PARABOLLER

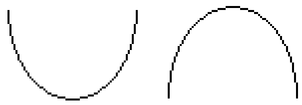
$a, b, c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $f : R \rightarrow R$ tanımlanan

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonlara ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar denir.

$f = \{(x, y) : y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R \text{ ve } a \neq 0\}$ kümesinin elemanları olan ikililere, analitik düzlemde karşılık gelen noktalara f fonksiyonunun grafiği denir.

İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerinin gösterdiği eğriye **parabol** denir.

Uyarı



$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği (parabol) yandaki gibi kolları yukarı doğru olan ya da kolları aşağı doğru olan bir eğridir.

Örnek:

$f(x) = mx^2$ fonksiyonunun grafiği (parabol) (-2,8) noktasından geçtiğine göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

Grafiğin (-2,8) noktasından geçmesi için, bu noktanın Denklemi sağlaması gerekir. Buna göre,

$f(x) = mx^2$ ise, $f(-2) = 8$ dir.

$m.(-2)^2 = 8 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$ dir.

Örnek:

$f(x) = 3x^2 - 5x + 9$ fonksiyonunun grafiğinin Oy eksenini kestiği noktayı bulalım.

Çözüm:

Oy ekseni üzerindeki noktaların ortak özellikleri, apsislerinin sıfıra eşit olmalarıdır.

Buna göre, parabolün Oy eksenini kestiği nokta, $(0, f(0))$ dır.

$f(x) = 3x^2 - 5x + 9$ ise,

$x = 0$ için $f(0) = 3.0^2 - 5.0 + 9 = 9$ olduğundan,

parabolün Oy eksenini kestiği nokta, $(0,9)$ dur.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 5x$ parabolünün Ox eksenini kestiği noktaları bulalım.

Çözüm:

Ox ekseni üzerindeki noktaların ortak özelliği, ordinatlarının sıfıra eşit olmalarıdır.

Buna göre, parabolün Ox eksenini kestiği nokta, $(x,0)$ dır.

$f(x) = x^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow x.(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 5$ bulunur.

O halde parabolün Ox eksenini kestiği noktalar, $(0,0)$ ve $(5,0)$ dır.

Sonuç

$f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin (parabolün);

- Oy eksenini kestiği noktanın; apsis 0 (sıfır), ordinatı $f(0) = c$ dir.
- Ox eksenini kestiği noktaların (varsa) ordinatları 0 (sıfır), apsisleri $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir.

Örnek:

$f(x) = x^2 + x - 6$ fonksiyonunun grafiğinin (parabolün) eksenleri kestiği noktaları bulalım.

Çözüm:

$x = 0$ için, $y = 0^2 + 0 - 6 = 0 - 6 = -6$ dır.

Buna göre parabolün Oy eksenini kestiği nokta $(0,-6)$ dır.

$f(x) = 0$ için, $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3).(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = 2$ dir.

Buna göre parabolün Ox eksenini kestiği noktalar $(-3,0)$ ve $(2,0)$ dır.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 2x - m$ fonksiyonunun grafiği Ox eksenini kesmediğine göre, m nin alabileceği tüm değerlerden oluşan kümeyi bulalım.

Çözüm:

Parabolün Ox eksenini kestiği noktaların (varsa) ordinatları 0 (sıfır), apsisleri $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir. Eğer parabol Ox eksenini kesmiyorsa, $f(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur. Reel kök yoksa denklemin diskriminantı sıfırdan küçüktür.($\Delta < 0$)

$f(x) = x^2 + 2x - m = 0$ denkleminde,

$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 2^2 - 4.1.(-m) < 0$

$\Rightarrow 4 + 4m < 0 \Rightarrow 4m < -4 \Rightarrow m < -1$ dir.

Buna göre verilen koşulları sağlayan, m nin alabileceği tüm değerlerden oluşan küme,

$\{m : m < -1, m \in R\} = (-\infty, -1)$ dir.

Sonuç

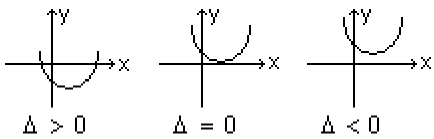
$f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda

$\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere,

- $\Delta < 0$ ise, parabol Ox eksenini kesmez.
- $\Delta = 0$ ise, parabol Ox eksenini bir noktada keser.

Yani parabol Ox eksenine teğettir.

- $\Delta > 0$ ise, parabol Ox eksenini farklı iki noktada keser.



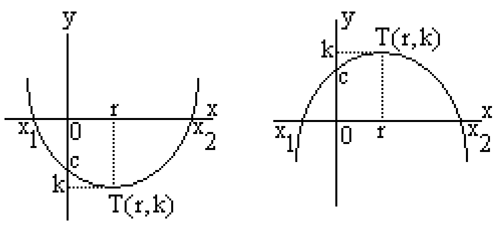
Yukarıda verilen şekillere göre,

1. şekilde $y = f(x)$ parabolü Ox eksenini farklı iki noktada kestiği için, $y = f(x) = 0$ denkleminin farklı iki reel kökü vardır. Yani $\Delta > 0$ dır.

2. şekilde $y = f(x)$ parabolü Ox eksenine teğet olup Ox eksenini bir noktada kestiği için, $y = f(x) = 0$ denkleminin eşit iki reel kökü vardır(çift katlı kök). Yani $\Delta = 0$ dır.

3. şekilde $y = f(x)$ parabolü Ox eksenini kesmediği için, $y = f(x) = 0$ denkleminin reel kökü yoktur. Yani $\Delta < 0$ dır.

Parabolün Tepe Noktası



Şekildeki parabollerin tepe noktaları $T(r,k)$ dır. Parabol $x = r$ doğrusuna göre simetrik olan bir şekildir. Bunun için parabolün Ox eksenini kestiği noktaların apsisleri olan x_1 ve x_2 nin aritmetik ortalaması r ye eşittir. Bu durumu aşağıdaki kuralla ifade edebiliriz.

Kural

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere,

- $r = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ise $r = -\dfrac{b}{2a}$ dır.

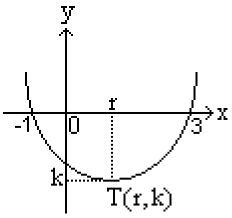
- $k = f(r)$ ise $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ olur.

Örnek:

Ox eksenini $(-1,0)$ ve $(3,0)$ noktalarında kesen bir parabolün tepe noktasının apsisini bulalım.

Çözüm:

Tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere, verilen koşullara uygun parabollerden biri aşağıdaki şekildeki gibi olabilir.



$x_1 = -1$ ve $x_2 = 3$ olmak üzere,

$r = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ olur.

Buna göre parabolün tepe noktasının apsisi $r = 1$ dir.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 2x - 6$ parabolünün tepe noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

Tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere,

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$,

$k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4.1.(-6) - 2^2}{4.1} = \dfrac{-28}{4} = -7$ dir.

Buna göre tepe noktası $T(-1,-7)$ dir.

Örnek:

$f(x) = x^2 + mx - m + 6$ parabolünün simetri ekseni $x = -2$ doğrusu olduğuna göre m nin değerini bulalım.

Çözüm:

Tepe noktasının koordinatları $T(r,k)$ olmak koşuluyla

$x = r$ doğrusu parabolün simetri eksenidir.

$x = -2 \Rightarrow r = -2$ dir.

$r = -\dfrac{b}{2a} = -2 \Rightarrow -\dfrac{m}{2} = -2 \Rightarrow m = 4$ bulunur.

Sonuç

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere, parabolün simetri ekseni $x = r$ doğrusudur.

Uyarı

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesi ikinci dereceden fonksiyonun en genel halidir.

$f(x) = a(x-r)^2 + k$ ifadesi düzenlenerek yukarıdaki hale dönüştürülürse tepe noktasının $T(r,k)$ olduğu görülür.

Örnek:

$f(x) = 2.(x-1)^2 + 3$ parabolünün tepe noktasını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = a(x-r)^2 + k$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)$ olduğundan,

$f(x) = 2.(x-1)^2 + 3$ parabolünde tepe noktasının apsisi $r = 1$ ve ordinatı $k = 3$ tür.

O halde parabolün tepe noktası $T(1,3)$ tür.

Örnek:

$f(x) = 2.(x-1)^2 + 5$ parabolünün tepe noktası, $T(1,5)$ tir.

Örnek:

$f(x) = 2.(x+1)^2 + 5$ parabolünün tepe noktası, $T(-1,5)$ tir.

Örnek:

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini inceleyelim.

Çözüm:

Bir fonksiyonun grafiğini çizmek için, grafiği oluşturan bütün noktaları tek tek bulmak gerekmez; kabaca grafiği ortaya koymak yeterlidir.

$y = f(x) = x^2$ koşuluna uygun olarak (x, y) sıralı ikililerini belirlemeliyiz.

$f(x) = x^2$ ise, $x = -2$ için $f(-2) = 4$ tür.

$x = -1$ için $f(-1) = 1$ dir.

$x = 0$ için $f(0) = 0$ dır.

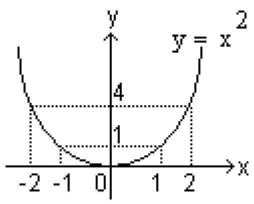
$x = 1$ için $f(1) = 1$ dir.

$x = 2$ için $f(2) = 4$ tür.

Bulduğumuz bu değerleri tabloda gösterirsek

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...

Tabloda gösterildiği gibi $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$ noktaları parabolün üzerindedir. Bu noktaları koordinat düzleminde gösterip, daha sonra da bu noktalardan geçecek biçimde verilen fonksiyonun grafiği çizilir.



Yukarıdaki şekil dikkatle incelenirse şunlar görülür:

1. Parabolün kolları yukarı doğrudur. Bunun nedeni $f(x) = x^2$ ifadesindeki x^2 nin katsayısının pozitif olmasıdır. x^2 nin katsayısı negatif olsaydı kollar aşağı doğru olacaktır.

2. Parabolün tepe noktası $(0,0)$ noktasıdır.

3. Parabolün simetri ekseni $x = 0$ doğrusudur.

4. $f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanı (fonksiyonun en küçük elemanı) parabolün tepe noktasının ordinatıdır. Yani, sıfırdır. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun en büyük elemanının bilinemeyeceğini görünüz.

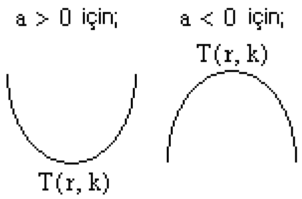
Eğer parabolün kolları aşağı doğru olsaydı, tepe noktasının ordinatı fonksiyonun en büyük elemanı olurdu ve en küçük eleman bilinemezdi.

Sonuç

$f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinde (parabolde)

- $a > 0$ ise kollar yukarıya doğru,
- $a < 0$ ise kollar aşağıya doğrudur.

Buna göre, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Parabolün en alt ya da en üst noktasına tepe noktası denir.

Örnek:

$f(x) = (a-3)x^2 - (a+1)x + 1$ parabolünün kolları aşağı doğru olduğuna göre a nın ait olduğu en geniş aralığı bulalım.

Çözüm:

$f(x) = (a-3)x^2 - (a+1)x + 1$ parabolünün kolları aşağı doğru olduğuna göre,

$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ tür.

Buna göre, $a \in (-\infty, 3)$ olur.

Parabolün Grafiği

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğini (parabolün) çizmek için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar belirlenir.
2. Parabolün tepe noktası bulunur.
3. kesim noktaları ve tepe noktası koordinat düzleminde gösterilip, bu noktalardan geçecek şekilde grafik çizilir.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

A. Parabolün eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0$ için $f(0) = -3$ tür.

O halde parabolün Oy eksenini kestiği nokta $(0,-3)$ tür.

$y = 0$ için, $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3).(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = 1$ dir.

O halde parabol Ox eksenini $(-3,0)$ ve $(1,0)$ noktalarında keser.

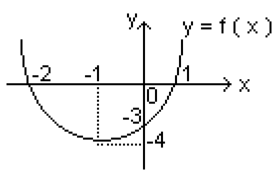
B. Parabolün tepe noktası:

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.1.(-3) - 2^2}{4.1} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ olup}$$

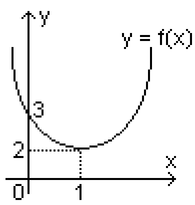
parabolün tepe noktası $T(r,k) = T(-1,-4)$ tür.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunda $a = 1 > 0$ olup parabolün kolları yukarıya doğrudur.



Örnek:

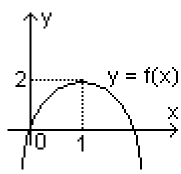
Tepe noktası $T(1,2)$ olan $f(x) = (x-1)^2 + 2$ parabolünün grafiği aşağıda verilmiştir.



Örnek:

Tepe noktası $T(1,2)$ olan $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$ parabolünün grafiği aşağıda verilmiştir

Çözüm:



Örnek:

$f : [2,1] \to R$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ olduğuna göre $f(x)$ in grafiğini çizip alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulalım.

Çözüm:

$x = 0$ için $f(0) = 3$ tür. O halde parabolün Oy eksenini kestiği nokta $(0,3)$ tür.

$y = 0$ için, $-x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow (-x-3).(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = 1$ dir.

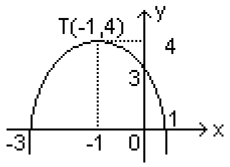
O halde parabol Ox eksenini $(-3,0)$ ve $(1,0)$ noktalarında keser.

$$r = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4.a} = \frac{4.(-1).3 - (-2)^2}{4.(-1)} = \frac{-16}{-4} = 4 \text{ olup}$$

parabolün tepe noktası $T(r,k)=T(-1,4)$ tür.

$f(x)=-x^2-2x+3$ fonksiyonunda $a=-1<0$ olup parabolün kolları aşağıya doğrudur.



$f(1)=0$
Buna göre $f:[2,1]\to R$, $f(x)=-x^2-2x+3$ fonksiyonunun grafiği yanda olup $f(x)$ in alabileceği en küçük değer 0 ve alabileceği en büyük değer 4 tür.

$y=f(x)$ in alabileceği tam sayılar 0,1,2,3,4 tür.

Sonuç

A. $f:R\to R$, $f(x)=ax^2+bx+c$ olmak üzere, parabolün tepe noktası $T(r,k)$ olsun.

- $a<0$ ise parabolün alabileceği en büyük değer k dır.
- $a>0$ ise parabolün alabileceği en küçük değer k dır.

B. Parabolün tanım aralığı R, yani reel sayılar kümesi değil de $[a,b]$ biçiminde sınırlı bir reel sayı aralığı ise fonksiyonun en büyük ya da en küçük elemanını bulmak için, son örnekte olduğu gibi ya grafik çizerek yorum yaparız ya da aşağıdaki işlemleri yaparız:

1. $f(x)$ in tepe noktasının ordinatı yani k bulunur.
2. $f(a)$ ile $f(b)$ hesaplanır.
3. Tepe noktasının apsisi $[a,b]$ aralığında ise, k, $f(a)$, $f(b)$ sayılarının en küçük olanı $f(x)$ in en küçük elemanı: en büyük olanı da $f(x)$ in en büyük elemanı olur.

   Tepe noktasının apsisi $[a,b]$ aralığında değilse, $f(a)$, $f(b)$ sayılarının küçük olanı $f(x)$ in en küçük elemanı: büyük olanı da $f(x)$ in en büyük elemanı olur.

Örnek:

$f:[-2,3]\to R$, $f(x)=x^2-2x+6$ olduğuna göre $f(x)$ alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulalım.

Çözüm:

$f(x)=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)=T(1,5)$ tir.

Parabolün kolları yukarı doğru olduğu için $f(x)$ in en küçük değeri $x=r=1$ için, $k=5$ tir.

$x=-2$ için $f(-2)=14$ ve $x=3$ için $f(3)=9$ dur.

Buna göre $f(x)$ in en büyük değeri 14 tür.

Parabolün Denkleminin Yazılması

Bir parabolün denklemini tek türlü yazabilmek için, üzerindeki farklı üç noktanın bilinmesi gerekir.

Örnek:

$(0,4)$, $(1,9)$, $(3,31)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulalım.

Çözüm:

İstenen parabolün denklemi $y=f(x)=ax^2+bx+c$ olsun.

Verilen noktalar parabolün üzerinde olduğuna göre, parabolün denklemini sağlar.

$(0,4)\in f$ ise,

$f(0)=4\Rightarrow a.0^2+b.0+c=4\Rightarrow c=4$ tür.

$(1,9)\in f$ ise ,

$f(1)=9\Rightarrow a.1^2+b.1+c=9\Rightarrow a+b=5$ tir

$(3,31)\in f$ ise ,

$f(3)=31\Rightarrow a.3^2+b.3+c=31\Rightarrow 3a+b=9$ dur.

Son iki eşitlikten $\left.\begin{matrix} a+b=5 \\ 3a+b=9 \end{matrix}\right\}$ $a=2$ ve $b=3$ bulunur.

O halde parabolün denklemi $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ tür.

Kural

Ox eksenini x_1 ve x_2 noktalarında kesen parabolün denklemi, $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$ dir.

Örnek:

$(0,-6)$ noktasından geçen parabol Ox eksenini 1 ve -3 noktalarında kesmektedir. Buna göre parabolün denklemini bulalım.

Çözüm:

İstenen parabolün denklemi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

Parabol Ox eksenini 1 ve -3 noktalarında kestiğine göre, parabol $(1,0)$ ve $(-3,0)$ noktalarından geçmektedir.

$(0,-6)$, $(1,0)$, $(-3,0)$ noktaları parabol üzerinde olduklarından parabolün denklemini sağlarlar.

$f(0) = -6 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = -6 \Rightarrow c = -6$ dır.

$f(1) = 0 \Rightarrow a.1^2 + b.1 + c = 0 \Rightarrow a + b = 6$ dır.

$f(-3) = 0 \Rightarrow a.(-3)^2 + b.(-3) + c = 4 \Rightarrow 9a - 3b = 10$ dur.

Son iki eşitlikten $\left.\begin{array}{l} a + b = 6 \\ 9a - 3b = 10 \end{array}\right\} a = 2$ ve $b = 4$ olur.

O halde parabolün denklemi $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ dır.

2.Yol:

Son verilen kural gereği Ox eksenini 1 ve -3 noktalarında kesen parabolün denklemi, $f(x) = a.(x - 1).(x + 3)$ tür.

Bu parabol $(0,-6)$ noktasından geçtiğine göre,

$f(0) = -6 \Rightarrow a.(0 - 1).(0 + 3) = -6 \Rightarrow a = 2$ dir.

O halde parabolün denklemi,

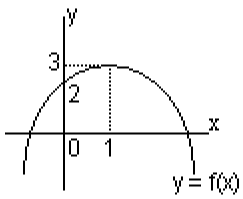
$f(x) = 2.(x - 1).(x + 3) = 2x^2 + 4x - 6$ olur.

Kural

Tepe noktası $T(1,2)$ olan parabolün denklemi

$y = f(x) = a.(x - r)^2 + k$ dır.

Örnek:



Tepe noktası $T(1,3)$ olan şekildeki parabolün denklemini yazınız.

Çözüm:

Son verdiğimiz kural gereği tepe noktası $T(1,3)$ olan parabolün denklemi,

$y = f(x) = a.(x - 1)^2 + 3$ tür.

Bu parabol $T(0,2)$ noktasından geçtiğine göre,

$f(0) = 2 \Rightarrow a.(0 - 1)^2 + 3 = 2 \Rightarrow a = -1$ bulunur.

O halde parabolün denklemi,

$y = f(x) = -1.(x - 1)^2 + 3 = -x^2 + 2x + 2$ dir.

Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü

Bir eşitsizliği sağlayan tüm noktaların koordinat düzleminde taranmasıyla, verilen eşitsizliğin grafiği çizilmiş olur.

Örnek:

$y \leq x - 1$ eşitsizliğini sağlayan noktaları analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

İlk olarak $y = x - 1$ doğrusunun grafiğini çizelim.

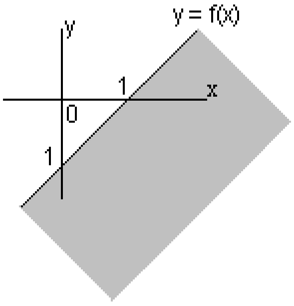
$y = 0$ için $x = 1$ olduğundan, bu doğrunun Ox eksenini kestiği nokta $(1,0)$ olur.

$x = 0$ için $y = -1$ olduğundan, bu doğrunun Oy eksenini kestiği nokta $(0,-1)$ olur.

(0,0) noktasının eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakalım:

$y \le x-1$ ise $0 \overset{?}{\le} 0-1 \Rightarrow 0 \le -1$ ifadesi yanlıştır.

O halde $(0,0)$ noktası eşitsizliği sağlamaz.



Buna göre, doğrunun düzlemi ikiye ayırdığı bölgeden (0,0) noktasının bulunmadığı bölge istenen bölgedir. Bu durumda $y \le x-1$ eşitsizliğini sağlayan noktaların analitik düzlemde gösterimi yandaki gibidir.

Örnek:

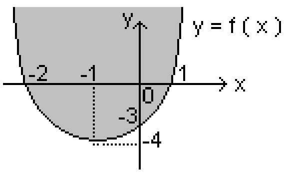
$y \ge x^2 + 2x - 3$ eşitsizliğini sağlayan noktaları analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$y = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini daha önce çizmiştik.

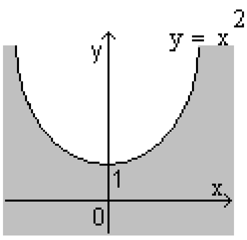
(0,0) noktasının eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakalım:

$y \ge x^2 + 2x - 3$ ise $0 \overset{?}{\ge} 0^2 + 2.0 - 3 \Rightarrow 0 \ge -3$ ifadesi doğrudur. O halde (0,0) noktası eşitsizliği sağlar.



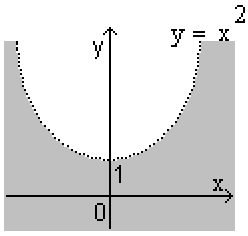
Buna göre, parabolün düzlemi ikiye ayırdığı bölgeden $(0,0)$ noktasının bulunduğu bölge istenen bölgedir. Bu durumda $y \ge x^2 + 2x - 3$ eşitsizliğini sağlayan noktaların analitik düzlemde gösterimi yandaki gibidir.

Örnek:



$y \le x^2 + 1$ eşitsizliğinin grafiği yanda verilmiştir.

Örnek:



$y < x^2 + 1$ eşitsizliğinin grafiği yanda verilmiştir.

$y = x^2 + 1$ parabolü üzerindeki noktalar $y < x^2 + 1$ eşitsizliğini sağlamadığı için, parabolün grafiği kesik çizgi ile gösterilmiştir.

Örnek:

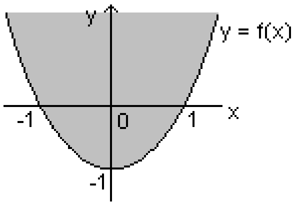
$y - x^2 + 1 \ge 0$

$y + x \le 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaları analitik düzlemde gösterelim.

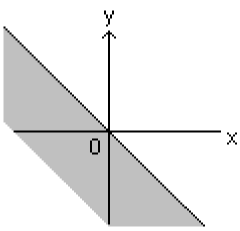
Çözüm:

İlk önce $y = x^2 - 1$ parabolünü çizip, $y - x^2 + 1 \ge 0$ eşitsizliğini sağlayan noktaları gösterelim.

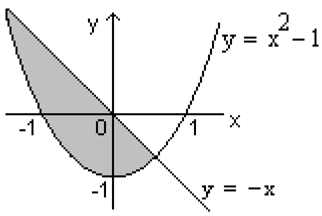


Yanda $y - x^2 + 1 \ge 0$ eşitsizliğini sağlayan noktalar gösterilmiştir.

Aşağıdaki şekilde $y = -x$ doğrusu çizilip, $y + x \le 0$ eşitsizliğini sağlayan noktalar gösterilmiştir.



Son olarak $y - x^2 + 1 \ge 0$ ve $y + x \le 0$ eşitsizliklerini sağlayan noktalar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



İki Eğrinin Birlikte İncelenmesi

Denklemleri $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ olan eğrileri birlikte çözelim:

$f(x) = g(x)$ denkleminin, tek katlı köklerinde eğriler birbirini keser; çift katlı köklerinde birbirine teğettir.

Eğer $f(x) = g(x)$ denkleminin reel kökü yoksa, eğriler kesişmez.

Özel olarak,
$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun denklemlerinin birlikte çözümünde elde edilen,

$ax^2 + bx + c = mx + n \Rightarrow ax^2 + (b - m).x + c - n = 0$
denkleminin diskriminantı,

$\Delta = (b - m)^2 - 4.a.(c - n)$ olmak üzere,

$\Delta > 0$ ise parabol ile doğru iki farklı noktada kesişir,

$\Delta < 0$ ise parabol ile doğru kesişmezler.

$\Delta = 0$ ise doğru parabole teğettir.

Örnek:

$y = x^2 - mx + 1$ parabolü ile $y = 2x + n$ doğrusu iki noktada kesişmektedirler. Parabol ile doğrunun kesiştikleri birinci nokta $(1,4)$ olduğuna göre ikinci noktayı bulalım.

Çözüm:

Parabol ile doğru $(1,4)$ noktasında kesiştiklerine göre bu nokta hem doğru hem de parabol üzerindedir. Dolayısıyla her iki denklemi de sağlar.

$x = 1$ için $y = 4$ ise doğru denkleminden,

$4 = 2.1 + n \Rightarrow n = 2$ bulunur.

$x = 1$ için $y = 4$ ise parabol denkleminden,

$4 = 1^2 - m.1 + 2 \Rightarrow m = -2$ bulunur.

Böylece parabol denklemi $y = x^2 + 2x + 1$, doğrunun

denklemi $y = 2x + 2$ olur.

$y = x^2 + 2x + 1$ parabolü ile $y = 2x + 2$ doğrusu iki noktada kesiştiklerine göre,

$x^2 + 2x + 1 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ veya $x = -1$

olup, parabol ile doğrunun kesiştikleri noktalar,

$x = 1$ için $y = 2.1 + 2 = 4$ ise $(1,4)$ noktası,

$x = -1$ için $y = 2.(-1) + 2 = 0$ ise $(-1,0)$ noktasıdır.

Örnek:

$y = x^2 - 3x - 1$ ve $y = -2x + 5$ olmak üzere parabol ile doğrunun kesiştikleri noktaları bulalım.

Çözüm:

$y = x^2 - 3x - 1$ ve $y = -2x + 5$ olduğuna göre,

$x^2 - 3x - 1 = -2x + 5$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3).(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = -2$ dir.

Bulunan bu değerler verilen denklemlerden herhangi birinde yazılarak y nin alacağı değerleri bulalım.

$x = 3$ için $y = -2.3 + 5 = -1$ ise $(3,-1)$ noktası,

$x = -2$ için $y = -2.(-2) + 5 = 9$ ise $(-2,9)$ noktasıdır.

Buna göre doğru ile parabol $(3,-1)$ ve $(-2,9)$ noktalarında kesişirler.

Örnek:

$y = x^2 - mx + 2$ parabolü ile $y = x - 2$ doğrusu kesişmemektedir. Buna göre m nin alabileceği bütün değerlerden oluşan kümeyi (aralığı) bulalım.

Çözüm:

$y = x^2 - mx + 2$ parabolü ile $y = x - 2$ doğrusu kesişmediğine göre,

$x^2 - mx + 2 = x - 2 \Rightarrow x^2 - (m+1).x + 4 = 0$ denkleminin kökü olmayıp denklemin diskriminantı sıfırdan küçüktür.

$\Delta < 0 \Rightarrow [-(m+1)]^2 - 4.1.4 < 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 15 < 0$

$m^2 + 2m - 15 < 0$ eşitsizliğini çözmek için köklerini bulalım.

$m^2 + 2m - 15 = 0 \Rightarrow (m+5).(m-3) = 0$

$\Rightarrow m = -5$ veya $m = 3$

m^2 nin (en yüksek dereceli terim) işareti $+$ olduğundan tabloda en sağda $+$ işareti ile başlayacağız.

m	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$m^2 + 2m - 15$		+ + +	0	− − −	0	+ + +	

Yukarıdaki tabloyu yorumlayacak olursak

$m = -5$ te ve $m = 3$ te $\Delta = 0$ dır. m nin 3 ten büyük ve -5 ten küçük değerleri için $\Delta > 0$ dır. m nin -5 ile 3 aralığındaki değerleri için $\Delta < 0$ olur.

Buna göre $\Delta = m^2 + 2m - 15 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi (aralığı), $Ç = (-5,3)$ tür.

Çözümlü Sorular

1. $f(x) = (m-5)x^3 + x^{n+2} + 3x + 1$ fonksiyonunun belirttiği eğri bir parabol olduğuna göre $m + n$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$y = f(x)$ eğrisinin bir parabol belirtmesi için 2. dereceden olması gerekir. Buna göre,

$m - 5 = 0$ ve $n + 2 = 2$ olmalıdır.

$m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$ ve $n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0$ olur.

$m + n = 5 + 0 = 5$ bulunur.

2. $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 16$ fonksiyonunun grafiğinin (parabolün) eksenleri kestiği noktaların koordinatları toplamı kaçtır?

Çözüm:

$x = 0$ için $y = f(0) = 0^2 - 16 = -16$ dır.

Buna göre parabolün Oy eksenini kestiği nokta $(0,-16)$ dır.

$y = 0$ için $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ veya $x = -4$ tür.

Buna göre parabolün Ox eksenini kestiği noktalar $(4,0)$ ve $(-4,0)$ dır.

Parabolün eksenleri kestiği noktaların koordinatları toplamı,

$0 + (-16) + (-4) + 0 + 4 + 0 = -16$ dır.

3. $(0,-6)$, $(1,-8)$ ve $(-1,0)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm:

İstenen parabolün denklemi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

Verilen noktalar parabolün üzerinde olduğuna göre, parabolün denklemini sağlar.

$(0,-6) \in f$ ise,

$f(0) = -6 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = -6 \Rightarrow c = -6$ dır.

$(1,-8) \in f$ ise ,

$f(1) = -8 \Rightarrow a.1^2 + b.1 + c = -8 \Rightarrow a + b = -2$ dir.

$(-1,0) \in f$ ise ,

$f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^2 + b.(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b = 6$ dır.

Son iki eşitlikten $\left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ a - b = 6 \end{array}\right\}$ $a = 2$ ve $b = -4$ bulunur.

O halde parabolün denklemi $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ dır.

4. $y = f(x) = 3x^2 + 6x + m - 3$ denklemi verilmiştir. y nin alabileceği en küçük değer 2 olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm:

Parabolün kolları yukarı doğru olduğundan, tepe noktasının ordinatı fonksiyonun en küçük elemanıdır.

y nin en küçük değeri 2 ise $y = 3x^2 + 6x + m - 3$ parabolünün tepe noktası $T(r,k) = T(r,2)$ dir.

$$k = \frac{4ac - b^2}{4.a} \Rightarrow \frac{4.3.(m-3) - 6^2}{4.3} = 2$$

$12m - 36 - 36 = 24 \Rightarrow 12m = 96 \Rightarrow m = 8$ dir.

5. $f : [-1,6] \to R$, $f(x) = -x^2 + 4x$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = -x^2 + 4x = -(x^2 - 4x) = -(x-2)^2 + 4$ tür.

Parabolün tepe noktası $T(r,k) = T(2,4)$ tür.

Parabolün kolları aşağı doğru olduğundan $x = 2$ için $f(x)$ in alacağı en büyük değer $f(2) = 4$ tür.

$f(-1) = -(-1-2)^2 + 4 = -9 + 4 = -5$ ve

$f(6) = -(6-2)^2 + 4 = -16 + 4 = -12$ dir.

$f(x)$ in alabileceği en büyük değer $f(2) = 4$ tür.

$f(x)$ in alabileceği en küçük değer $f(6) = -12$ dir.

Fonksiyonunun alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamı, $-12 + 4 = -8$ bulunur.

6. $f(x) = -x^2 + 4x + m$ parabolünün tepe noktası Ox ekseni üzerinde olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm:

Parabolün tepe noktası $T(r,k)$ olsun.

Ox ekseni üzerindeki noktaların ordinatları sıfır olduğundan $k = 0$ dır.

$$k = \frac{4ac - b^2}{4.a} \Rightarrow \frac{4.(-1).m - 4^2}{4.(-1)} = 0 \Rightarrow -4m - 16 = 0$$

$\Rightarrow m = -4$ bulunur.

7. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ parabolünün tepe noktasının ordinatı kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = a.(x - r)^2 + k$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)$ olup ordinatı k dır.

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1 = -(x^2 - 4x - 1) = -\left[(x-2)^2 - 5\right]$$

$f(x) - (x-2)^2 + 5$ olup tepe noktasının ordinatı 5 tir.

8. $(1,4)$, $(0,3)$ ve $(-1,0)$ noktalarından geçen parabolün tepe noktasının ordinatı kaçtır?

Çözüm:

İstenen parabolün denklemi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

Verilen noktalar parabolün üzerinde olduğuna göre, parabolün denklemini sağlar.

$(0,3) \in f$ ise ,

$f(0) = 3 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 3 \Rightarrow c = 3$ tür.

$(1,4) \in f$ ise,

$f(1) = 4 \Rightarrow a.1^2 + b.1 + c = 4 \Rightarrow a + b = 1$ tür.

$(-1,0) \in f$ ise ,

$f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^2 + b.(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b = -3$ tür.

Son iki eşitlikten $\left.\begin{array}{l} a + b = 1 \\ a - b = -3 \end{array}\right\} a = -1$ ve $b = 2$ bulunur.

O halde parabolün denklemi $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ tür.

Parabolün tepe noktasının ordinatı,

$$k = \frac{4ac - b^2}{4.a} \Rightarrow \frac{4.(-1).3 - 2^2}{4.(-1)} = \frac{-12 - 4}{-4} = 4 \text{ tür.}$$

9. $f(x) = x^2 + (m+2)x + m$ parabolünün Oy eksenini kestiği noktanın ordinatı 2 dir. Buna göre, bu parabolün tepe noktasının ordinatı kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = x^2 + (m+2)x + m$ parabolünün Oy eksenini kestiği noktanın ordinatı 2 ise $f(0) = 2$ dir.

$f(0) = 2 \Rightarrow 0^2 + (m+2).0 + m = 2 \Rightarrow m = 2$ dir.

Bu durumda parabolün denklemi, $f(x) = x^2 + 4x + 2$ olup parabolün tepe noktasının ordinatı,

$$k = \frac{4ac - b^2}{4.a} \Rightarrow \frac{4.1.2 - 4^2}{4.1} = \frac{8 - 16}{4} = -2 \text{ bulunur.}$$

10. $f(x) = -2x^2 + 4nx + m$ parabolünün tepe noktası $T(2,-3)$ olduğuna göre, parabolün Oy eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

Çözüm:

Parabolünün tepe noktası $T(r,k) = T(2,-3)$ olduğuna göre,

$$r = 2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4n}{2.(-2)} \Rightarrow -4n = -8 \Rightarrow n = 2 \text{ dir.}$$

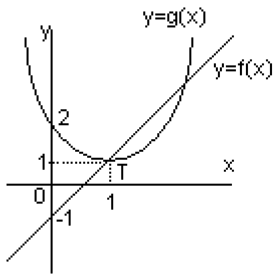
$$k = -3 = \frac{4ac - b^2}{4.a} = \frac{4.(-2).m - (4n)^2}{4.(-2)}$$

$$\Rightarrow -3 = \frac{-8.m - 64}{-8} \Rightarrow -8m = 64 \Rightarrow m = -11 \text{ dir.}$$

Buna göre parabolün denklemi, $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$ olup parabolün Oy eksenini kestiği noktanın ordinatı,

$f(0) = -2.0^2 + 8.0 - 11 = -11$ bulunur.

11.



Yandaki şekilde $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiği ile tepe noktası $T(1,1)$ olan $y = g(x)$ parabolü verilmiştir.

Buna göre $f^{-1}(7) + (g \circ f)(7)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

Şekilde verilenlere göre, parabolün ve doğrunun denklemini bulalım:

Şekildeki $f(x) = ax + b$ doğrusu $(1,1)$ ve $(0,-1)$ noktalarından geçmektedir.

Buna göre $f(1) = 1$ ve $f(0) = -1$ dir.

$f(0) = -1 \Rightarrow a.0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$ dir.

$f(1) = 1 \Rightarrow a.1 + b = 1 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = 2$ dir.

Buna göre doğrunun denklemi $f(x) = 2x - 1$ olur.

Tepe noktası $T(1,1)$ olan $y = g(x) = a.(x-1)^2 + 1$ parabolü $(0,2)$ noktasından geçtiğinden,

$g(0) = 2 \Rightarrow a.(0-1)^2 + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$ bulunur.

Buna göre parabolün denklemi $g(x) = (x-1)^2 + 1$ dir.

Şimdi $f^{-1}(7)$ ve $(g \circ f)(7) = g(f(7))$ değerlerini bulalım:

$f(4) = 2.4 - 1 = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 4$ tür.

$f(7) = 2.7 - 1 = 14 - 1 = 13 \Rightarrow f(7) = 13$ ve

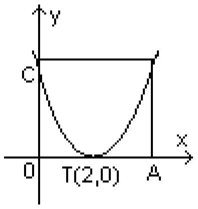
$g(13) = (13-1)^2 + 1 = 144 + 1 = 145 \Rightarrow g(13) = 145$ olduğundan,

$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(13) = 145$ bulunur.

O halde

$f^{-1}(7)+(g\circ f)(7)=4+145=149$ bulunur.

12.



Yanda tepe noktası $T(2,0)$ olan $y=f(x)$ parabolü ile alanı $16\ br^2$ olan OABC karesi verilmiştir. Buna göre $(f\circ f\circ f)(2)$ kaçtır?

Çözüm:

Tepe noktası $T(2,0)$ olan $y=f(x)$ parabolü,

$y=f(x)=a.(x-2)^2+0=a.(x-2)^2$ dir.

C noktasının koordinatları $C(0,m)$ ve A noktasının koordinatları $A(n,0)$ olsun. Karenin alanı $16\ br^2$ ise $|OC|=|OA|=4$ birimdir.

$|OC|=m$ ve $|OA|=n$ olduğundan $m=n=4$ tür.

O halde C noktasının koordinatları $C(0,4)$ ve A noktasının koordinatları $A(4,0)$ olur.

$f(0)=4$ olacağından

$f(0)=a.(0-2)^2=4\Rightarrow 4a=4\Rightarrow a=1$ olur.

Buna göre parabolün denklemi $y=f(x)=(x-2)^2$ tir.

$f(2)=(2-2)^2=0^2=0$,

$f(0)=(0-2)^2=(-2)^2=4$,

$f(4)=(4-2)^2=2^2=4$ olup

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(0))=f(4)=4$ bulunur.

13. $y=x^2+x+1$ parabolü ile $y=mx+16$ doğrusu A ve B noktalarında kesişmektedirler. AB doğru parçasının orta noktası $C(-1,c)$ olduğuna göre m+c toplamı kaçtır?

Çözüm:

$y=x^2+x+1$ parabolü ile $y=mx+16$ doğrusu $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarında kesiştiklerine göre,

$x^2+x+1=mx+16\Rightarrow x^2+(1-m).x-15=0$ denkleminin kökleri A ve B noktalarının apsisleri olan x_1 ve x_2 yi verir.

$y_1=m.x_1+16=(x_1)^2+x_1+1$ ve

$y_2=m.x_2+16=(x_2)^2+x_2+1$ dir.

AB doğru parçasının orta noktası $C(-1,c)$ olduğuna göre, orta nokta tanımından,

$C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ dir.

Buna göre,

$\frac{x_1+x_2}{2}=-1$ ve $\frac{y_1+y_2}{2}=c$ dir.

Kökleri x_1 ve x_2 olan $x^2+(1-m).x-15=0$ denkleminde kökler toplamı,

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{-1+m}{1}=m-1$ olup

$\frac{x_1+x_2}{2}=-1$ olduğundan $m-1=-2\Rightarrow m=-1$ bulunur.

$\frac{y_1+y_2}{2}=c\Rightarrow\frac{m.x_1+16+m.x_2+16}{2}=c$

$\Rightarrow\frac{m.(x_1+x_2)+32}{2}=c$

$\Rightarrow \frac{-1.(-2)+32}{2} = c$ $\Rightarrow c = \frac{34}{2} = 17$ bulunur. Şu halde $m + c = -1 + 17 = 16$ dır. **Konu Bitmiştir.**	