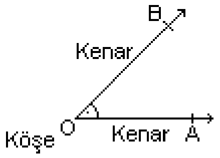
TRİGONOMETRİ-1

Trigonometri astronomiye ilişkin gereksinimleri karşılamak amacıyla ortaya çıkmış ve gelişmiştir. 15.yüzyılda, topoğrafya, ticaret ve denizciliğin gereksinimlerine trigonometri ile cevap aranmıştır.

1. Açı, Yönlü Açı, Yönlü Yay

A. Açı



Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesine açı denir. Bu ışınlara açının kenarları, başlangıç noktasına ise açının köşesi denir.

B. Yönlü Açı

Bir açının kenarlarından birini başlangıç kenarı; diğerini bitim kenarı olarak aldığımızda elde edilen açıya yönlü açı denir.
Açılar adlandırılırken önce başlangıç, sonra bitim kenarı yazılır.

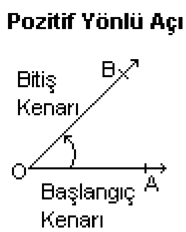
Kural

Açının köşesi etrafında, başlangıç kenarından bitim kenarına iki türlü gidilebilir. Bunlardan biri saatin dönme yönünün tersi, ikincisi ise saatin dönme yönünün aynısıdır.

Saatin dönme yönünün tersi olan yöne pozitif yön, saatin dönme yönünün aynı olan yöne negatif yön denir.

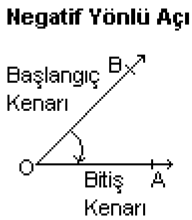
Açıların yönü genellikle ok yardımıyla belirtilir.

Örnek:



Yandaki şekilde $[OA$ ışını başlangıç kenarı, $[OB$ ışını bitim kenarı olan açı $A\hat{O}B$ açısı olup yönü saatin dönme yönünün tersi olduğundan yönü pozitiftir.

Örnek:



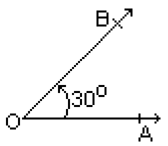
Yandaki şekilde $[OB$ ışını başlangıç kenarı, $[OA$ ışını bitim kenarı olan açı $B\hat{O}A$ açısı olup yönü saatin dönme yönü ile aynı olduğundan yönü negatiftir.

Uyarı

Bir $A\hat{O}B$ açısının ölçüsü $m\left(A\hat{O}B\right)$ ile gösterilir.

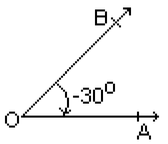
$$m\left(A\hat{O}B\right) = -m\left(B\hat{O}A\right) \text{ dır.}$$

Örnek:



$A\hat{O}B$ açısı pozitif yönlü olup $m\left(A\hat{O}B\right) = 30^{o}$ dir.

Örnek:



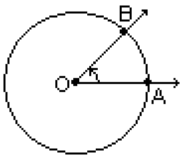
$B\hat{O}A$ açısı negatif yönlü olup $m\left(B\hat{O}A\right) = -30^{o}$ dir.

$$m\left(A\hat{O}B\right) = -m\left(B\hat{O}A\right)$$

C. Yönlü Yaylar

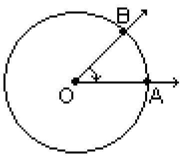
O merkezli bir çember çizelim; $A\hat{O}B$ ile bu açının iç bölgesindeki noktalarının kümesinin O merkezli çember ile kesişimi AB yayıdır. AB yayı, $\overset{\frown}{AB}$ biçiminde gösterilir. $\overset{\frown}{AB}$ yayının yönü olarak, $A\hat{O}B$ açısının yönünü alacağız.

Pozitif Yönlü Yay



Yandaki şekilde $A\hat{O}B$ açısının yönü pozitif olduğundan $\overset{\frown}{AB}$ yayı da pozitif yönlüdür. Pozitif yönlü $\overset{\frown}{AB}$ yayında A ya başlangıç noktası, B ye bitim noktası denir.

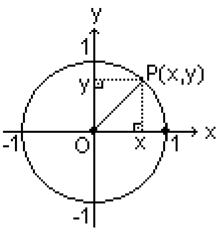
Negatif Yönlü Yay



Yandaki şekilde $B\hat{O}A$ açısının yönü negatif olduğundan $\overset{\frown}{BA}$ yayı da negatif yönlüdür. Negatif yönlü $\overset{\frown}{BA}$ yayında B başlangıç noktası, A bitim noktasıdır

D. Birim Çember

Koordinat sisteminde merkezi $O(0,0)$ orjin ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim çember denir.



Birim Çember

Birim çemberin denklemi $x^2+y^2=1$ olup, birim çember üzerinde alınan her noktanın x bileşeni ile y bileşeninin kareleri toplamı 1 sayısına eşittir.

Örnek:

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{m}{3}\right)$ noktasının birim çember üzerinde yer alması için m nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm:

Birim çemberin denklemi $x^2+y^2=1$ olup, birim çember üzerinde alınan her noktanın x bileşeni ile y bileşeninin kareleri toplamı 1 sayısına eşit olduğundan,

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^2=1\Rightarrow\frac{2}{4}+\frac{m^2}{9}=1$$

$$\Rightarrow\frac{m^2}{9}=1-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}\Rightarrow m^2=\frac{18}{4}$$

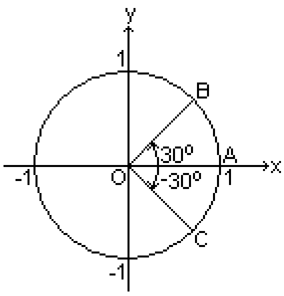
$$\Rightarrow m=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\quad\text{veya}\quad m=-\sqrt{\frac{18}{4}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\quad\text{bulunur.}$$

E. Birim Çemberde Yönlü Açılar

Birim çemberde gösterilen açıların başlangıç kenarları **daima Ox ekseni** alınır.

Açının yönü saatin dönme yönünün tersi ise pozitif yönlü, saatin dönme yönünün aynı ise negatif yönlü açıdır.

Örnek:



Birim çemberde açıların başlangıç kenarları **daima Ox ekseni** alınır.

$A\hat{O}B$ açısının yönü saatin dönme yönünün tersi olduğundan pozitif yönlü, $A\hat{O}C$ açısının yönü ise saatin dönme yönünün aynı olduğundan negatif yönlü açıdır.

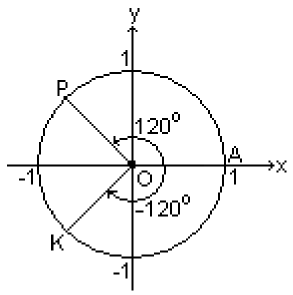
$A\hat{O}B$ açısı pozitif yönlü olunca $\overset{\frown}{AB}$ yayının yönü de pozitif, $A\hat{O}C$ açısının negatif yönlü olunca $\overset{\frown}{AC}$ yayı da negatif yönlüdür.

$m(A\hat{O}B)=30^{o}$ ve $m(A\hat{O}C)=-30^{o}$ dir.

Örnek:

Ölçüleri $m(A\hat{O}K)=-120^{o}$ ve $m(A\hat{O}P)=120^{o}$ olan açıları birim çember üzerinde gösteriniz.

Çözüm:



Birim çemberde her açının başlangıç kenarı her zaman Ox ekseni ekseni olduğundan $A\hat{O}K$ açısının başlangıç kenarı olan $[OA$ ışını olup Ox ekseni üzerinde olacaktır.

$m\left(A\hat{O}K\right) = -120^{o}$ ise $A\hat{O}K$ açısı negatif yönlü olup saatin dönme yönü ile aynı yönlüdür.

$A\hat{O}P$ açısının başlangıç kenarı olan $[OA$ ışını olup Ox ekseni üzerinde olacaktır. $m\left(A\hat{O}P\right) = 120^{o}$ ise $A\hat{O}P$ açısı pozitif yönlü olup saatin dönme yönünün tersi yönündedir.

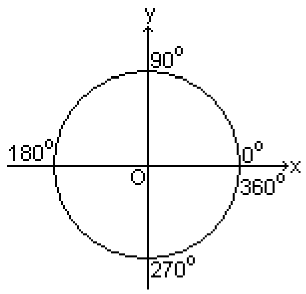
F. Açı Ölçü Birimleri

Bir açının ölçüsünün büyüklüğünü veya küçüklüğünü tanımlamak için, bir ölçü birimi tanımlamalıyız. Açıyı ölçmek, açının kolları arasındaki açıklığı belirlemek demektir.

Genellikle üç birim kullanılır. Bunlar; derece, raydan ve graddır.

I. Derece

Bir tam çember yayını 360 eş parçaya ayrıldığında bu yay parçalarından her birini gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir. 1^{o} ile gösterilir.



1^{o} lik açının 60 ta birine 1 dakikalık açı denir ve $1^{o} = 60^{'}$ biçiminde gösterilir.

$1^{'}$ lık açının da 60 ta birine 1 saniyelik açı denir $1^{'} = 60^{''}$ biçiminde gösterilir.

Buna göre,

$\boxed{1^{o} = 60^{'} = 3600^{''}}$ ilişkisi vardır.

Örnek:

$m(\hat{A}) = 24^{o}\ 13^{'}\ 45^{''}$ ve $m(\hat{B}) = 52^{o}\ 46^{'}\ 15^{''}$ olmak üzere $m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{B}\right)$ ifadesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r} m(\hat{A}) = 24^{o}\ 13^{'}\ 45^{''} \\ m(\hat{B}) = 52^{o}\ 46^{'}\ 15^{''} \\ \hline m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 77^{o}\ 0^{'}\ 0^{''} \end{array}$$

Örnek:

$m(\hat{A}) = 24^{o}\ 13^{'}\ 45^{''}$ ve $m(\hat{B}) = 52^{o}\ 46^{'}\ 15^{''}$ olmak üzere $m(\hat{B}) - m(\hat{A})$ ifadesini bulalım.

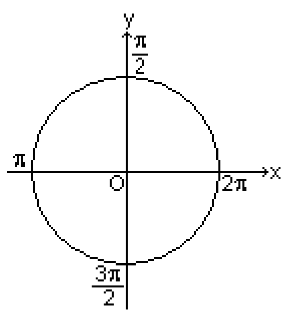
Çözüm:

$$\begin{array}{r} m(\hat{B}) = 52^{o}\ 46^{'}\ 15^{''} \\ m(\hat{A}) = 24^{o}\ 13^{'}\ 45^{''} \\ \hline m(\hat{B}) - m(\hat{A}) = 28^{o}\ 32^{'}\ 30^{''} \end{array}$$

II. Radyan

Yarıçap uzunluğuna eşit uzunluktaki bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 radyan denir.

Çemberin çevre uzunluğu $2\pi r$ dir. Birim çemberde yarıçap 1 birim olduğundan bu ifadede $r = 1$ yazılırsa birim çemberin çevre uzunluğu, $2\pi.1 = 2\pi$ raydan bulunur.



O halde birim çemberin çevre uzunluğu; 2π radyandır.

Birim çemberin çevresi derece olarak 360^{o} ve raydan olarak 2π olduğundan, $360^{o} = 2\pi$ bulunur.

Yine şekil üzerinde görüldüğü gibi

$\frac{\pi}{2} = 90^{O}$, $\pi = 180^{O}$, $\frac{3\pi}{2} = 270^{O}$, $2\pi = 360^{O}$ dir.

Örnek:

Ölçüsü 45^{O} olan açının ölçüsünü radyan olarak yazınız.

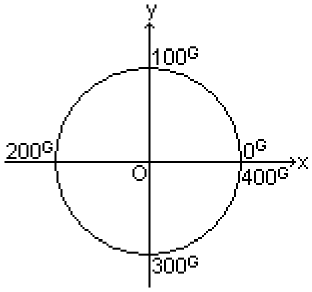
Çözüm:

$90^{O} = \frac{\pi}{2}$ idi. $45^{O} = \frac{90^{O}}{2}$ olduğundan,

$45^{O} = \frac{90^{O}}{2} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

III. Grad

Bir tam çember yayını 400 eş parçaya ayrıldığında bu yay parçalarından her birini gören merkez açının ölçüsüne **1 grad** denir. 1^{G} ile gösterilir.



Birim çemberin çevresi derece olarak 360^{O} , raydan olarak 2π ve grad olarak 400^{G} olduğundan,

$360^{O} = 2\pi = 400^{G}$ bulunur.

Yine şekil üzerinde görüldüğü gibi $\frac{\pi}{2} = 90^{O} = 100^{G}$,

$\pi = 180^{O} = 200^{G}$, $\frac{3\pi}{2} = 270^{O} = 300^{G}$,

$2\pi = 360^{O} = 400^{G}$ dır.

Sonuç

D dereceyi, R radyanı ve G gradı göstermek üzere açı ölçü birimleri arasında,

$$\boxed{\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} = \frac{G}{400}}$$

Bu bağıntı açı ölçü birimleri birbirine çevrilirken kullanılır.

Örnek:

Ölçüsü 120^{O} olan açının ölçüsünü radyan ve grad olarak bulunuz.

Çözüm:

$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} = \frac{G}{400}$ bağıntısında $D = 120^{O}$ yazılırsa,

Radyan olarak

$\frac{120}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi.120}{360} = \frac{2\pi}{3}$,

Grad olarak

$\frac{120}{360} = \frac{G}{400} \Rightarrow G = \frac{120.400}{360} = \frac{400}{3}$ bulunur.

Örnek:

Ölçüsü $\frac{\pi}{5}$ radyan olan açının ölçüsünü derece olarak bulunuz.

Çözüm:

$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{360} = \frac{\pi/5}{2\pi} \Rightarrow D = 36^{O}$ bulunur.

Örnek:

Ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ radyan olan açının ölçüsünü derece ve grad olarak bulunuz.

Çözüm:

$\frac{D}{360}=\frac{R}{2\pi}=\frac{G}{400}$ eşitliğinde $R=\frac{\pi}{3}$ yazılırsa,

$\frac{D}{360}=\frac{\pi/3}{2\pi}\Rightarrow\frac{D}{360}=\frac{\pi}{6\pi}\Rightarrow D=\frac{360}{6}=60^{o}$ bulunur.

$\frac{G}{400}=\frac{\pi/3}{2\pi}=\frac{1}{6}\Rightarrow G=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$ bulunur.

O halde,

$\frac{\pi}{3}=60^{o}=\left(\frac{200}{3}\right)^{G}$

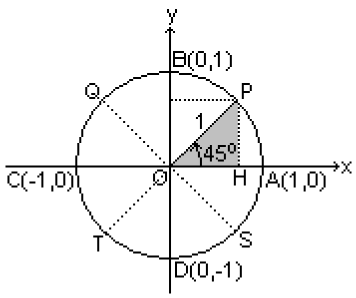
G. Bazı Yönlü Yayların Bitim Noktalarının Koordinatları

1) $\frac{\pi}{4}$ ün Tam Katları Uzunluğundaki Yönlü Yayların Bitim Noktalarının Koordinatları

a. $\frac{\pi}{4}=45^{o}$ olup $\frac{\pi}{4}$ radyanlık yayın bitim noktası P olsun.

P noktasından Ox eksenine indirilen dikmenin ayağı H ise, P noktasının koordinatları $P(|OH|,|HP|)$ dir.

OHP ikizkenar dik üçgendir. Dolayısıyla $|OH|=|HP|$ dir. Bu dik üçgende Pisagor Bağıntısı uygulanırsa,



$|OH|^{2}+|HP|^{2}=|OP|^{2}\Rightarrow|OH|^{2}+|OH|^{2}=1^{2}$

$2.|OH|^{2}=1\Rightarrow|OH|^{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow|OH|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

$|OH|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow|PH|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

P noktasının koordinatları; $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olur.

O halde $\frac{\pi}{4}$ radyanlık yayın bitim noktasının koordinatları;

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dir.

b. $2.\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=90^{o}$ olduğundan $\frac{\pi}{2}=90^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası B, $\frac{\pi}{2}=90^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $B(0,1)$ dir.

c. $3.\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}=135^{o}$ olduğundan $\frac{3\pi}{4}=135^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası olan Q, P noktasının Oy eksenine göre simetriği olduğundan $\frac{3\pi}{4}=135^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları;

$Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dir.

d. $4.\frac{\pi}{4}=\pi=180^{o}$ olduğundan $\pi=180^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası C olup $\pi=180^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $C(-1,0)$ dir.

e. $5.\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}=225^{o}$ olduğundan $\frac{5\pi}{4}=225^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası olan T, P noktasının

O başlangıç noktasına (orjine) göre simetriği olup $\frac{5\pi}{4}=225^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $T\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dir.

f. $6.\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}=270^{o}$ olduğundan $\frac{3\pi}{2}=270^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası D olup $\frac{3\pi}{2}=270^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $D(0,-1)$ dir.

g. $7.\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}=315^{o}$ olduğundan $\frac{7\pi}{4}=315^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası olan S, P noktasının Ox eksenine göre simetriği olup $\frac{7\pi}{4}=315^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları;

$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dir.

h. $8.\frac{\pi}{4}=2\pi=360^{o}$ olduğundan $2\pi=360^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası A olup $2\pi=360^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $A(1,0)$ dır.

Ayrıca $\frac{\pi}{4}$ ün negatif tam katı uzunluğu olan yaylardan;

$-\frac{\pi}{4}=-45^{o}$ yayı bitim noktası $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$-\frac{\pi}{2}=-90^{o}$ yayı bitim noktası $D(0,-1)$,

$-\frac{3\pi}{4}=-135^{o}$ yayı bitimi $T\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$-\pi=-180^{o}$ yayı bitim noktası $C(-1,0)$,

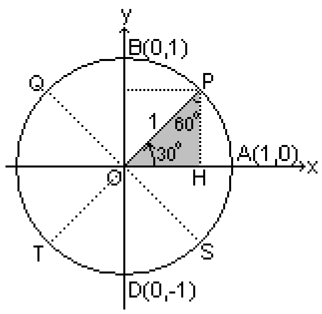
$-\frac{5\pi}{4}=-225^{o}$ yayı bitimi $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

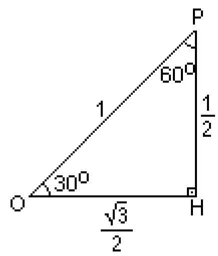
$-\frac{3\pi}{2}=-270^{o}$ yayın bitim noktası $B(0,1)$,

$-\frac{7\pi}{4}=-315^{o}$ yayın bitimi $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$-2\pi=-360^{o}$ yayın bitim noktası $A(1,0)$ dır.

2) $\frac{\pi}{6}$ nın Tam Katları Uzunluğundaki Yönlü Yayların Bitim Noktalarının Koordinatları



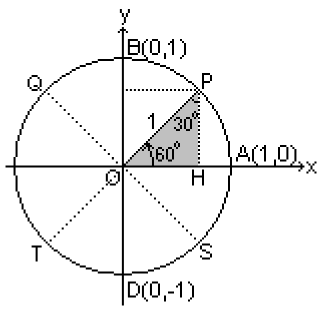


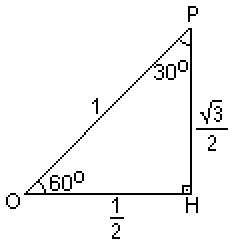
a. $\frac{\pi}{6}=30^{o}$ olup $\frac{\pi}{6}$ radyanlık yayın bitim noktası P olsun. P noktasından Ox eksenine indirilen dikmenin ayağı H ise, P noktasının koordinatları $P(|OH|,|HP|)$ dir. OHP dik üçgeni $30^{o}-60^{o}-90^{o}$ üçgenidir.

Buradan $|PH|=\frac{|OP|}{2}=\frac{1}{2}$ ve

$|OH|=\sqrt{3}.|PH|=\sqrt{3}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur. P noktasının koordinatları $P(|OH|,|HP|)$ olup, $\frac{\pi}{6}$ radyanlık yayın bitim noktasının koordinatları; $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ dir.

b. $2.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}=60^{o}$ olup $\frac{\pi}{3}$ radyanlık yayın bitim noktası P olsun. P noktasından Ox eksenine indirilen dikmenin ayağı H ise, P noktasının koordinatları $P(|OH|,|HP|)$ dir. OHP dik üçgeni $30^{o}-60^{o}-90^{o}$ üçgenidir.





$|OH|=\frac{|OP|}{2}=\frac{1}{2}$ ve $|OP|=\sqrt{3}.|OH|=\sqrt{3}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

P noktasının koordinatları $P(|OH|,|HP|)$ olup, $\frac{\pi}{3}$ radyanlık yayın bitim noktasının $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dir.

c. $3.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}=90^{o}$ olduğundan $\frac{\pi}{2}=90^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası B olup $\frac{\pi}{2}=90^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $B(0,1)$ dir.

d. $4.\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}=120^{o}$ olduğundan $\frac{2\pi}{3}=120^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası olan Q, 2.şekilde P noktasının Oy eksenine göre simetriği olup $\frac{2\pi}{3}=120^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $Q\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dir.

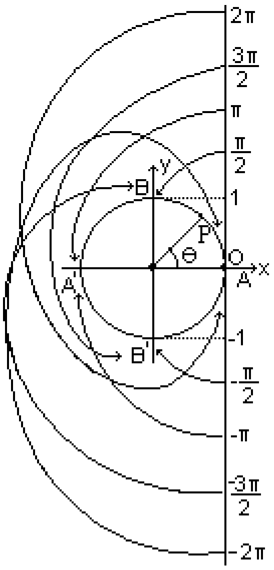
e. $5.\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}=150^{o}$ olduğundan $\frac{5\pi}{6}=150^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası, P noktasının Oy eksenine göre simetriği olup $\frac{5\pi}{6}=150^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ dir.

f. $6.\frac{\pi}{6}=\pi=180^{o}$ olduğundan $\pi=180^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktası C olup $\pi=180^{o}$ uzunluğundaki yayın bitim noktasının koordinatları; $C(-1,0)$ dir.

Diğer yayların bitim noktalarının koordinatları simetriden yararlanılarak benzer şekilde bulunabilir.

$\frac{\pi}{4}$ ün Katı		**$\frac{\pi}{6}$ nın Katı**	
Açı	**Bitim Noktası**	**Açı**	**Bitim Noktası**
$\frac{\pi}{4}=45^{o}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\pi}{6}=30^{o}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}=90^{o}$	$(0,1)$	$\frac{\pi}{3}=60^{o}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}=135^{o}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{2\pi}{3}=120^{o}$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\pi=180^{o}$	$(-1,0)$	$\frac{5\pi}{6}=150^{o}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{4}=225^{o}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{7\pi}{6}=210^{o}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}=270^{o}$	$(0,-1)$	$\frac{4\pi}{3}=240^{o}$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{4}=315^{o}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{5\pi}{3}=300^{o}$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$2\pi=360^{o}$	$(1,0)$	$\frac{11\pi}{6}=330^{o}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

H. Birim Çemberin Noktalarının Reel Sayılarla Eşlenmesi



Bir çembere A noktasında teğet olan bir doğruyu sayı doğrusu olarak düşünelim. Bu sayı doğrusunda sıfır sayısının eşlendiği nokta, doğrunun çembere değdiği A noktası olsun. Sayı doğrusunun, pozitif reel sayılarla eşlenen kısmını, çember üzerine, pozitif yönde; diğer kısmını da çember üzerine, negatif yönde sardığımızı düşünelim.

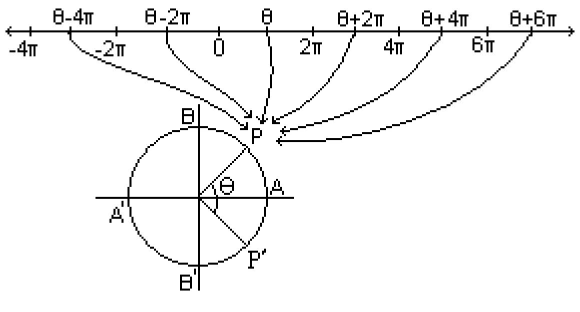
Bu yolla, sayı doğrusunun noktaları birim çemberin noktaları ile eşlenmiş olur. sayı doğrusunun pozitif reel sayılarının bulunduğu kısmını, pozitif yönde çembere sararken P noktasına eşlenen sayılardan biri θ olsun.

Birim çemberin uzunluğu 2π birim olduğundan;
$\theta+2\pi$, $\theta+2.2\pi$, $\theta+3.2\pi$,… sayıları da P noktası ile eşlenir.

Sayı doğrusunun negatif reel sayılarının bulunduğu kısmını, negatif yönde çembere sararken P noktasına;
$\theta-2\pi$, $\theta-2.2\pi$, $\theta-3.2\pi$,… sayıları da P noktası ile eşlenir.

Birim çemberi Ç ile gösterirsek, bu yolla, R reel sayılar kümesinden Ç ye bir fonksiyon tanımlamış olduk. Bu fonksiyona **sarma fonksiyonu** denir.

Bu sarma işlemine devam edilirse birim çember üzerindeki herhangi bir P noktasına, sonsuz tane reel sayı karşılık gelir.



Buna göre $k \in Z$ olmak üzere, P noktasına eşlenen sayılar, $\theta+k.2\pi$ biçimindedir.

Sayı doğrusunun negatif reel sayıların bulunduğu kısmını, negatif yönde birim çembere sararken P' noktasına eşlenen sayılardan biri $-\theta$ ise,

$-\theta-2\pi$, $-\theta-2.2\pi$, $-\theta-3.2\pi$,… sayıları da P' noktasına eşlenir.

Sayı doğrusunun pozitif reel sayıların bulunduğu kısmını, pozitif yönde birim çembere sararken;

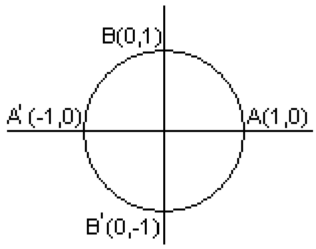
$-\theta+2\pi$, $-\theta+2.2\pi$, $-\theta+3.2\pi$,… sayıları P' noktasına eşlenir.

Buna göre $k \in Z$ olmak üzere, P' noktasına eşlenen sayılar, $-\theta+k.2\pi$ biçimindedir.

Örnek:

Birim çemberin $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$, $B'(0,-1)$ noktalarına eşlenen reel sayıları bulalım.

Çözüm:



Birim çemberin uzunluğu 2π birimdir. $k \in Z$ olmak üzere $A(1,0)$ noktasına eşlenen sayılar, $0+k.2\pi=k.2\pi$ biçimindedir.

Bu ifadede k yerine …,-2, -1, 0, 1, 2, … azılarak elde edilen sayılar;

$$\ldots,\ -4\pi,-2\pi,0,2\pi,4\pi,\ldots \text{ dir.}$$

$B(0,1)$ noktasına eşlenen sayılar, $\frac{\pi}{2}+k.2\pi$ biçimindedir.

Bu sayılar, $\ldots,\frac{\pi}{2}-4\pi,\frac{\pi}{2}-2\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,\frac{\pi}{2}+4\pi,\ldots$ dir.

$A'(-1,0)$ noktasına eşlenen sayılar, $\pi+k.2\pi$ biçimindedir.

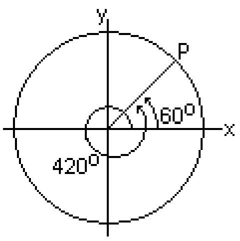
Bu sayılar, $..., \pi - 4\pi, \pi - 2\pi, \pi, \pi + 2\pi, \pi + 4\pi,...$ dir.

$B'(0,-1)$ noktasına eşlenen sayılar, $\frac{3\pi}{2} + k.2\pi$ biçimindedir. Bu sayılar,

$..., \frac{3\pi}{2} - 4\pi, \frac{3\pi}{2} - 2\pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi, \frac{3\pi}{2} + 4\pi,...$ biçimindedir.

İ. Bir Açının Esas Ölçüsü

Birim çember üzerinde 420^{O} lik bir açının bitim kenarının çemberi kestiği noktayı inceleyelim.



$420^{O} = 360^{O} + 60^{O}$ olduğu için $[Ox$ başlangıç kenarı $[OP$ bitim kenarı olmak üzere, pozitif yönde bir yay (360^{O}) çizildikten sonra 60^{O} lik yay daha çizilir.

60^{O} lik yayın bitim kenarının çemberi kestiği nokta ile 420^{O} lik açının bitim kenarı çemberi aynı noktada keser.
Bu durumda $[OP$ ışını 420^{O} lik açının bitim kenarı $x\hat{O}P$ açısının ölçüsü olan 60^{O} de 420^{O} lik açının esas ölçüsü olur.

Buna göre 420^{O} lik açının esas ölçüsü 60^{O} dir.

Örnek:

$780^{O} = 60^{O} + 2.360^{O}$ olduğu için, 780^{O} lik açının esas ölçüsü 60^{O} dir.

Sonuç

$k \in Z$ ve $\alpha \in [0^{O}, 360^{O})$ olmak üzere, brim çember üzerinde α açısı ile $\alpha + k.360^{O}$ açısı aynı noktaya karşılık gelmektedir.

Buna göre, $0^{O} \le \alpha < 360^{O}$ ve $k \in Z$ olmak üzere, ölçüsü $\alpha + k.360^{O}$ olan açının esas ölçüsü α derecedir.

Örnek:

Ölçüsü 1820^{O} olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 1820^{O} & 360^{O} \\ \cline{2-2} -1800^{O} & 5 \\ \hline 20^{O} & \end{array}$$

$1820^{O} = 20^{O} + 5.360^{O}$ olup 1820^{O} lik açının esas ölçüsü 20^{O} dir.

Uyarı

Açının birimi ne olursa olsun, esas ölçü negatif yönlü olamaz. Diğer bir ifadeyle esas ölçü $[0^{O}, 360^{O})$ aralığındadır.

Örnek:

Ölçüsü -800^{O} olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

Negatif yönlü açılarda açının mutlak değeri 360^{O} ye bölünür; kalan 360^{O} den çıkarılarak esas ölçü bulunur.

$$\begin{array}{r|l} 800^{O} & 360^{O} \\ \cline{2-2} -720^{O} & 2 \\ \hline 80^{O} & \end{array}$$

800^{O} nin 360^{O} ye bölümünden kalan 80^{O} olduğu için, ölçüsü -800^{O} olan açının esas ölçüsü $360^{O} - 80^{O} = 280^{O}$ dir.

Örnek:

Ölçüsü $\frac{31\pi}{2}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulunuz.

Çözüm:

$0 \le \alpha < 2\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere, ölçüsü $\alpha + k.2\pi$ radyan olan açının esas ölçüsü α radyandır.

Buna göre,

$\frac{31\pi}{2} = \frac{3\pi + 28\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 7.2\pi$ olduğuna göre ölçüsü $\frac{31\pi}{2}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{3\pi}{2}$ raydandır.

Örnek:

Ölçüsü $\frac{80\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulunuz.

Çözüm:

$\frac{80\pi}{7} = \frac{10\pi + 70\pi}{7} = \frac{10\pi}{7} + 5.2\pi$ olduğuna göre ölçüsü

$\frac{80\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{10\pi}{7}$ radyandır.

Uyarıl

Bir önceki örnekte yaptığımız işlemleri pratik olarak şu şekilde yaparız.

80'i paydanın 2 katına (14'e) böleriz. Kalan 10 dur. Kalan π nin katsayısı olacak, payda aynen kalacak.

Buna göre, ölçüsü $\frac{80\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{10\pi}{7}$ radyandır.

Örnek:

Ölçüsü $-\frac{36\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulunuz.

Çözüm:

Radyan cinsinden verilen negatif yönlü açıların esas ölçüsü bulunurken, verilen açı pozitif yönlü açı gibi düşünülerek esas ölçüsü bulunur. Bulunan değer 2π den çıkarılır.
36 nın paydanın 2 katı (10) ile bölümünden kalan 6 dır.

Buna göre ölçüsü $\frac{36\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{6\pi}{5}$ radyandır.

$2 - \frac{6\pi}{5} = \frac{10\pi - 6\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ olduğuna, göre ölçüsü $-\frac{36\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{4\pi}{5}$ radyandır.

Örnek:

Ölçüsü $-\frac{3\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

$2\pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$ tir. O halde ölçüsü $-\frac{3\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{7\pi}{5}$ tir.

Bulunan bu değeri dereceye çevirelim.

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{360} = \frac{\frac{7\pi}{5}}{2\pi} \Rightarrow D = \frac{7.360}{10} = 252 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Ölçüsü $-\frac{\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

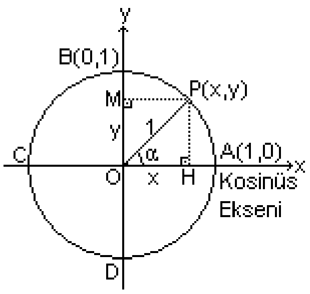
$2\pi - \frac{\pi}{7} = \frac{13\pi}{7}$ dir. O halde ölçüsü $-\frac{\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{13\pi}{7}$ dir.

Bulunan bu değeri dereceye çevirelim.

$$\frac{D}{360}=\frac{R}{2\pi}\Rightarrow\frac{D}{360}=\frac{\frac{13\pi}{7}}{2\pi}\Rightarrow D=\frac{13.360}{14}=334$$

2. Trigonometrik Fonksiyonlar

A. Kosinüs Fonksiyonu



Birim çemberin $P(x,y)$ noktası ile eşlenen açı $A\hat{O}P$ olmak üzere, P noktasının apsisine (x bileşeni) α reel sayısının kosinüsü denir ve $\cos\alpha$ ile gösterilir.

$\cos\alpha = x = |OH|$ tır.

Bu şekilde tanımlanan fonksiyona da kosinüs fonksiyonu denir. Kosinüs fonksiyonunun tanım kümesi R reel sayılar kümesidir.

$\alpha\in R$ için $\cos\alpha = x$ ve $x\in R$ dir. Kosinüs fonksiyonunun değer kümesi de R reel sayılar kümesidir.

Kosinüs fonksiyonu,

$\cos : R\rightarrow R$

$\alpha\rightarrow\cos\alpha$ biçiminde gösterilir.

$P(x,y)$ noktası ile eşlenen, bir α reel sayısının kosinüsü $P(x,y)$ noktasının apsisine eşittir. x eksenine **kosinüs ekseni** denir.

$P(x,y)$ noktasının apsisi, yani $\cos\alpha$, -1 ile 1 arasında değerler alır. Birim çember üzerindeki her noktanın apsisi $[-1,1]$ aralığındadır.

$\forall\alpha\in R$ için $-1\le\cos\alpha\le 1$ veya $\cos : R\rightarrow[-1,1]$ yazılır.

Buna göre, kosinüs fonksiyonunun tanım kümesi R reel sayılar kümesi, değer kümesi de $[-1,1]$ aralığıdır.

Sonuç

Yukarıdaki şekilde,

$A(1,0)$ olduğundan $\cos 0^{o}=1$ dir.

$B(0,1)$ olduğundan $\cos 90^{o}=0$ dır.

$C(-1,0)$ olduğundan $\cos 180^{o}=-1$ dir.

$D(0,-1)$ olduğundan $\cos 270^{o}=0$ dır.

Örnek:

$\cos 180^{o}+\cos 360^{o}=-1+1=0$

Örnek:

$\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=\cos 90^{o}+\cos 270^{o}=0+0=0$

Örnek:

$A=1+4.\cos(45^{o}-x)$ olduğuna göre, A nın alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

Çözüm:

$-1\le\cos(45^{o}-x)\le 1$

$\Rightarrow 4.(-1)\le 4.\cos(45^{o}-x)\le 4.1$

$\Rightarrow 1+(-4)\le 1+4.\cos(45^{o}-x)\le 1+4$

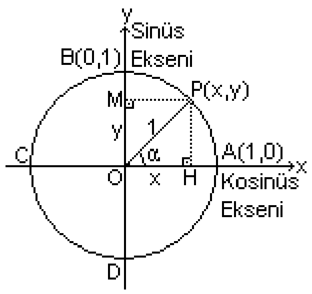
$\Rightarrow -3\le 1+4.\cos(45^{o}-x)\le 5$

$\Rightarrow -3\le A\le 5$

olduğuna göre A nın alabileceği tamsayı değerleri;

-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5 olup dokuz tanedir.

B. Sinüs Fonksiyonu



Birim çemberin $P(x,y)$ noktası ile eşlenen açı $A\hat{O}P$ olmak üzere, P noktasının ordinatına (y bileşeni) α reel sayısının sinüsü denir ve $\sin x$ ile gösterilir.

$\sin\alpha = y = |OM|$ dir.

Bu şekilde tanımlanan fonksiyona da sinüs fonksiyonu denir. Sinüs fonksiyonunun tanım kümesi R reel sayılar kümesidir.

$\alpha \in R$ için $\sin\alpha = y$ ve $y \in R$ dir. Sinüs fonksiyonunun değer kümesi de R reel sayılar kümesidir.

Sinüs fonksiyonu,

$\sin : R \to R$

$\alpha \to \sin\alpha$ biçiminde gösterilir.

$P(x,y)$ noktası ile eşlenen, bir α reel sayısının sinüsü $P(x,y)$ noktasının ordinatına eşittir. y eksenine **sinüs ekseni** denir. Birim çember üzerindeki her noktanın ordinatı $[-1,1]$ aralığındadır.

$\forall\alpha \in R$ için $-1 \le \sin\alpha \le 1$ veya $\sin : R \to [-1,1]$ yazılır.

Buna göre, sinüs fonksiyonunun tanım kümesi R reel sayılar kümesi, değer kümesi de $[-1,1]$ aralığıdır.

$k \in Z$ olmak üzere birim çember üzerindeki P noktasına karşılık gelen tüm $\alpha + k.2\pi$ reel sayıları için,

$\cos(\alpha + k.360^{O}) = \cos\alpha = x$

$\sin(\alpha + k.360^{O}) = \sin\alpha = y$ olur.

Sonuç

Yukarıdaki şekilde,

$A(1,0)$ olduğundan $\sin 0^{O} = 0$ dır.

$B(0,1)$ olduğundan $\sin 90^{O} = 1$ dir.

$C(-1,0)$ olduğundan $\sin 180^{O} = 0$ dır.

$D(0,-1)$ olduğundan $\sin 270^{O} = -1$ dir.

Örnek:

$f(x) = \sin x + \cos x$ olduğuna göre $f(450^{O})$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

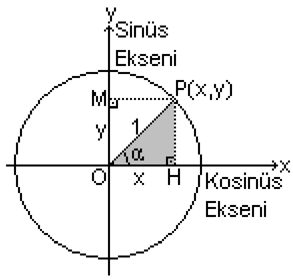
$450^{O} = 90^{O} + 1.360^{O}$ olduğundan 450^{O} lik açının esas ölçüsü 90^{O} dir.

Buna göre,

$f(450^{O}) = f(90^{O}) = \sin 90^{O} + \cos 90^{O} = 1 + 0 = 1$

bulunur.

Kural



$x = |OH| = \cos\alpha$

$y = |OM| = \sin\alpha$

OPH dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulanırsa;

$x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ bulunur.

Uyarı

$(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$ dir.

$(\cos\alpha)^2 \neq \cos\alpha^2$ dir.

Örnek:

$\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{15\pi}{7}-1}{\sin\frac{\pi}{8}.\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$\dfrac{15\pi}{7}=\dfrac{\pi+14\pi}{7}=\dfrac{\pi}{7}+1.2\pi$ olduğuna göre $\dfrac{15\pi}{7}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\dfrac{\pi}{7}$ dir. Bu durumda

$\sin\dfrac{15\pi}{7}=\sin\dfrac{\pi}{7}$ dir.

Buna göre,

$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{15\pi}{7}-1}{\sin\frac{\pi}{8}.\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}-1}{\sin\frac{\pi}{8}.\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1-1}{\sin\frac{\pi}{8}.\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}}=0$$

Örnek:

$\dfrac{\pi}{4}$ ve $\dfrac{\pi}{6}$ nın tam sayı katı olan sayıların sinüs ve kosinüs fonksiyonları altındaki görüntülerini bulalım.

Açı	Bitim Noktası	Kosinüsü	Sinüsü
0^o	$(1,0)$	1	0
$\frac{\pi}{4}=45^o$	$\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
$\frac{\pi}{6}=30^o$	$\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}=60^o$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$
$\frac{\pi}{2}=90^o$	$(0,1)$	0	1
$\frac{2\pi}{3}=120^o$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$
$\frac{3\pi}{4}=135^o$	$\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
$\frac{5\pi}{6}=150^o$	$\left(-\frac{\sqrt3}{2},\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi=180^o$	$(-1,0)$	-1	0
$\frac{7\pi}{6}=210^o$	$\left(-\frac{\sqrt3}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{4}=225^o$	$\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$
$\frac{4\pi}{3}=240^o$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$
$\frac{3\pi}{2}=270^o$	$(0,-1)$	0	-1
$\frac{5\pi}{3}=300^o$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$
$\frac{7\pi}{4}=315^o$	$\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$
$\frac{11\pi}{6}=330^o$	$\left(\frac{\sqrt3}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Örnek:

780^o nin sinüsünü ve kosinüsünü bulunuz.

Çözüm:

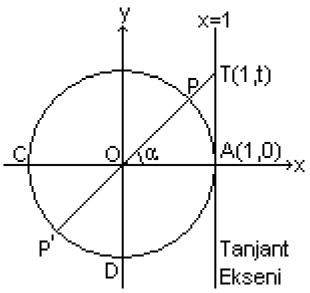
$780^{O} = 60^{O} + 2.360^{O}$ olduğundan 780^{O} lik açının esas ölçüsü 60^{O} dir.

Buna göre,

$\sin 780^{O} = \sin 60^{O} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\cos 780^{O} = \cos 60^{O} = \dfrac{1}{2}$

bulunur.

C. Tanjant Fonksiyonu



Birim çembere $A(1,0)$ noktasında teğet olan doğruyu çizelim. Bu doğrunun denklemi $x = 1$ dir.

Birim çember üzerinde $s(A\hat{O}P) = \alpha$ olmak üzere $[OP$ ışınının $x = 1$ doğrusunu kestiği T noktasının ordinatına, α reel sayısının tanjantı denir. $t = \tan\alpha$ biçiminde gösterilir.
Denklemi $x = 1$ olan doğruya **tanjant ekseni** denir.

$P(x,y)$ noktası, $B(0,1)$ ya da $D(0,-1)$ noktası ile çakışırsa; $[OP$ ışını, denklemi $x = 1$ olan doğruyu kesmez.

Buna göre;

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

reel sayılarının tanjantı tanımsızdır.

Genel olarak

$k \in Z$ olmak üzere $\dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ şeklindeki reel sayıların tanjantları tanımsızdır.

Tanım kümesi $R - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k.\pi \,/\, k \in Z \right\}$ olan ve bu kümenin her bir α elemanını $\tan\alpha$ ya dönüştüren fonksiyona, **tanjant fonksiyonu** denir.

Buna göre,

$$\tan : R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k.\pi \,/\, k \in Z \right\} \to R$$

$$\alpha \to \tan\alpha \text{ olur.}$$

Şekildeki P' noktası, P noktasının orjine göre simetriğidir. P noktasına eşlenen reel sayılardan biri α ise $\alpha + \pi$ reel sayısı da P' noktası ile eşlenir. OP' doğrusu tanjant eksenini $T(1,t)$ noktasında keser.
O halde $t = \tan(\alpha + \pi)$ olur.

Bunun gibi, P ya da P' noktasına eşlenen;

$\alpha, \alpha + \pi, \alpha + 2\pi, \alpha + 3\pi, \ldots, \alpha + k.\pi$

sayılarının tanjantları aynı reel sayıdır. α reel sayısının tanjantı t ise $\tan(\alpha + k.\pi) = \tan\alpha = t$ dir.

Sonuç

- $\alpha = 0^{O}$ olduğunda P noktası A ile çakışır. Bu durumda, $t = 0$ ve $\tan 0^{O} = 0$ bulunur.
- $\alpha = 90^{O}$ olduğunda P noktası B ile çakışır. Bu durumda, $[OP$ ışını tanjant ekseni ile kesişmez. Buna göre $\tan 90^{O}$ tanımsızdır.
- $\alpha = 180^{O}$ olduğunda P noktası C ile çakışır. Bu durumda, $[OP$ ışınını üzerinde taşıyan doğrunun tanjant eksenini kestiği nokta, yine A olur. Buna göre, $t = 0$ ve $\tan 180^{O} = 0$ bulunur.
- $\alpha = 270^{O}$ olduğunda $[OP$ ışını ile tanjant ekseni paralel olduklarından dolayı kesişmezler. Buna göre $\tan 270^{O}$ tanımsızdır.

Örnek:

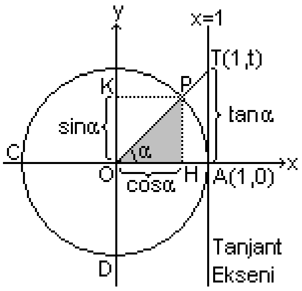
$\sin^2 15^o + \tan 0^o + \cos^2 15^o$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$\sin^2 15^o + \cos^2 15^o = 1$ ve $\tan 0^o = 0$ olduğundan,

$\sin^2 15^o + \tan 0^o + \cos^2 15^o = 1 + 0 = 1$ dir.

Tanα yı Sinα ve Cosα türünden yazma



Yandaki şekilde

$|OH| = \cos\alpha$

$|OK| = \sin\alpha$,

$|AT| = \tan\alpha$ ve

$|OP| = |OA| = 1$ dir. Üçgenlerin benzerliği kullanılarak

OHP $\approx$ OAT (A.A.A) olduğundan,

$$\frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|HP|}{|AT|} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Örnek:

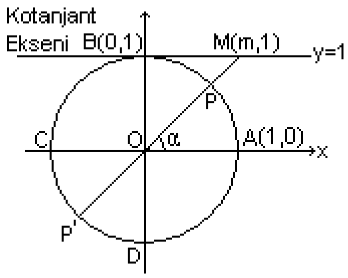
$A = 6 - \tan x$ olduğuna göre, A nın alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm

Tanjant fonksiyonunun görüntü kümesi R reel sayılar kümesidir. Bu nedenle $\tan x = 5$ olabilir.

Buna göre, $A = 6 - \tan x$ ifadesinin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri; 6 – 5 = 1 dir.

D. Kotanjant Fonksiyonu



Birim çembere $B(0,1)$ noktasında teğet olan doğruyu çizelim. Bu doğrunun denklemi $y = 1$ dir.

Birim çemberde $s(A\hat{O}P) = \alpha$ olmak üzere $[OP$ ışınının $y = 1$ doğrusunu kestiği M noktasının apsisine, α reel sayısının kotanjantı denir. $m = \cot\alpha$ biçiminde gösterilir.

Denklemi $y = 1$ olan doğruya **kotanjant ekseni** denir.

$P(x, y)$ noktası, $A(1,0)$ ya da $C(-1,0)$ noktası ile çakışırsa; $[OP$ ışını, denklemi $y = 1$ olan doğruyu kesmez.

Buna göre;

$..., -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$

reel sayılarının kotanjantı tanımsızdır.

Genel olarak

$k \in Z$ olmak üzere $k.\pi$ şeklindeki reel sayıların kotanjantları tanımsızdır.

Tanım kümesi $R - \{k.\pi / k \in Z\}$ olan ve bu kümenin her bir α elemanını $\cot\alpha$ ya dönüştüren fonksiyona, **kotanjant fonksiyonu** denir.

Buna göre,

$\cot : R - \{k.\pi / k \in Z\} \rightarrow R$

$\alpha \rightarrow \cot\alpha$ olur.

Şekildeki P' noktası, P noktasının orjine göre simetriğidir. P noktasına eşlenen reel sayılardan biri α ise $\alpha + \pi$ reel sayısı da P' noktası ile eşlenir. OP' doğrusu kotanjant eksenini $M(1, m)$ noktasında keser.

O halde $m = \tan(\alpha + \pi)$ olur.

Bunun gibi, P ya da P' noktasına eşlenen;

$\alpha, \alpha+\pi, \alpha+2\pi, \alpha+3\pi, ..., \alpha+k.\pi$

sayılarının kotanjantları aynı reel sayıdır. α reel sayısının kotanjantı m ise

$\cot(\alpha + k.\pi) = \cot\alpha = m$ dir.

Sonuç

- $\alpha = 0^{O}$ olduğunda P noktası A ile çakışır. Bu durumda, $[OP$ ışını kotanjant ekseni ile kesişmez.

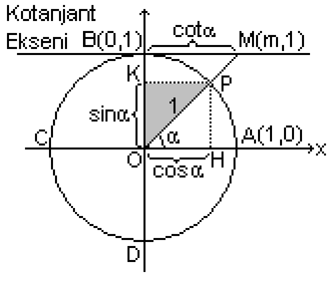
  Buna göre $\tan 0^{O}$ tanımsızdır.

- $\alpha = 90^{O}$ olduğunda P noktası B ile çakışır. Bu durumda, $m = 0$ ve $\tan 90^{O} = 0$ olur.

- $\alpha = 180^{O}$ olduğunda P noktası C ile çakışır. Bu durumda $[OP$ ışını ile kotanjant ekseni paralel olduklarından dolayı kesişmezler. Buna göre $\tan 180^{O}$ tanımsızdır

- $\alpha = 270^{O}$ olduğunda $[OP$ ışınını üzerinde taşıyan doğrunun kotanjant eksenini kestiği nokta, yine B olur. Buna göre, $m = 0$ ve $\cot 270^{O} = 0$ bulunur.

Cotα yı Sinα ve Cosα türünden yazma



Yandaki şekilde

$|KP| = |OH| = \cos\alpha$

$|OK| = |PH| = \sin\alpha$

$|BM| = \cot\alpha$ ve

$|OP| = |OB| = 1$ dir.

Üçgenlerin benzerliği kullanılarak $OKP \approx OBM$ (A.A.A) olduğundan,

$$\frac{|OK|}{|OB|} = \frac{|KP|}{|BM|} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Örnek:

$\frac{3}{\sin x} = \frac{4 + \tan x . \cot x}{\cos x}$ olduğuna göre, tanx in değeri kaçtır?

Çözüm

$$\frac{3}{\sin x} = \frac{4 + \tan x . \cot x}{\cos x} = \frac{4 + \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{\cos x}{\sin x}}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sin x} = \frac{4+1}{\cos x} \Rightarrow \frac{3}{\sin x} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{3}{5}$$ bulunur.

Örnek:

$2 + \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$ ifadesinin sadeleştiriniz.

Çözüm

$$2 + \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 2 + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 2 + \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 2 + 1 = 3$$

Örnek:

$\sin x + \cos x = A$ olmak üzere $\frac{\sin x}{1 + \cot x} + \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ ifadesinin A türünden değeri nedir?

Çözüm

$$\frac{\sin x}{1+\cot x}+\frac{\cos x}{1+\tan x}=\frac{\sin x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\sin x}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sin x+\cos x}=A^{-1} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\tan 810^{\circ}$ ve $\cot\frac{5\pi}{2}$ ifadelerinin değerlerini bulalım.

Çözüm

$810^{\circ}=90^{\circ}+2.360^{\circ}$ olup 810° lik açının esas ölçüsü 90° dir. Buna göre,

$\tan 810^{\circ}=\tan 90^{\circ}$ tanımsızdır.

$\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi+4\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi$ olup $\frac{5\pi}{2}$ radyanlık açının

esas ölçüsü $\frac{\pi}{2}=90^{\circ}$ dir. Buna göre,

$\cot\frac{5\pi}{2}=\cot\frac{\pi}{2}=0$ dır.

Örnek:

$\sin\alpha\neq 0$ ve $\cos\alpha\neq 0$ olmak üzere $\tan\alpha.\cot\alpha$ çarpımının sonucunu bulalım.

Çözüm

$\tan\alpha.\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$ bulunur. Buradan

$\boxed{\tan\alpha.\cot\alpha=1}$ veya

$\boxed{\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}}$ ve $\boxed{\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}}$ bulunur.

Örnek:

$\sin^3 x+\sin x.\cos^2 x$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm

$$\sin^3 x+\sin x.\cos^2 x=\sin x.\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$=\sin x.1=\sin x$$

Örnek:

$\frac{\cos^2 x-1}{\cos x.\sin x}$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\cos^2 x-1}{\cos x.\sin x}=-\frac{1-\cos^2 x}{\cos x.\sin x}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x.\sin x}$$

$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

Örnek:

$\frac{-1+\sin x}{\cos^2 x}$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm

$$\frac{-1+\sin x}{\cos^2 x}=-\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=-\frac{1-\sin x}{(1-\sin x).(1+\sin x)}$$

$$=-\frac{1}{1+\sin x}$$

Örnek:

$\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\cos^2 x}{1}=\sin x.\cos x$$

Örnek:

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ olduğuna göre $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}}.\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}}$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}}.\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{1^2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{\cot^2\alpha}=\left|\cot\alpha\right|=-\cot\alpha$$

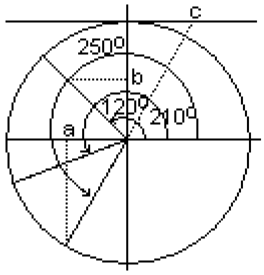
$$\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \text{ içincot}\alpha<0 \text{ oldugundan}\right)$$

Örnek:

$a=\cos 250^{o}$, $b=\sin 120^{o}$, $c=\cot 210^{o}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

Verilen sayıları birim çemberde gösterelim.



Şekilden de anlaşılacağı gibi, a negatif, b ile c pozitiftir ve

a < b < c dir.

Örnek:

$\dfrac{\pi}{6}=30^{o}$ ve $\dfrac{\pi}{3}=60^{o}$ açılarının tanjant ve kotanjant fonksiyonları altındaki görüntülerini bulalım.

Çözüm

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\sin 30^{o}=\dfrac{1}{2}$ ve $\cos\dfrac{\pi}{6}=\cos 30^{o}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olduğunu daha önce bulmuştuk.

O halde,

$$\tan 30^{o}=\frac{\sin 30^{o}}{\cos 30^{o}}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^{o}=\frac{\cos 30^{o}}{\sin 30^{o}}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

$\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin 60^{o}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos 60^{o}=\dfrac{1}{2}$ olduğunu daha önce bulmuştuk.

O halde,

$$\tan 60^{o}=\frac{\sin 60^{o}}{\cos 60^{o}}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

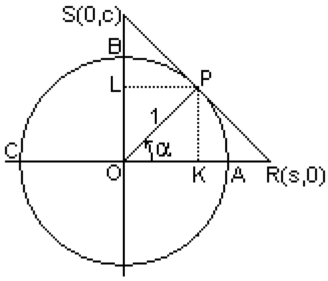
$$\cot 60^{o}=\frac{\cos 60^{o}}{\sin 60^{o}}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

Bu yolla çok kullanılan bazı açıların tanjant ve kotanjant fonksiyonları altındaki değerleri hesaplanabilir.

Açı	Kosinüs	Sinüs	Tanjant	Kotanjant
0^{o}	1	0	0	Tanımsız
$\frac{\pi}{4}=45^{o}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{6}=30^{o}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{3}=60^{o}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}=90^{o}$	0	1	Tanımsız	0
$\frac{2\pi}{3}=120^{o}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}=135^{o}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}=150^{o}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\pi=180^{o}$	-1	0	0	Tanımsız
$\frac{7\pi}{6}=210^{o}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}=225^{o}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{4\pi}{3}=240^{o}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}=270^{o}$	0	-1	Tanımsız	0
$\frac{5\pi}{3}=300^{o}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{4}=315^{o}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{11\pi}{6}=330^{o}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

E. Kosekant , Sekant Fonksiyonları

Birim çember üzerinde $m(A\hat{O}P)=\alpha$ olmak üzere,



P noktasındaki teğetin y eksenini kestiği noktanın ordinatına, α reel sayısının kosekantı denir ve $\operatorname{cosec}\alpha$ ile gösterilir. P noktasındaki teğetin x eksenini kestiği noktanın apsisine α reel sayısının sekantı denir ve $\sec\alpha$ ile gösterilir.

$c=\operatorname{cosec}\alpha$, $s=\sec\alpha$

Kural

- $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$
- $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$

Örnek:

$1+\tan^2\alpha$ ifadesinin özdeşini bulalım.

Çözüm

$$1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$$

Uyarı

Kosekant ve sekant fonksiyonlarının değer kümesi $R-(-1,1)$ dir.

Yani $\operatorname{cosec}\alpha$ ve $\sec\alpha$, $(-1,1)$ aralığındaki değerlere eşit olamazlar.

Örnek:

$1+\cot^2\alpha$ ifadesinin özdeşini bulalım.

Çözüm

$$1+\cot^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

Sonuç

- $1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1+\cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Örnek:

$A = \cos 15^o + \dfrac{\sec 15^o - \operatorname{cosec} 15^o}{\tan 15^o + \cot 15^o}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm

$$A = \cos 15^o + \frac{\dfrac{1}{\cos 15^o} - \dfrac{1}{\sin 15^o}}{\dfrac{\sin 15^o}{\cos 15^o} + \dfrac{\cos 15^o}{\sin 15^o}}$$

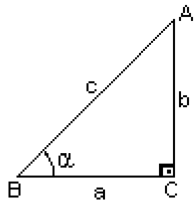
$$= \cos 15^o + \frac{\dfrac{\sin 15^o - \cos 15^o}{\sin 15^o . \cos 15^o}}{\dfrac{\sin^2 15^o + \cos^2 15^o}{\sin 15^o . \cos 15^o}}$$

$$= \cos 15^o + \frac{\dfrac{\sin 15^o - \cos 15^o}{\sin 15^o . \cos 15^o}}{\dfrac{1}{\sin 15^o . \cos 15^o}}$$

$$= \cos 15^o + \sin 15^o - \cos 15^o = \sin 15^o$$

F. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

BCA dik üçgeninde, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.



$$\cos\alpha = \frac{\text{Komsu Dik Kenar Uzunlugu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karsı Dik Kenar Uzunlugu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

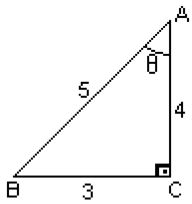
$$\cot\alpha = \frac{\text{Komsu Dik Kenar Uzunlugu}}{\text{Karsı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karsı Dik Kenar Uzunlugu}}{\text{Komsu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{Hipotenüsün Uzunlugu}}{\text{Karsı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenüsün Uzunlugu}}{\text{Komsu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

Örnek:



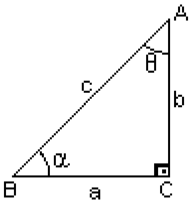
$\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\cot\theta = \frac{4}{3}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$

Tümler Açıların Trigonometrik Oranları Arasındaki Bağıntılar

Ölçüleri toplamı $90^o \left(\frac{\pi}{2} \text{ radyan}\right)$ olan iki açıya tümler açılar denir.



ABC dik üçgeninde $s(\hat{C}) = 90^{o}$ ise, $s(\hat{A}) + s(\hat{B}) = 90^{o}$ olup α ve θ tümler açılardır.

Bu açıların trigonometrik oranları bulunursa,

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \cos\theta = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \sin\theta = \frac{a}{c} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}, \cot\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan\alpha = \cot\theta$$

$$\cot\alpha = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \cot\alpha = \tan\theta$$

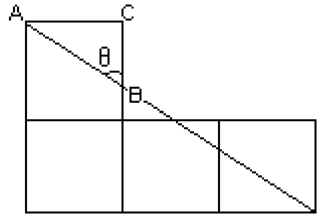
Tümler açılardan dan birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne; birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına; birinin sekantı diğerinin kosekantına eşittir.

- $\alpha + \theta = 90^{o}$ ise $\sin\alpha = \cos\theta$
- $\alpha + \theta = 90^{o}$ ise $\tan\alpha = \cot\theta$
- $\alpha + \theta = 90^{o}$ ise $\sec\alpha = \mathrm{cosec}\,\theta$

$\boxed{\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$ dır. Şu halde,

- $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- $\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- $\cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

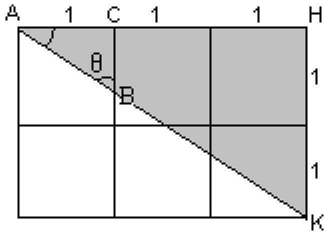
Örnek:



Yandaki şekil, özdeş dört küçük kareden oluşmuştur.

$m(A\hat{B}C) = \theta$ olduğuna göre, $\tan\theta$ kaçtır?

Çözüm:



$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 90^{o}$ olduğu için

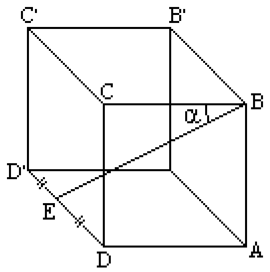
$\tan\theta = \cot\hat{A}$ dır.

Özdeş karelerin kenar uzunluğunu 1 birim olarak kabul edelim.

$$\cot\hat{A} = \frac{\text{Komsu Dik Kenar}}{\text{Karsı Dik Kenar}} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

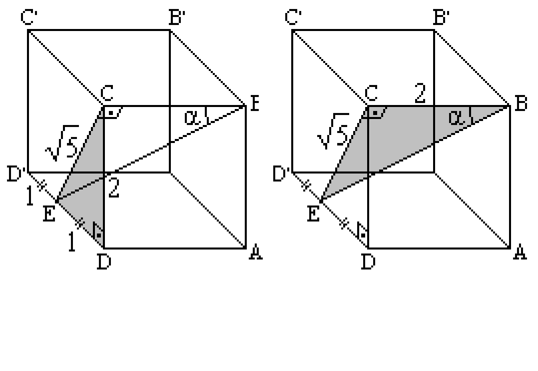
O halde $\tan\theta = \frac{3}{2}$ dir.

Örnek:



Yandaki şekil bir küp, $m(E\hat{B}C) = \alpha$ ve $|D'E| = |ED|$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değeri kaçtır?

Çözüm



$m(E\hat{B}C) = \alpha$, $|D'E| = |ED| = 1$ cm olsun.

Bu durumda küpün bir kenarı 2 cm olur. EDC dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulanırsa,

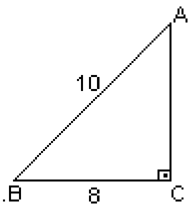
$|EC|^2 = |ED|^2 + |DC|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$|EC| = \sqrt{5}$ bulunur.

Buna göre ECB dik üçgeninden,

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Karsı Dik Kenar}}{\text{Komsu Dik Kenar}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ bulunur.

Örnek:



Yandaki dik üçgende

$s(\hat{C}) = 90^o$, $|AB| = 10$ cm,

$|BC| = 8$ cm ise $\sin A$, $\tan A$,

$\cos A$ ve $\cot A$ değerlerini bulalım.

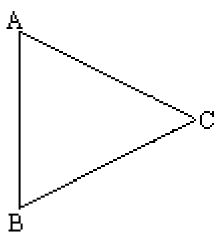
Çözüm:

ABC dik üçgeninde, $|AC| = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm bulunur.

$\sin A = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, $\tan A = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

$\cot A = \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$, $\cos A = \dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

Örnek:

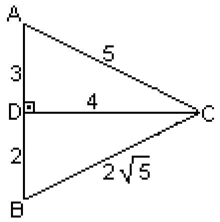


Şekildeki ABC üçgeninde

$|AB| = |AC|$ dir. $\sin A = \dfrac{4}{5}$ ise

B açısının trigonometrik oranlarını bulunuz.

Çözüm:



$[AB]$ kenarına ait yüksekliği çizelim.

$\sin A = \dfrac{4}{5} = \dfrac{|DC|}{|AC|}$ ise,

$|DC| = 4$, $|AC| = 5$ bulunur.

ADC dik üçgeninde pisagor teoreminden,

$|AD| = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ bulunur.

$|AB| = |AC| \Rightarrow |DB| = 5 - 3 = 2$ dir

BDC dik üçgeninde pisagor teoreminden,

$|BC| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ bulunur.

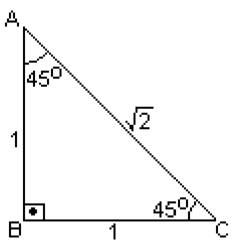
O halde,

$\sin B = \dfrac{|DC|}{|BC|} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos B = \dfrac{|DB|}{|BC|} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan B = \dfrac{|DC|}{|DB|} = \dfrac{4}{2} = 2$, $\cot B = \dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

G. Özel Açıların Trigonometrik Oranları

1. 45^O nin Trigonometrik Oranları



Dik kenar uzunlukları 1 birim olan ikizkenar dik üçgeni göz önüne alalım.

$|AB| = |BC| = 1$ birim ise pisagor teoreminden,

$|AC| = \sqrt{2}$ birim bulunur.

Buna göre CBA dik üçgeninde 45° nin trigonometrik oranları,

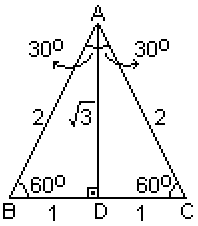
$$\sin 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \cot 45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek:

$$\sin 45^{\circ} + \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

2. 30° ve 60° nin Trigonometrik Oranları



Bir kenarının uzunluğu 2 birim olan eşkenar üçgeni göz önüne alalım.

$|AB| = |BC| = |AC| = 2$ birim ise AD yüksekliği aynı zamanda kenar ortay ve açı ortay olduğu için

$|BD| = 1$ birim ve $|AH| = \sqrt{3}$ birim olur.

Buna göre, ABD dik üçgeninde 30° nin ve 60° nin trigonometrik oranları

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \cot 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad , \quad \cot 60^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

bulunur.

Sonuç

Açı	Sinüs	Kosinüs	Tanjant	Kotanjant
0°	0	1	0	Tanımsız
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	Tanımsız	0

Örnek:

$\dfrac{\tan 45^{\circ} + \tan 30^{\circ}}{1 - \tan 45^{\circ}.\sec 30^{\circ}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{\tan 45^{\circ} + \tan 30^{\circ}}{1 - \tan 45^{\circ}.\sec 30^{\circ}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{\cos 30^{\circ}}}$$

$$= \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -3\sqrt{3} - 5 \quad \text{bulunur.}$$

3. Trigonometrik Fonksiyonların Birbirleri Cinsinden Yazılması

Trigonometrik fonksiyonları birbiri cinsinden ifade ederken;

$$\cos^{2}\alpha + \sin^{2}\alpha = 1 \, , \; \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \, , \; \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

özdeşliklerini kullanacağız.

a. $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini $\cos\alpha$ cinsinden yazalım,

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \mp\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\mp\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\mp\sqrt{1-\cos^2\alpha}}}$$

Bu özdeşliklerde işaretin (+) mı, yoksa (–) mi olacağına α açısının hangi bölgede olduğuna bakarak karar vereceğiz.

b. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ değerlerini $\cot\alpha$ cinsinden yazalım,

$$1+\cot^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ olduğundan}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ olduğundan}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{\cot^2\alpha}} = \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

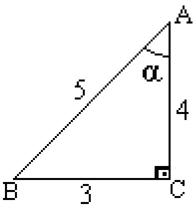
$$\boxed{\cos\alpha = \mp\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$

Örnek:

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ve $\sin\alpha = 0{,}6$ olduğuna göre;
$\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini bulalım.

Çözüm:

$\sin\alpha = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ tir. Verilenleri dik bir üçgene yazarsak;



Pisagor teoreminden,

$|AC| = \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{16} = 4$ bulunur.

Böylece

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{4}{5}$$

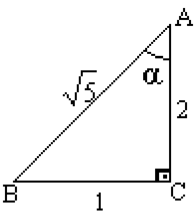
$\tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3}{4}$, $\cot\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Örnek:

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ve $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ olduğuna göre;
$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini bulalım.

Çözüm:

Verilenleri dik bir üçgene yazarsak;



Pisagor teoreminden,

$|AB| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ bulunur.

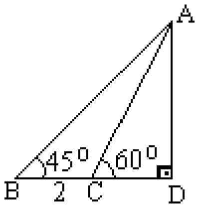
Böylece

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\cot\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2}{1} = 2$ bulunur.

Örnek:



Yandaki şekilde $m(\hat{D}) = 90^{o}$

$m(\hat{B}) = 45^{o}$ $m(\hat{C}) = 60^{o}$ ve

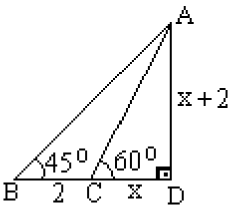
$|BC| = 2$ olduğuna göre

$|AD|$, $|CD|$ ve $|AB|$ uzunluklarını bulunuz.

Çözüm:

$|CD| = x$ olsun. ABD ikizkenar dik üçgen olduğundan

$|AD| = |BD| = x + 2$ dir.



ADC dik üçgeninden,

$\tan 60^{o} = \sqrt{3} = \dfrac{|AD|}{|CD|}$ ise,

$\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{x+2}{x} \Rightarrow x = \sqrt{3} + 1$ dir.

O halde,

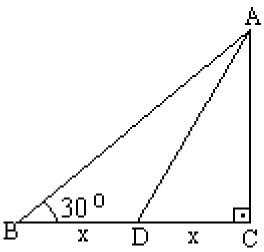
$|CD| = x = \sqrt{3} + 1$

$|AD| = x + 2 = \sqrt{3} + 3$

$|AB| = \sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)^2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

bulunur

Örnek:



Şekildeki dik üçgende $|DC| = |BD| = x$ ve $m(\hat{B}) = 30^{o}$ olarak veriliyor. $\tan(D\hat{A}C)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

ABC dik üçgeni $30^{o} - 60^{o} - 90^{o}$ üçgeni olup 30^{o} nin karşısındaki kenar $|AC| = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$ olur.

$\tan(D\hat{A}C) = \dfrac{|DC|}{|AC|} = \dfrac{x}{\dfrac{2x}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

KONU BİTMİŞTİR...