) = \cot x$ fonksiyonu periyodiktir. Periyodu $\boxed{T = \pi}$ dir.

Kural

1. a,b,c,d birer reel sayı ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$f(x)=a+b.\sin^{m}(cx+d)$$

$$g(x)=a+b.\cos^{m}(cx+d)$$

fonksiyonlarının esas periyotları T olsun.

$$T=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{|c|}, & m \text{ tek ise}\\[2mm] \dfrac{\pi}{|c|}, & m \text{ çift ise}\end{cases} \quad \text{olur.}$$

2. a,b,c,d birer reel sayı ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$f(x)=a+b.\tan^{m}(cx+d)$$

$$g(x)=a+b.\cot^{m}(cx+d)$$

fonksiyonlarının esas periyotları T olsun.

$T=\dfrac{\pi}{|c|}$ dir.

Örnek:

$f(x)=2.\sin(3x+1)$ fonksiyonunun periyodu

$T=\dfrac{2\pi}{|3|}=\dfrac{2\pi}{3}$ tür. (m = 1 tek)

Örnek:

$g(x)=3.\cos\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)$ fonksiyonunun periyodu

$T=\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{2}\right|}=4\pi$ dir. (m = 1 tek)

Örnek:

$f(x)=\sin^{7}(8x+5)$ fonksiyonunun periyodu

$T=\dfrac{2\pi}{|8|}=\dfrac{\pi}{4}$ tür. (m = 7 tek)

Örnek:

$g(x)=3+\cos^{4}(-2x+6)$ fonksiyonunun periyodu

$T=\dfrac{\pi}{|-2|}=\dfrac{\pi}{2}$ dir. (m = 4 çift)

Örnek:

$f(x)=-3-\tan^{7}(-10x+1)$ fonksiyonunun periyodu

$T=\dfrac{\pi}{|-10|}=\dfrac{\pi}{10}$ dur.

Örnek:

$f(x)=2\cot(3x-2)$ fonksiyonunun periyodu

$T=\dfrac{\pi}{|3|}=\dfrac{\pi}{3}$ tür.

Kural

$f(x)=g(x)+h(x)$ fonksiyonlarının esas periyodu $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının esas periyotlarının en küçük ortak katına (e.k.o.k) eşittir.

$\text{E.K.O.K.}\left(\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{\text{E.K.O.K.}(a,c)}{\text{E.B.O.B.}(a,c)}$ dir.

Burada $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ kesirleri en sade biçimde olmalıdırlar.

Örnek:

$f(x) = \sin 6x - \tan(-9x+1)$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözüm:

$\sin 6x$ fonksiyonunun periyodu

$\dfrac{2\pi}{|6|} = \dfrac{\pi}{3}$ tür. (m = 1 tek)

$\tan(-9x+1)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \dfrac{\pi}{|-9|} = \dfrac{\pi}{9}$ dur.

$f(x) = \sin 6x - \tan(-9x+1)$ fonksiyonunun periyodu,

E.K.O.K.$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{9}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ bulunur.

Örnek:

$f(x) = \sin x - \cos x$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözüm:

$\sin x$ fonksiyonunun periyodu

$\dfrac{2\pi}{|1|} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ dir. (m = 1 tek)

$\cos x$ fonksiyonunun periyodu

$\dfrac{2\pi}{|1|} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ dir. (m = 1 tek)

$f(x) = \sin x - \cos x$ fonksiyonunun periyodu,

E.K.O.K.$(2\pi, 2\pi) = 2\pi$ bulunur

Örnek:

$f(x) = 2.\sin\left(\dfrac{1}{3}x+1\right) - 3.\cos\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözüm:

$\sin\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)$ fonksiyonunun periyodu

$\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{3}\right|} = 6\pi$ tür. (m = 1 tek)

$\cos\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{2}\right|} = 4\pi$ dur.

$f(x) = 2.\sin\left(\dfrac{1}{3}x+1\right) - 3.\cos\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ fonksiyonunun periyodu,

E.K.O.K.$(6\pi, 4\pi) = 12\pi$ bulunur.

Örnek:

$f(x) = 2.\tan 3x + \cot\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözüm:

$\tan 3x$ fonksiyonunun periyodu $\dfrac{\pi}{|3|} = \dfrac{\pi}{3}$ tür.

$\cot\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun periyodu $\dfrac{\pi}{|5|} = \dfrac{\pi}{5}$ tir.

$f(x) = 2.\tan 3x + \cot\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun periyodu,

E.K.O.K.$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{5}\right) = \pi$ bulunur.

B. Trigonometrik Fonksiyonların Bölgelere Göre İşaretleri

Koordinat sisteminde, birim çemberdeki dört bölgeye göre trigonometrik fonksiyonların işaretleri aşağıda verilmiştir.

2.Bölge (x,y)=(-,+) $90^o < \alpha < 180^o$ $\cos\alpha < 0$ $\sin\alpha > 0$	**1.Bölge** (x,y)=(+,+) $0^o < \alpha < 90^o$ $\cos\alpha > 0$ $\sin\alpha > 0$
3.Bölge (x,y)=(-,-) $180^o < \alpha < 270^o$ $\cos\alpha < 0$ $\sin\alpha < 0$	**4. Bölge** (x,y)=(+,-) $270^o < \alpha < 360^o$ $\cos\alpha > 0$ $\sin\alpha < 0$

Uyarı

$\cos\alpha$ nın işaretinin $\sin\alpha$ nın işaretine bölümü $\cot\alpha$ nın işaretini, $\sin\alpha$ nın işaretinin $\cos\alpha$ nın işaretine bölümü $\tan\alpha$ nın işaretini verir.

$\tan\alpha$ ile $\cot\alpha$ nın işaretleri her bölgede aynıdır.

Örnek:

$a = \cos 280^o$, $b = \tan 186^o$, $c = \cot 400^o$
olduğuna göre a, b, c nin işaretlerini belirleyiniz.

Çözüm:

$270^o < 280^o < 360^o$ olduğundan 280^o açısı 4. bölgededir. Dördüncü bölgede kosinüs fonksiyonunun aldığı değerler devamlı pozitif olduğundan $a = \cos 280^o$ nin işareti; + dır.

$180^o < 186^o < 270^o$ olduğundan 186^o açısı 3. bölgededir. Üçüncü bölgede tanjant fonksiyonunun aldığı değerler devamlı pozitif olduğundan $b = \tan 186^o$ nin işareti; + dır.

$400^o = 40^o + 1.360^o$ olduğundan 400^o nin esas ölçüsü 40^o olup 1.bölgededir. 1. bölgede kotanjant fonksiyonu pozitif değerler aldığından

$c = \cot 400^o$ nin işareti; + dır.

Örnek:

$\cos\frac{10\pi}{6}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\tan\frac{7\pi}{9}$, $\cot\frac{11\pi}{3}$ ifadelerinin işaretlerini belirleyiniz.

Çözüm:

$\frac{3\pi}{2} < \frac{10\pi}{6} < 2\pi$ olduğundan $\frac{10\pi}{6}$ açısı 4. bölgededir.
$\cos\frac{10\pi}{6}$ pozitiftir.

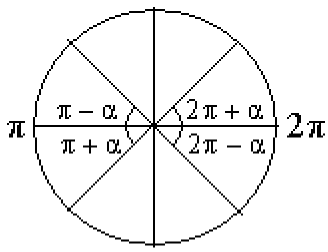
$0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\frac{2\pi}{5}$ açısı 1. bölgededir. $\sin\frac{2\pi}{5}$ pozitiftir.

$\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{9} < \pi$ olduğundan $\frac{7\pi}{9}$ açısı 2. bölgededir. $\tan\frac{7\pi}{9}$ negatiftir.

$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{3} < 2\pi$ olduğundan $\frac{11\pi}{3}$ açısı 4. bölgededir.
$\cot\frac{11\pi}{3}$ negatiftir.

C. Birim Çemberde Eksenlere Ve Orjine Göre Simetrik Açılar

a. Ox Eksenine Göre Simetrik Açılar



α dar açı olmak üzere

$\cos(\pi \mp \alpha)$, $\sin(\pi \mp \alpha)$, $\tan(\pi \mp \alpha)$, $\cot(\pi \mp \alpha)$,

$\cos(2\pi \mp \alpha)$, $\sin(2\pi \mp \alpha)$, $\tan(2\pi \mp \alpha)$, $\cot(2\pi \mp \alpha)$

ifadelerinin özdeşi bulunurken trigonometrik değerin hangi bölgede olduğu bulunur. Daha sonra fonksiyonun o bölgedeki işaretine belirlenir. Eşitliğin her iki tarafında fonksiyonların adı aynı olur.

Buna göre,

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(2\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(2\pi + \alpha) = \cot\alpha$

Örnek:

300° nin trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$300^{\circ} = 360^{\circ} - 60^{\circ}$ olup açı 4. bölgededir.

$$\sin 300^{\circ} = \sin(360^{\circ} - 60^{\circ}) = -\sin 60^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300^{\circ} = \cos(360^{\circ} - 60^{\circ}) = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^{\circ} = \tan(360^{\circ} - 60^{\circ}) = -\tan 60^{\circ} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 300^{\circ} = \cot(360^{\circ} - 60^{\circ}) = -\cot 60^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

-225° nin trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm:

-225° nin esas ölçüsü $360^{\circ} - 225^{\circ} = 135^{\circ}$ dir

$135^{\circ} = 180^{\circ} - 45^{\circ}$ olup açı 2. bölgededir.

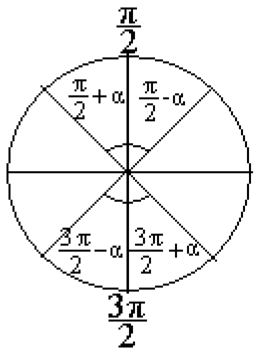
$$\sin 135^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 45^{\circ}) = \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^{\circ} = \cos(180^{\circ} - 45^{\circ}) = -\cos 45^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^{\circ} = \tan(180^{\circ} - 45^{\circ}) = -\tan 45^{\circ} = -1$$

$$\cot 135^{\circ} = \cot(180^{\circ} - 45^{\circ}) = -\cot 45^{\circ} = -1 \text{ bulunur.}$$

b. Oy Eksenine Göre Simetrik Açılar



$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$,

$\cot\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha\right)$,

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha\right)$, $\cot\left(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha\right)$ ifadelerinin özdeşi

bulunurken trigonometrik değerin hangi bölgede olduğu bulunur. daha sonra fonksiyonun o bölgedeki işaretine belirlenir. Eşitliğin her iki tarafında fonksiyonların adı farklı olur. Bu fraklılık sinüs için kosinüs, kosinüs için sinüs, tanjant için kotanjant, kotanjant için de tanjanttır.

Buna göre,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\quad\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$ $\quad\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\quad\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\quad\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot$ $\quad\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$ $\quad\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

Örnek:

240^{o} nin trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$240^{o}=270^{o}-30^{o}$ olup açı 3. bölgededir.

$\sin 240^{o}=\sin\left(270^{o}-30^{o}\right)=-\cos 30^{o}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240^{o}=\cos\left(270^{o}-30^{o}\right)=-\sin 30^{o}=-\frac{1}{2}$

$\tan 240^{o}=\tan\left(270^{o}-30^{o}\right)=\cot 30^{o}=\sqrt{3}$

$\cot 240^{o}=\cot\left(270^{o}-30^{o}\right)=\tan 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Örnek:

$\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$ ve $\tan\left(\frac{79\pi}{6}\right)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$\frac{22\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+3.2\pi$ olup esas ölçüsü $\frac{4\pi}{3}$ tür.

$\frac{79\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+6.2\pi$ olup esas ölçüsü $\frac{7\pi}{6}$ dır.

$\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos 240^{o}=-\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{79\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan 210^{o}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Örnek:

$\cos\left(-1200^{o}\right)$ değerini bulalım.

Çözüm:

-1200^{o} nin esas ölçüsü 240^{o} dir.

$\cos\left(-1200^{o}\right)=\cos 240^{o}=-\frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek:

$\frac{7\pi}{6}$ radyanlık açının trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözüm:

$\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$ olup açı 3. bölgededir.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cot\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ bulunur.

Örnek:

$\sin 80^{o}=a^{-1}$ ise $\cos^{2}100^{o}+\tan 280^{o}.\cot 260^{o}$ ifadesinin a türünden değeri nedir?

Çözüm:

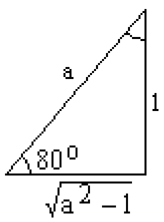
$$\sin 80^{o}=a^{-1}=\frac{1}{a}$$

$$\cos^{2}100^{o}=\left(\cos\left(180^{o}-80^{o}\right)\right)^{2}$$

$$=\left(-\cos 80^{o}\right)^{2}=\cos^{2}80^{o}$$

$$\tan 280^{o}=\tan\left(360^{o}-80^{o}\right)=-\tan 80^{o}$$

$$\cot 260^{o}=\cot\left(180^{o}+80^{o}\right)=\cot 80^{o}$$



$$\cos^{2}100^{o}+\tan 280^{o}.\cot 260^{o}$$

$$=\cos^{2}80^{o}-\tan 80^{o}.\cot 80^{o}$$

$$=\frac{a^{2}-1}{a^{2}}-\frac{1}{\sqrt{a^{2}-1}}.\frac{\sqrt{a^{2}-1}}{1}$$

$$=\frac{a^{2}-1}{a^{2}}-1=-\frac{1}{a^{2}}$$ bulunur.

Örnek:

840^{o} nin trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$840^{o}=120^{o}+2.360^{o}$ olup esas ölçüsü 120^{o} dir .

Açı 2. bölgededir.

$$\sin 120^{o}=\sin\left(90^{o}+30^{o}\right)=\cos 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{o}=\cos\left(90^{o}+30^{o}\right)=-\sin 30^{o}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^{o}=\tan\left(90^{o}+30^{o}\right)=-\cot 30^{o}=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^{o}=\cot\left(90^{o}+30^{o}\right)=-\tan 30^{o}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$ bulunur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninin açıları arasındaki

$\sin^{2}\frac{A}{2}+\sin^{2}\frac{B+C}{2}$ ve

$\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B+C}{2}$ ifadelerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B+C}{2}=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1$$

$$\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$$

$$=\cot\frac{A}{2}.\tan\frac{A}{2}=1 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin 15^{\circ}=x$ ise $\cos 105^{\circ}$ ifadesinin x türünden değeri nedir?

Çözüm:

$\cos 105^{\circ}=\cos\left(90^{\circ}+15^{\circ}\right)=-\sin 15^{\circ}=-x$ bulunur

Örnek:

$\tan 330^{\circ}$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan 330^{\circ}=\tan\left(270^{\circ}+60^{\circ}\right)=-\cot 60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Örnek:

$\sin\left(x-90^{\circ}\right)$ ifadesinin özdeşini bulalım.

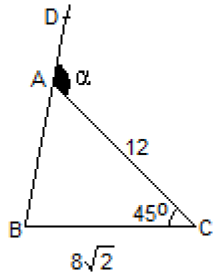
Çözüm:

$$\sin\left(x-90^{\circ}\right)=\sin\left(-\left(90^{\circ}-x\right)\right)$$

$$=\sin\left(360^{\circ}-\left(90^{\circ}-x\right)\right)$$

$$=-\sin\left(90^{\circ}-x\right)=-\cos x$$

Örnek:



Şekilde ABC üçgeni ile B,A,D doğrusal noktaları verilmiştir.

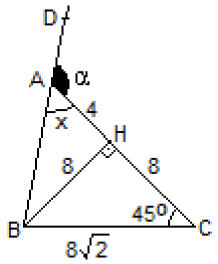
$|BC|=8\sqrt{2}$

$|AC|=12$

$m\left(\widehat{CAD}\right)=\alpha$

olduğuna göre $\tan\alpha$ nın değeri kaçtır?

Çözüm:



$[CA]$ ya dik olacak şekilde $[BH]$ çizelim. C açısı 45° olduğu için, CHB ikizkenar dik üçgeni elde edilir.

$$\cos C=\frac{|HC|}{|BC|}=\cos 45^{\circ}$$

$$\frac{|HC|}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow |HC|=8 \text{ dir.}$$

BHA dik üçgeninde $\tan\left(\widehat{BAC}\right)=\tan x=\frac{8}{4}=2$

Buna göre $\tan\alpha=\tan\left(180^{\circ}-x\right)=-\tan x=-2$ bulunur.

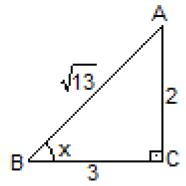
Örnek:

$\tan\left(\pi-x\right)=\frac{2}{3}$ olduğuna göre $\dfrac{\sin x.\cos x}{\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan\left(\pi-x\right)=\frac{2}{3}\Rightarrow -\tan x=\frac{2}{3}\Rightarrow \tan x=-\frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Bunu dik üçgende gösterirsek.



$\cos x = \frac{|BC|}{|AB|} = \mp \frac{3}{\sqrt{13}}$ ise

$\cos^2 x = \frac{9}{13}$ tür.

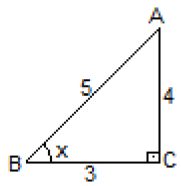
$$\frac{\sin x.\cos x}{\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x.\cos x}{\tan x} = \frac{\sin x.\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \cos^2 x = \frac{9}{13}$$

bulunur.

Örnek:

$90^{\circ} < x < 180^{\circ}$ olmak üzere $\cos x = -\frac{4}{5}$ olduğuna göre $\tan x$ in değeri kaçtır?

Çözüm:



$90^{\circ} < x < 180^{\circ}$ olduğuna göre x açısı 2.bölgede olup $\tan x$ değeri negatiftir.

$\tan x = -\frac{4}{3}$

2.Çözüm:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}, \sin x = -\frac{3}{5}$$

$90^{\circ} < x < 180^{\circ}$ olduğuna göre x açısı 2.bölgede olup $\sin x$ değeri pozitiftir.

O halde $\sin x = \frac{3}{5}$ tir.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Çözümlü Sorular

1. $\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{(1+\sin x)^2 + \cos^2 x}{(1+\sin x)\cos x}$$

$$= \frac{1 + 2.\sin x + \sin^2 + \cos^2 x}{(1+\sin x)\cos x}$$

$$= \frac{2 + 2.\sin x}{(1+\sin x)\cos x}$$

$$= \frac{2.(1+\sin x)}{(1+\sin x)\cos x} = 2\sec x$$

2. $x = \cos(2\pi - \alpha)$ ve $\frac{y}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ olduğuna göre x in y türünden değeri nedir?

Çözüm:

$$x = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\frac{y}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\cos^2\alpha + (-\sin\alpha)^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = x^2 + \frac{y^2}{4}$$

$$1 = x^2 + \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{y^2}{4} = \frac{4-y^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{4-y^2}{2}} \text{ veya } x = -\sqrt{\frac{4-y^2}{2}}$$

3. $\cos(11\pi)+\sin\left(\dfrac{27\pi}{2}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$11\pi=\pi+5.2\pi$ olduğu için esas ölçüsü π dir.

$\dfrac{27\pi}{2}=\dfrac{3\pi+24\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}+6.2\pi$ olduğu için esas ölçüsü $\dfrac{3\pi}{2}$ dir.

Buna göre,

$\cos\pi+\sin\dfrac{3\pi}{2}=(-1)+(-1)=-2$ bulunur.

4. $a=\sin50^{O}-\cos50^{O}$

$b=\tan80^{O}-\cot50^{O}$

$c=\tan160^{O}-\tan190^{O}$

olduğuna göre a,b ve c sayılarının işaretlerini belirleyiniz.

Çözüm:

$\sin50^{O}=\cos40^{O}$ dir.

Birim çemberde $\cos40^{O}$ ve $\cos50^{O}$ gösterilirse

$\cos40^{O}>\cos50^{O}$ olduğu görülür.

$a=\sin50^{O}-\cos50^{O}=\cos40^{O}-\cos50^{O}$ ifadesi pozitiftir.

$\tan80^{O}=\cot10^{O}$ dir.

Birim çemberde $\cot10^{O}$ ve $\cot50^{O}$ gösterilirse

$\cot10^{O}>\cot50^{O}$ olduğu görülür.

$b=\tan80^{O}-\cot50^{O}=\cot10^{O}-\cot50^{O}$ ifadesi pozitiftir.

$\tan160^{O}=\tan\left(180^{O}-20^{O}\right)=-\tan20^{O}$

$\tan190^{O}=\tan\left(180^{O}+10^{O}\right)=\tan10^{O}$ dir.

Birim çembere göre $\tan20^{O}$ ve $\tan10^{O}$ pozitiftir.
Buna göre,

$c=\tan160^{O}-\tan190^{O}=-\left(\tan20^{O}+\tan10^{O}\right)$
ifadesi negatiftir.

5. Yarıçapı 10 metre olan dairesel bir pist etrafında koşan atletin vücudunun düşeyle yaptığı açı α açısı

$\tan\alpha=\dfrac{v^2}{g.r}$ formülü ile tanımlıdır. Burada v koşucunun hızı, r pistin yarıçapı ve g = 9,8 de yer çekim ivmesidir.

Koşucunun düşeyle yaptığı açının sinüsünün $\dfrac{\sqrt5}{5}$ olması için koşucunun hızı kaç m/sn olmalıdır?

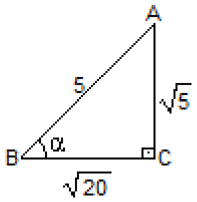
Çözüm:

Koşucunun düşeyle yaptığı açının sinüsü $\dfrac{\sqrt5}{5}$ ise

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5}$ dir.

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5}=\dfrac{\text{Karsı dik kenar uzunlugu}}{\text{Hipotenüs uzunlugu}}$ olduğuna göre karşı dik kenar uzunluğu $\sqrt5$ birim ve hipotenüs uzunluğu 5 birim olabilir.

Pisagor teoreminden $\left(a^2+\left(\sqrt5\right)^2=5^2\right)$ komşu dik kenar uzunluğu $\sqrt{20}$ birim olarak bulunur.



$\tan\alpha=\dfrac{v^2}{g.r}=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt{20}}$

$\Rightarrow\dfrac{v^2}{9{,}8.10}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow v^2=49$

$\Rightarrow v=7$ dir.

6. Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü; $\dfrac{2\pi}{5}$ radyan, 36^{O} ve x^{O} dir. Buna göre x kaç derecedir?

Çözüm:

$\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{2.180^{O}}{5}=72^{O}$ dir.

Üçgenin iç açıları toplamı 180^{o} olduğu için

$x = 180^{o} - 72^{o} - 36^{o} = 72^{o}$ bulunur.

7. $\cos^2 \frac{3\pi}{10} - \cot\frac{5\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{5}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

Ölçüleri toplamı $\frac{\pi}{2} = 90^{o}$ olan iki açıdan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ve $\cot\alpha.\tan\alpha = 1$ dir.

$\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$\cos^2\frac{3\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{5} = \cos^2\frac{3\pi}{10} + \sin^2\frac{3\pi}{10} = 1$ dir.

$\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$-\cot\frac{5\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8} = \cot\frac{5\pi}{8}.\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cot\frac{5\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8} = 1$$

Bu durumda,

$$\cos^2\frac{3\pi}{10} - \cot\frac{5\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{5}$$

$$= \cos^2\frac{3\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{5} - \cot\frac{5\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8}$$

$$= 1 + \cot\frac{5\pi}{8}.\cot\frac{-\pi}{8} = 1 + -\cot\frac{5\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8}$$

$= 1 + 1 = 2$ bulunur.

8. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \tan(\pi - x)} + \dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{1 + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x$ tir.

Buna göre,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \tan(\pi - x)} + \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{1 + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \tan x} + \frac{\sin x}{1 - \cot x} = \frac{\cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{\sin x}{1 - \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\frac{\cos - \sin x}{\cos x}} + \frac{\sin x}{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x).(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$= \cos x + \sin x$

9. $16x = 3\pi$ olmak üzere, $\dfrac{\sin 7x + \sin 5x}{\cos 3x + \cos x}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

$16x = 3\pi \Rightarrow 8x = \frac{3\pi}{2}$ dir.

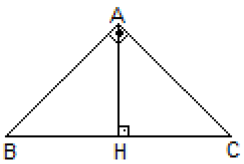
$$7x+x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin 7x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$

$$5x+3x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin 5x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=-\cos 3x \text{ tir.}$$

Buna göre,

$$\frac{\sin 7x+\sin 5x}{\cos 3x+\cos x}=\frac{-\cos x-\cos 3x}{\cos 3x+\cos x}=-1 \text{ bulunur.}$$

10.



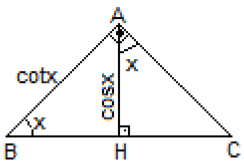
Şekildeki CAB dik üçgeninde,

$|AH|=\cos x$

$|AB|=\cot x$

olduğuna göre $|AC|$ uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



BHA dik üçgeninde,

$$\sin B=\frac{|AH|}{|AB|}=\frac{\cos x}{\cot x}$$

$$=\frac{\cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\sin x$$

ise, $m(\hat{B})=x$ tir.

$m(\hat{B})=x \Rightarrow m(H\hat{A}C)=x$ tir.

AHC dik üçgeninde

$$\cos x=\frac{|AH|}{|AC|}=\frac{\cos x}{|AC|} \text{ ise, } |AC|=1 \text{ bulunur}$$

11. $\dfrac{2.\sin x-3\cos x}{4.\sin x+5\cos x}=\dfrac{1}{3}$ olduğuna göre

$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{2.\sin x-3\cos x}{4.\sin x+5\cos x}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 6\sin x-9\cos x=4\sin x+5\cos x$$

$$\Rightarrow 2\sin x=14\cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{14}{2}=7$$

$$\Rightarrow \tan x=7$$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$=\frac{(1+\sin x).\cos x-(1-\sin x).\cos x}{(1-\sin x).(1+\sin x)}$$

$$=\frac{\cos x+\sin x.\cos x-\cos x+\sin x.\cos x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2.\sin x.\cos x}{\cos^2 x}=2.\tan x=2.7=14$$

12. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri A,B,C olmak üzere,

$\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right).\tan\dfrac{C}{2}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

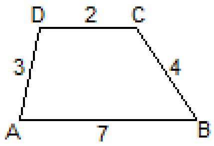
$$A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cot\left(\frac{C}{2}\right) \text{ dir.}$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right).\tan\frac{C}{2}=\cot\frac{C}{2}.\tan\frac{C}{2}=1 \text{ bulunur.}$$

13.



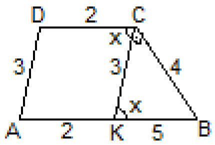
Yandaki ABCD yamuğunda

$|AB|=7$ birim,

$|BC|=4$ birim,

$|DC|=2$ birim, $|AD|=3$ birim olduğuna göre $\cos\hat{C}$ kaçtır?

Çözüm:



$[AD]//[CK]$ olacak şekilde $[CK]$ çizilirse,

$|AK|=2$ birim, $|KB|=5$ birim,

$|CK|=3$ birim olur.

KCB üçgeninde $3^2+4^2=5^2$ olduğundan $m(B\hat{C}K)=90^o$ dir.

$[DC]//[AK]$ olduğundan $m(K\hat{C}D)=m(C\hat{K}B)=x$ olur.

KCB dik üçgeninde,

$$\sin x=\frac{|CB|}{|KB|}=\frac{4}{5} \text{ tir.}$$

Buna göre,

$$\cos\hat{C}=\cos(90^o+x)=-\sin x=-\frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

14. $\cos 72^o=x$ olmak üzere $\dfrac{\cos 18^o}{\tan 72^o+\tan 18^o}$ işleminin sonucunu x'e bağlı olarak bulunuz.

Çözüm:

$$\sin^2 72^o+\cos^2 72^o=1 \Rightarrow \sin 72^o=\sqrt{1-x^2} \text{ dir.}$$

$$\frac{\cos 18^o}{\tan 72^o+\tan 18^o}=\frac{\sin 72^o}{\tan 72^o+\cot 72^o}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\dfrac{\sin 72^o}{\cos 72^o}+\dfrac{\cos 72^o}{\sin 72^o}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\dfrac{\sin^2 72^o+\cos^2 72^o}{\sin 72^o.\cos 72^o}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\dfrac{1}{x.\sqrt{1-x^2}}}=x.(1-x^2)=x-x^3$$

D. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken,

a. Fonksiyonun esas periyodu bulunur.

b. Bulunan periyoda uygun bir aralık seçilir.

c. Seçilen aralıkta fonksiyonun değişim tablosu yapılır. Bunun için, fonksiyonun bazı özel reel sayılarda alacağı değerlerin tablosu yapılır. Tabloda fonksiyonun aldığı değer bir sonraki aldığı değerden küçük ise (aldığı değer artmış ise) o aralığa $\uparrow$ sembolü yazılır. Eğer fonksiyonun aldığı değer bir sonraki aldığı değerden büyük ise (aldığı değer azalmış ise) o aralığa $\downarrow$ sembolü yazılır.

d. Seçilen bir periyotluk aralıkta fonksiyonun grafiği çizilir. Oluşan grafik, fonksiyonun periyodu alındığında tekrarlanacağı unutulmamalıdır.

1. Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

$f:R \to [-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun grafiği $\{(x,\sin x): x \in R\}$ kümesinin elemanları olan reel sayı ikililerine koordinat sisteminde karşılık gelen noktaların kümesidir.

Sinüs fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. Bu nedenle grafiği $[0,2\pi]$ aralığında inceleyeceğiz.

Elde edilen grafik

$[2\pi,4\pi]$, $[4\pi,6\pi]$, $[6\pi,8\pi]$,...

$[0,-2\pi]$, $-[2\pi,-4\pi]$, $[-4\pi,-6\pi]$,...

aralıklarına aktarılarak $f:R \to [-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

x in bazı özel değerleri için $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun alacağı değerlerin oluşturduğu $(x,\sin x)$ ikililerini, değişim tablosunda gösterelim.

$f(x)=\sin x$ ise $f(0)=\sin 0=0$

$f(x)=\sin x$ ise $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$f(x)=\sin x$ ise $f(\pi)=\sin\pi=0$

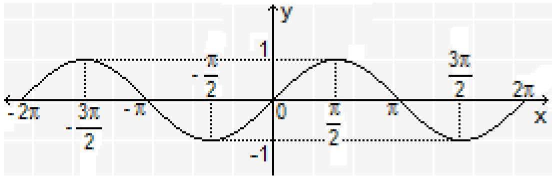
$f(x)=\sin x$ ise $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

$f(x)=\sin x$ ise $f(2\pi)=\sin 2\pi=0$

Bu ifadeleri değişim tablosunda gösterelim.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sinx	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Bulunan bilgilerden yararlanılarak $f(x)=\sin x$ in grafiği aşağıdaki gibi olur.



Örnek:

$f(x)=1+3.\sin 2x$ fonksiyonunun grafiğini $[0,\pi]$ aralığında çizelim.

Çözüm:

$f(x)=1+3.\sin 2x$ fonksiyonunun esas periyodu

$\frac{2\pi}{|2|}=\pi$ dir.

x in yerine bazı özel değerleri yazarak ($\sin 2x$ i bildiğimiz değer olacak şekilde) f fonksiyonunun alacağı değerler bulalım.

$f(x)=1+3.\sin 2x$ ise,

$f(0)=1+3.\sin 2.0=1+0=1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+3.\sin 2.\frac{\pi}{4}=1+3.\sin\frac{\pi}{2}=1+3.1=4$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+3.\sin 2.\frac{\pi}{2}=1+3.\sin\pi=1+0=1$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1+3.\sin 2.\frac{3\pi}{4}=1+3.\sin\frac{3\pi}{2}$

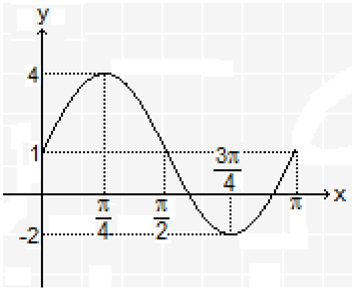
$=1+3.(-1)=-2$

$f(\pi)=1+3.\sin 2\pi=1+0=1$

Bu ifadeleri tabloda gösterelim.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f(x)	1	↗	4	↘	1	↘	-2	↗	1

Bulunan bilgilerden yararlanılarak $f(x)=1+3.\sin 2x$ in grafiği aşağıdaki gibi olur.



2. Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

$f: R \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği $\{(x, \cos x) : x \in R\}$ kümesinin elemanları olan reel sayı ikililerine koordinat sisteminde karşılık gelen noktaların kümesidir.

Kosinüs fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. Bu nedenle grafiği $[0, 2\pi]$ aralığında inceleyeceğiz.

Elde edilen grafik

$[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$,...

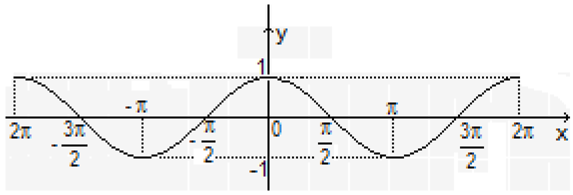
$[0, -2\pi]$, $-[2\pi, -4\pi]$, $[-4\pi, -6\pi]$,...

aralıklarına aktarılarak $f: R \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

x in bazı özel değerleri için $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun alacağı değerlerin oluşturduğu $(x, \cos x)$ ikililerini, değişim tablosu aşağıda gösterilmiştir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cosx	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Bulunan bilgilerden yararlanılarak $f(x) = \cos x$ in grafiği aşağıdaki gibi olur.



Sonuç

$f: R \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu örtendir, fakat bire bir değildir.

$f: R \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

$f: R \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu örtendir, fakat bire bir değildir.

$f: R \to [0, \pi]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

3. Tanjant Fonksiyonunun Grafiği

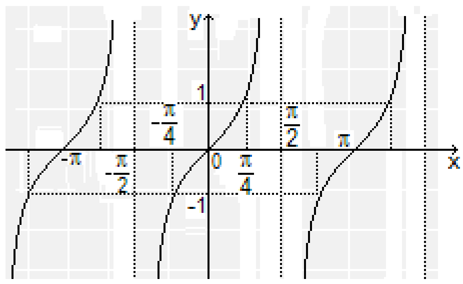
$f(x) = \tan x$ fonksiyonu $k \in Z$ olmak üzere $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$ değerlerinde tanımsızdır.

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun esas periyodu π dir.

Fonksiyonun değişimini $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında inceleyelim.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
tanx	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$
	Tanımsız								Tanımsız

Bulunan bilgilerden yararlanılarak $f(x) = \tan x$ in grafiği aşağıdaki gibi olur



Sonuç

$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow R$, $f(x)=\tan x$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

4. Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği

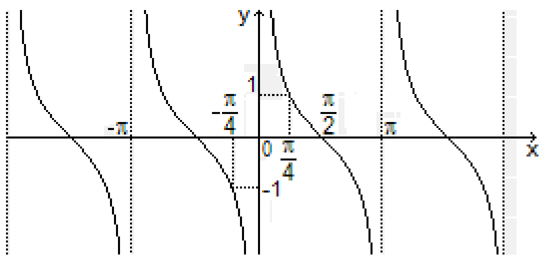
$f(x)=\cot x$ fonksiyonu $k\in Z$ olmak üzere $x=k.\pi$ değerlerinde tanımsızdır.

$f(x)=\cot x$ fonksiyonunun esas periyodu π dir.

Fonksiyonun değişimini $(0,\pi)$ aralığında inceleyelim.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
cotx	$-\infty \Vert +\infty$	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	$-\infty \Vert +\infty$
	Tanımsız								Tanımsız

Bulunan bilgilerden yararlanılarak $f(x)=\cot x$ in grafiği aşağıdaki gibi olur



Sonuç

$f:(0,\pi)\rightarrow R$, $f(x)=\cot x$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

E. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

$f:A\rightarrow B$ ye tanımlı bir f fonksiyonunun ters bağıntısının da bir fonksiyon olabilmesi için, f fonksiyonunun bire bir ve örten olması gerekir.

$f:A\rightarrow B$, $y=f(x)$ fonksiyonu birebir ve örten olsun.

$f^{-1}:B\rightarrow A$, $y=f^{-1}(x)$ fonksiyonu da birebir ve örtendir.

Önce trigonometrik fonksiyonların birebir ve örten oldukları bir aralığı kabul edeceğiz. Sonra, bu aralıkta trigonometrik fonksiyonların ters fonksiyonlarını tanımlayacağız. Hangi alt aralığı kabul ettiysek, ters trigonometrik fonksiyonlarda, daima kabul edilen o aralıkta işlemlerimizi yapacağız.

1. Arksinüs Fonksiyonu

$f(x)=\sin x$ fonksiyonunun tanım aralığı $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ alınırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur.

Bu durumda $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun tersi,

$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$ veya $f^{-1}(x)=\arcsin x$ şeklinde gösterilir

$\arcsin:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dir.

Sonuç

$\alpha=\arcsin x\Rightarrow x=\sin\alpha$ dır.

Örnek:

$\arcsin\frac{1}{2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\arcsin:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olduğu için $\arcsin\frac{1}{2}$ nin sonucu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığındadır.

Buna göre,

$\arcsin\frac{1}{2}=x$ ise $\sin x=\frac{1}{2}$ dir. Bu aralıkta sinüsü $\frac{1}{2}$ olan açı $30^{o}=\frac{\pi}{6}$ dir.

Örnek:

$\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ dir.

Örnek:

$y=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\arcsin:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olduğu için y nin değeri $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığındadır.

Buna göre,

$y=\arcsin\frac{1}{2}$ ise $\sin y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

Bu aralıkta sinüsü $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ olan açı $-45^{o}=-\frac{\pi}{4}$ tür.

Örnek:

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ dir.

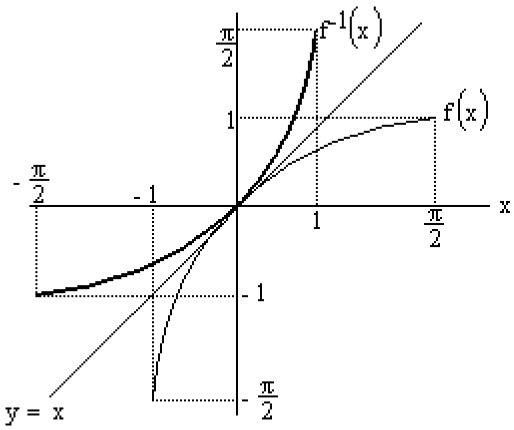
Örnek:

$f^{-1}(x)=\arcsin x$ fonksiyonunun grafiğini $[-1,1]$ aralığında çiziniz.

Çözüm:

$\arcsin:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$f^{-1}(x)=\arcsin x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda kalın ve koyu çizgi ile verilmiştir.



Bu fonksiyonun grafiği ile ters fonksiyonun grafiği y = x doğrusuna göre simetriktir. Bu özellikten yararlanarak bir fonksiyonun ters fonksiyonunun grafiği kolayca çizilir.

Örnek:

$\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ dir.

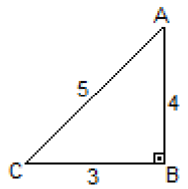
$\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ dir.

Örnek:

$\tan\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\arcsin\frac{4}{5} = x \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$ tir.



Dik üçgenden,

$\tan x = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Buna göre, $\tan\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \tan x = \frac{4}{3}$ bulunur.

2. Arkkosinüs Fonksiyonu

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tanım aralığı $[0, \pi]$ alınırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur.

Bu durumda $f : [0, \pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tersi,

$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ veya $f^{-1}(x) = \arccos x$ şeklinde gösterilir.

$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ dir.

Sonuç

$\alpha = \arccos x \Rightarrow x = \cos\alpha$ dır.

Örnek:

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ olduğu için $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ nin sonucu $[0, \pi]$ aralığındadır.

Buna göre,

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ise $\cos x = -\frac{1}{2}$ dir.

Bu aralıkta kosinüsü $-\frac{1}{2}$ olan açı $120^{o} = \frac{2\pi}{3}$ tür.

Örnek:

$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ olduğu için y nin değeri $[0, \pi]$ aralığındadır.

Buna göre,

$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ise $\cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

Bu aralıkta kosinüsü $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ olan açı $135^{o} = \frac{3\pi}{4}$ tür.

3. Arktanjant Fonksiyonu

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tanım aralığı $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ alınırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur. Bu durumda

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersi,

$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ veya $f^{-1} = \arctan x$ şeklinde gösterilir ve

$\arctan : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir.

Sonuç

$\alpha = \arctan x \Rightarrow x = \tan\alpha$ dır.

Örnek:

$x = \arctan(-1)$ olduğuna göre x'in değeri kaçtır?

Çözüm:

$\arctan : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğu için

$x = \arctan(-1) \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir.

Buna göre,

$x = \arctan(-1)$ ise $\tan x = -1$ dir.

Bu aralıkta tanjantı -1 olan açı $-45^{o} = -\frac{\pi}{4}$ tür.

Örnek:

$x = \arctan(-\sqrt{3})$ olduğuna göre x'in değeri kaçtır?

Çözüm:

$\arctan : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğu için

$x = \arctan(-\sqrt{3}) \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir.

Buna göre,

$x = \arctan(-\sqrt{3})$ ise $\tan x = -\sqrt{3}$ tür.

Bu aralıkta tanjantı $-\sqrt{3}$ olan açı $-60^{o} = -\frac{\pi}{3}$ tür.

4. Arkkotanjant Fonksiyonu

$f : (0, \pi) \to R$, $f(x) = \cot x$ fonksiyon birebir ve örtendir.

$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ ile tanımlı,

$f^{-1} : R \to (0, \pi)$ fonksiyonuna $f : (0, \pi) \to R$,
$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun tersi denir.

Kotanjant fonksiyonunun tersi,

$f^{-1}(x) = \operatorname{arc}\cot x$ şeklinde gösterilir.

Sonuç

$\alpha = \operatorname{arc}\cot x \Rightarrow x = \cot\alpha$ dır.

Örnek:

$x = \operatorname{arc}\cot(-\sqrt{3})$ olduğuna göre x'in değeri kaçtır?

Çözüm:

$\operatorname{arc}\cot : R \to (0, \pi)$ olduğu için

$x = \operatorname{arc}\cot(-\sqrt{3}) \Rightarrow x \in (0, \pi)$ dir.

Buna göre,

$x = \operatorname{arc}\cot(-\sqrt{3})$ ise $\cot x = -\sqrt{3}$ tür.

Bu aralıkta kotanjantı $-\sqrt{3}$ olan açı $150^{o} = \frac{5\pi}{6}$ dır.

Örnek:

$\cot(\operatorname{arc}\cot x)$ ifadesinin sonucunu x türünden bulalım.

Çözüm:

$\operatorname{arc}\cot x = \alpha$ olsun.

Bu durumda $\cot\alpha = x$ olur.

$\cot(\operatorname{arc}\cot x) = \cot(\alpha) = x$ bulunur.

Sonuç

Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun ters fonksiyonu, fonksiyonun kendisine eşittir.

$fof^{-1} = I$

$(fof^{-1})(x) = I(x) = x$

$(\cot)o(\text{arc}\cot) = I$

$[(\cot)o(\text{arc}\cot)](x) = I(x) = x$

$\cot(\text{arc}\cot x) = I(x) = x$ tir.

Buna göre,

- $\sin(\arcsin x) = x$
- $\cos(\arccos x) = x$
- $\tan(\arctan x) = x$
- $\cot(\text{arc}\cot x) = x$

KONU BİTMİŞTİR…