EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a,b \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax+b>0$, $ax+b \geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b \leq 0$ şeklindeki ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

Bu eşitsizliklerden herhangi birini sağlayan x reel sayılarının oluşturduğu kümeye bu eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Eşitsizliği çözmek için $f(x)=ax+b$ fonksiyonunun tablosu yapılır. Eşitsizliği sağlayan aralık bulunur.
$f(x)=ax+b$ fonksiyonunun işaret tablosu aşağıda verilmiştir.

$ax+b=0$ denkleminin kökü $x_0=-\frac{b}{a}$ dır.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y=ax+b$	a'nın işareti ile ters işaretlidir.	0	a'nın işareti ile aynı işaretlidir.

$$f(x)=ax+b=a.\left(x+\frac{b}{a}\right)=a.\left(x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)=a.(x-x_0)$$

olduğundan,

$x<x_0$ ise

$x-x_0<0$ olduğundan, $f(x)=a.(x-x_0)$ ifadesinin işareti, a'nın işareti ile ters işaretlidir. a negatif ise

$f(x)=a.(x-x_0)$ ifadesi pozitif, a pozitif ise

$f(x)=a.(x-x_0)$ ifadesi negatiftir.

$x>x_0$ ise

$x-x_0>0$ olduğundan, $f(x)=a.(x-x_0)$ ifadesinin işareti, a'nın işareti ile aynı işaretlidir. a negatif ise

$f(x)=a.(x-x_0)$ ifadesi negatif, a pozitif ise

$f(x)=a.(x-x_0)$ ifadesi pozitiftir.

Örnek:

$f(x)=2x-6$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturup $2x-6 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$f(x)=2x-6$ fonksiyonunda $a=2$, $b=-6$ dır.

$2x-6 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$ fonksiyonun köküdür.

$a=2$ nin işareti + olduğundan $f(x)=2x-6$ fonksiyonu $x=3$ kökünden büyük değerler için $a=2$ ile aynı işaretli yani pozitif, $x=3$ kökünden küçük değerler için $a=2$ ile zıt işaretli yani negatif olacaktır.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$y=2x-6$	$-$	0	$+$

Çözüm

Bu tabloyu yorumlayacak olursak, $x=3$ te $f(x)=2x-6$ fonksiyonunun sonucu sıfırdır. x in 3 ten büyük değerleri için $f(x)=2x-6$ fonksiyonunun sonucu (+) pozitiftir. x in 3 ten küçük değerleri için $f(x)=2x-6$ fonksiyonunun sonucu (-) negatiftir.

Tablodan da görüleceği gibi $2x-6 \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar 3'e eşit veya 3'ten büyüktür.

Buna göre $2x-6 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç=[3,\infty)$ dur.

Örnek:

$f(x)=3x-6$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturup $3x-6<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$f(x)=3x-6$ fonksiyonunda $a=3$, $b=-6$ dır.

$3x-6 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$ fonksiyonun köküdür.

$a = 3$ ün işareti + olduğundan $f(x) = 2x - 6$ fonksiyonu, $x = 2$ kökünden büyük değerler için $a = 3$ ile aynı işaretli yani pozitif, $x = 2$ kökünden küçük değerler için $a = 3$ ile zıt işaretli yani negatif olacaktır.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$y = 3x - 6$	$-$	0	$+$

Çözüm

Bu tabloyu yorumlayacak olursak, $x = 2$ de $f(x) = 2x - 6$ fonksiyonunun sonucu sıfırdır. x in 2 den büyük değerleri için $f(x) = 3x - 6$ fonksiyonunun sonucu (+) pozitiftir. x in 2 den küçük değerleri için $f(x) = 3x - 6$ fonksiyonunun sonucu (-) negatiftir.

Tablodan da görüleceği gibi $3x - 6 < 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar 2'den küçüktür. Ancak $x = 2$ de $f(x) = 2x - 6$ fonksiyonunun sonucu sıfır olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesine 2 dahil değildir.

Buna göre $2x - 6 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty, 2)$ dir.

Örnek:

$-4x + 3 < 0$ eşitsizliğinin işaretini inceleyip çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = -4x + 3$ fonksiyonunda $a = -4,\ b = 3$ dır.

$-4x + 3 \Rightarrow -4x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ fonksiyonun köküdür.

$a = -4$ ün işareti - olduğundan $f(x) = -4x + 3$ fonksiyonu $x = \frac{3}{4}$ kökünden büyük değerler için $a = -4$ ile aynı işaretli yani negatif, $x = \frac{3}{4}$ kökünden küçük değerler için $a = -4$ ile zıt işaretli yani pozitif olacaktır.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$y = -4x + 3$	$-$	0	$+$

Çözüm

Tablodan da görüleceği gibi $-4x + 3 < 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar $\frac{3}{4}$ ten büyüktür. Ancak $x = \frac{3}{4}$ de $f(x) = -4x + 3$ fonksiyonunun sonucu sıfır olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesine $\frac{3}{4}$ dahil değildir.

Buna göre $-4x + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç = \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ dur.

Örnek:

$\frac{4x+1}{4} - \frac{5x+2}{6} < \frac{x+1}{3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{4x+1}{\underset{(3)}{4}} - \frac{5x+2}{\underset{(2)}{6}} < \frac{x+1}{\underset{(4)}{3}} \Rightarrow \frac{12x+3}{12} - \frac{10x+4}{12} < \frac{4x+4}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{12x+3}{12} - \frac{10x+4}{12} - \frac{4x+4}{12} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{12x + 3 - 10x - 4 - 4x - 4}{12} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x - 5}{12} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{12}x - \frac{5}{12} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}x - \frac{5}{12} < 0 \text{ olur.}$$

$-\frac{1}{6}x - \frac{5}{12}$ ifadesinde $a = -\frac{1}{6},\ b = -\frac{5}{12}$ dir.

$-\frac{1}{6}x - \frac{5}{12} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6}x = \frac{5}{12} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ ifadenin köküdür.

$a = -\frac{1}{6}$ nın işareti - olduğundan $-\frac{1}{6}x - \frac{5}{12}$ ifadesinin $x = -\frac{5}{2}$ kökünden büyük değerler için $a = -\frac{1}{6}$ ile aynı işaretli yani negatif, $x=-\frac{5}{2}$ kökünden küçük değerler için $a=-\frac{1}{6}$ ile zıt işaretli yani pozitif olacaktır.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$y=-\frac{1}{6}x-\frac{5}{12}$	$+$	0	$-$

Çözüm

Tablodan da görüleceği gibi $-\frac{1}{6}x-\frac{5}{12}<0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar $-\frac{5}{2}$ den büyüktür. Ancak $x=-\frac{5}{2}$ de $-\frac{1}{6}x-\frac{5}{12}$ ifadesinin sonucu sıfır olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesine $-\frac{5}{2}$ dahil değildir.

Buna göre $\frac{4x+1}{4}-\frac{5x+2}{6}<\frac{x+1}{3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $Ç=\left(-\frac{5}{2},\infty\right)$ dur.

Örnek:

$3.(x-2)\geq 4x+1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$3.(x-2)\geq 4x+1 \Rightarrow 3x-6\geq 4x+1 \Rightarrow -x-7\geq 0$ olur.

$-x-7$ ifadesinde $a=-1,\ b=-7$ dir.

$-x-7=0 \Rightarrow -x=7 \Rightarrow x=-7$ ifadenin köküdür.

$a=-1$ nın işareti - olduğundan $-x-7$ ifadesinin $x=-7$ kökünden büyük değerler için $a=-1$ ile aynı işaretli yani negatif, $x=-7$ kökünden küçük değerler için $a=-1$ ile zıt işaretli yani pozitif olacaktır.

x	$-\infty$	-7	$+\infty$
$y=-x-1$	$+$	0	$-$

Çözüm

Tablodan da görüleceği gibi $-x-7\geq 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar -7 den küçüktür.
Ancak $x=-7$ de $-x-7$ ifadesinin sonucu sıfır olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesine -7 de dahildir.

Buna göre $\frac{4x+1}{4}-\frac{5x+2}{6}<\frac{x+1}{3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $Ç=(-\infty,-7)$ dir.

Kısa Yoldan Fonksiyonun İşaretinin İncelenmesi

Şimdi, eşitsizliklerle ilgili bütün durumları karşılayabilecek bir yaklaşım verelim. Biz kısalığından dolayı bu yöntemi kullanacağız.

$B(x)\neq 0$ olmak üzere $\frac{A(x)}{B(x)}$ ile $A(x).B(x)$ in işaretleri aynıdır.

$f(x)$ bölüm veya çarpım fonksiyonu olsun.
Tablo oluştururken sırasıyla şu işlemler yapılır.

1. $f(x)$ in pay ile paydasını sıfır yapan değerler bulunup sırasıyla tabloya yazılır.

2. Eşitsizliğin tanımı göz önüne alınarak pay ve paydayı sıfır yapan değerlerden tek sayıda olanlarına tek katlı kök, çift sayıda olanlarına çift katlı kök denir.

3. Her bileşenin en büyük dereceli terimlerinin işaretleri çarpılarak veya bölünerek $f(x)$ in işareti bulunur.

4. Tablodaki en büyük kökün sağındaki kutuya $f(x)$ in işareti yazılır.

5. Tek katlı köklerin soluna sağındaki işaretinin tersi, çift katlı köklerin soluna sağındaki işaretinin aynısı yazılır.

Örnek:

$f(x)=x^2-5x+6$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturup, $x^2-5x+6\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$f(x)=x^2-5x+6$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturmak için x^2-5x+6 ifadesini sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2).(x-3)=0$

$\Rightarrow x-2=0$ veya $x-3=0$

$\Rightarrow x=2$ veya $x=3$ tür.

x^2 nin işareti + olduğundan tabloda en sağdan + işareti ile başlayacağız.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$y=x^2-5x+6$	+	0	−	0	+

Çözüm

Bu tabloyu yorumlayacak olursak, $x=2$ de ve $x=3$ te $f(x)=x^2-5x+6$ fonksiyonunun sonucu sıfırdır. x in 3 ten büyük veya 2 den küçük değerleri için $f(x)=x^2-5x+6$ fonksiyonunun sonucu (+) pozitiftir. x in 2 ile 3 aralığındaki değerleri için $f(x)=x^2-5x+6$ fonksiyonunun sonucu (-) negatiftir.

Tablodan da görüleceği gibi $x^2-5x+6\leq 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar 2 ve 3 dahil olmak üzere 2 ile 3 aralığındaki değerlerdir.

Buna göre $x^2-5x+6\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç=[2,3]$ tür.

Örnek:

$f(x)=\dfrac{x+4}{5-x}$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturup, $\dfrac{x+4}{5-x}\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\dfrac{x+4}{5-x}$ ifadesindeki pay ve paydayı sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$ tür.

$5-x=0 \Rightarrow x=5$ tir.

$x+4$ ifadesinin işareti + ve $5-x$ ifade $-x$ in işareti – dir. $\dfrac{(+)}{(-)}=(-)$ olduğundan tabloda en sağdan – ile işaretlemeye başlayacağız.

x	$-\infty$	-4		5	$+\infty$
$\dfrac{x+4}{5-x}$	−	0	+		−

Çözüm

Bu tabloyu yorumlayacak olursak, $x=-4$ te $f(x)$ fonksiyonunun sonucu sıfırdır. $x=5$ te $f(x)$ fonksiyonu tanımsızdır. x in 5 ten büyük veya -4 teen küçük değerleri için $f(x)$ fonksiyonunun sonucu (-) negatiftir. x in -4 ile 5 aralığındaki değerleri için $f(x)$ fonksiyonunun sonucu (+) pozitiftir. $x=5$ te $f(x)$ fonksiyonu tanımsız olduğundan çözüm kümesine 5 dahil değildir.

Tablodan da görüleceği gibi $\dfrac{x+4}{5-x}\geq 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar -4 dahil fakat 5 dahil olmamak üzere -4 ile 5 aralığındaki değerlerdir.

Buna göre $\dfrac{x+4}{5-x}\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç=[-4,5)$ tir.

Örnek:

$f(x)=(x-1)^{10}.(x+2)$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturup, $(x-1)^{10}.(x+2)\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$(x-1)^{10}.(x+2)$ ifadesindeki çarpanları sıfıra eşitleyip kökleri bulalım.

$(x-1)^{10}=0 \Rightarrow x=1$ dir. **Bu kök çift katlıdır.**

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ dir.

$(x-1)^{10}$ ifadesinde x in işareti + ve $x+2$ ifadesinde x in işareti + dır. O halde $f(x)=(x-1)^{10}.(x+2)$ fonksiyonunun işareti $(+).(+)=+$ dır. Buna göre tabloda en sağdan + ile işaretlemeye başlayacağız. $x=1$ çift katlı kök olduğundan bu değerin soluna geçerken işaret değiştirmeyeceğiz.

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$(x-1)^{10}.(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
	Çözüm					

Bu tabloyu yorumlayacak olursak, $x=-2$ de ve $x=1$ de $f(x)$ fonksiyonunun sonucu sıfırdır. x in -2 den küçük değerleri için $f(x)$ fonksiyonunun sonucu (-) negatiftir. Diğer bütün değerler için $f(x)$ fonksiyonunun sonucu (+) pozitiftir.

Buna göre $(x-1)^{10}.(x+2)\leq 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar -2 dahil olmak üzere -2 den küçük değerlerdir. Ayrıca $x=1$ de $f(x)$ fonksiyonunun sonucu sıfır olduğundan 1 de çözüm kümesine dahildir.

O halde $(x-1)^{10}.(x+2)\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç=(-\infty,-2]\cup\{1\}$ dir.

Örnek:

$(x+5)^{7}.(x-6)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini işaretini inceleyerek bulunuz.

Çözüm:

$(x+5)^{7}$ ile $x+5$ ifadelerinin işaretleri kuvvet tek olduğundan aynıdırlar. O halde $(x+5)^{7}.(x-6)>0$ ifadesinin çözüm kümesi ile $(x+5).(x-6)>0$ ifadesinin çözüm kümesi aynıdır.

$(x+5).(x-6)$ ifadesinin kökleri,

$x+5=0\Rightarrow x=-5$ ve $x-6=0\Rightarrow x=6$ dır. $(x+5)^{7}$ kuvveti olan 7 tek sayı olduğundan $x=-5$ çift katlı kök değildir.

$(x+5)^{7}$ ifadesinde x in işareti + ve $x-6$ ifadesinde x in işareti + dır. O halde $f(x)=(x+5)^{7}.(x-6)$ fonksiyonunun işareti $(+).(+)=+$ dır. Buna göre tabloda en sağdan + ile işaretlemeye başlayacağız.

x	$-\infty$	-5		6		$+\infty$
$(x+5)^{7}.(x-6)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
	Çözüm				Çözüm	

Tablodan da görüleceği gibi $(x+5)^{7}.(x-6)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç=(-\infty,-5)\cup(6,+\infty)=R-[-5,6]$ dır.

$R-[-5,6]$ ifadesi reel sayılardan $[-5,6]$ aralığının çıkarılması demektir.

$x=-5$ ve $x=6$ değerleri için $f(x)=0$ olduğundan $f(x)<0$ ifadesinin çözüm kümesinde –5 ve 6 olamaz.

Örnek:

$\dfrac{|x-10|}{2-x}\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Mutlak değerin sonucu hiçbir zaman negatif olamayacağı için $|x-10|\geq 0$ dır. O halde şimdilik $|x-10|$ ifadesini göz önüne almayalım. Fakat $x=10$ değeri eşitsizliği sağladığı için çözüm kümesine dahil edelim.

Buna göre,

$\dfrac{|x-10|}{2-x}\geq 0\Rightarrow\dfrac{1}{2-x}>0\Rightarrow 2-x>0\Rightarrow x<2$ dir.

O halde verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç=(-\infty,2)\cup\{10\}$ dur.

Örnek:

$\dfrac{3.|6-x|}{(x-5).|x-7|} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$3.|6-x| \geq 0$ ve $|x-7| \geq 0$ olduğundan şimdilik çözüm yaparken $3.|6-x|$ ve $|x-7|$ çarpanlarını göz önüne almayalım. Fakat $x=6$ değeri eşitsizliği sağladığı için, çözüm kümesinde olmalıdır. $|x-7|$ ifadesi payda da olduğu için, bunu sıfır yapan $x=7$ çözüm kümesinde olmamalıdır.

Buna göre $\dfrac{3.|6-x|}{(x-5).|x-7|} \geq 0$ ise,

$\dfrac{1}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$ tir.

O halde verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç = (5,+\infty) - \{7\}$ olur. $(5,+\infty) \cup \{6\}(5,+\infty)$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek:

$-2x^2 + 5x - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$-2x^2 + 5x - 4 = 0$ ifadesinde $a = -2,\ b = 5,\ c = -4$ olup, ifadenin diskriminantı,

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.(-2).(-4) = -7 < 0$ olduğundan reel kökü yoktur.

$-2x^2$ ifadesinin işareti – olduğundan tablodan – ile başlayarak işaretleyeceğiz. Hiç reel kök olmadığından – ile başlayıp hiç değiştirmeden – ile bitireceğiz.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-2x^2+5x-4$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$

Çözüm

Tablodan görüleceği gibi $-2x^2 + 5x - 4 < 0$ ifadesini tüm reel sayılar sağlıyor (doğruluyor).

Buna göre $-2x^2 + 5x - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç = R$ dir.

Örnek:

Bir önceki örnek dikkatle incelenirse $-2x^2 + 5x - 4 > 0$ ifadesinin çözüm kümesi, $Ç = \phi$ tur.

Sonuç

- $ax^2 + bx + c < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç = R$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ dır.
- $ax^2 + bx + c > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç = \phi$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ dır.

Örnek:

$\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{x^2+x+1} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen eşitsizlikteki ifadenin pay ve paydasında bulunan çarpanları sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -2$ dir.

$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x.(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = -2$ dir.

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$ olduğundan

$x^2 + x + 1$ ifadesinin reel kökü yoktur.

$x^2 - 4$ ifadesinde x^2 nin işareti +,

$x^2 + 2x$ ifadesinde x^2 nin işareti +,

$x^2 + x + 1$ ifadesinde x^2 nin işareti + dır.

Bu nedenle

tablonun en sağına yazılacak işaret, $\frac{(+).(+)}{(+)} = +$ dır.

$x = -2$ kökünden iki tane olduğu için $x = -2$ **çift katlı köktür.** $x = 0$ ve $x = 2$ tek katlı köktür.

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 2	2 $+\infty$
$\frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{x^2+x+1}$	+	+	−	−
			Çözüm	

$x = -2$ çift katlı kök olduğu için tabloda çift çizgi ile gösterildi.

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç = (0,2) \cup \{-2\}$ dir.

Örnek:

$\frac{1}{x+1} < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{x+1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x}{x+1} < 0$$

Eşitsizliğindeki ifadenin pay ve paydasındaki ifadeleri sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$-x = 0 \Rightarrow x = 0$ dır ve $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ dir.

$-x$ in işareti – ve $x+1$ ifadesindeki x in işareti + dır.

Buna göre tablonun en sağına yazılacak olan işaret,

$\frac{(-)}{(+)} = (-)$ dir.

$f(x) = \frac{-x}{x+1}$ in işaret tablosunu çizersek,

x	$-\infty$ -1	-1 0	0 $+\infty$
$\frac{-x}{x+1}$	−	+	−

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ olur.

Uyarı

$\frac{1}{x+1} < 1$ ifadesinin çözüm kümesi bulunurken eşitsizliğin her iki tarafı $x+1$ ile çarpılamaz. Çünkü $x+1$ in pozitif ya da negatif olduğunu bilmiyoruz.

Örnek:

$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \Rightarrow \underset{(x-2)}{\frac{1}{x+2}} - \underset{(x+2)}{\frac{1}{x-2}} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2-x-2}{(x-2).(x+2)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{(x-2).(x+2)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-4}.\frac{-4}{(x-2).(x+2)} > 0.\frac{1}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2).(x+2)} > 0$$

Bu son ifadede eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpıldığından eşitsizlik yön değiştirmiştir.

$\frac{+1}{(x-2).(x+2)} > 0 \Rightarrow (x-2).(x+2) > 0$ dır.

Burada çarpanları sıfıra eşitleyip kökleri bulalım.
$x-2=0 \Rightarrow x=2$ dir ve $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ dir.

Her iki çarpanın işareti + olduğundan tablonun en sağına yazılacak olan işaret $(+).(+) = (+)$ dır.

x	$-\infty$ -2	-2 2	2 $+\infty$
$(x-2)(x+2)$	+	−	+
	Çözüm		Çözüm

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ olur.

Örnek:

$\dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{x-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Bir önceki örnekte verilen çözüm dikkate alındığında $\dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{x-2}$ ifadesinin çözüm kümesi $Ç = (-2,2)$ olduğu anlaşılır. Buna göre, verilen eşitsizliği sağlayan tam sayılar -1, 0, 1 dir.

Eşitsizlik Sistemleri

İki ya da daha fazla eşitsizliğin birlikte yazılmasıyla elde edilen ifadelere eşitsizlik sistemleri denir. Sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimine eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi denir.

Örnek:

$$\begin{aligned} &3x - 6 \leq 0 \\ &x^2 - 9 \leq 0 \end{aligned}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen ifadeleri sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3).(x+3) = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -3$

$3x - 6$ ifadesinde işaret + olup $3x - 6 \leq 0$ eşitsizliğinin işareti incelenirken tablonun en sağına yazılacak olan işaret + dır.

$x^2 - 9$ ifadesinde işaret + olup $x^2 - 9 \leq 0$ eşitsizliğinin işareti incelenirken tablonun en sağına yazılacak olan işaret + dır.

İki eşitsizliğin işaret tablosunu birlikte gösterelim.

x	−∞ … −3	−3 … 2	2 … 3	3 … +∞
$3x-6$	−	− 0	+	+
x^2-9	+ 0	−	− 0	+
Kesişim		Çözüm		

Buna göre verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = (-\infty, 2] \cap [-3, 3] = [-3, 2]$ dir.

Örnek:

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x - 8 > 0 \\ &x^2 - 4x + 3 < 0 \end{aligned}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen ifadeleri sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4).(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -4$ veya $x = 2$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1).(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ veya $x = 3$

$x^2 + 2x - 8$ ifadesinde işaret + olup $x^2 + 2x - 8 > 0$ eşitsizliğinin işareti incelenirken tablonun en sağına yazılacak olan işaret + dır.

$x^2 - 4x + 3$ ifadesinde işaret + olup $x^2 - 4x + 3 < 0$ eşitsizliğinin işareti incelenirken tablonun en sağına yazılacak olan işaret + dır.

x	−∞ … −4	−4 … 1	1 … 2	2 … 3	3 … +∞
x^2+2x-8	+ 0	−	− 0	+	+
x^2-4x+3	+	+ 0	−	− 0	+
Kesişim				Çözüm	

Buna göre verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$Ç = (2,3)$ tür.

Örnek:

$\dfrac{2x^2+1}{x-1} \geq 0$

$\dfrac{x+3}{x-5} < 0$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

İki eşitsizliğin tablosunu birlikte gösterelim.

$\dfrac{2x^2+1}{x-1} = 0 \Rightarrow 2x^2+1=0 \Rightarrow x^2 = -\dfrac{1}{2}$ reel kök yok.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ paydayı sıfır yapan değer olup çözüm kümesine dahil edilmeyecek.

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ tür.

$x-5=0 \Rightarrow x=5$ paydayı sıfır yapan değer olup çözüm kümesine dahil edilmeyecek.

x	-∞ -3	1	5	+∞
$\frac{2x^2+1}{x-1}$	–	–	+	+
$\frac{x+3}{x-5}$	+ 0	–	–	+
Kesişim			Çözüm	

Buna göre verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = (1,+\infty) \cap [-3,5) = (1,5)$ dir.

Örnek:

$x^2-2x-8 \leq 0$

$\dfrac{-x+1}{x+2} > 0$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini

Çözüm:

Verilen ifadeleri sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4).(x+2)=0$

$\Rightarrow x=4$ veya $x=-2$

$-x+1=0 \Rightarrow x=1$ dir.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ paydayı sıfır yapan değer olup çözüm kümesine dahil edilmeyecek.

x	-∞ -2	1	4	+∞
x^2-2x-8	+ 0	–	– 0	+
$\frac{-x+1}{x+2}$	–	+ 0	–	–
Kesişim		Çözüm		

Sistemin çözüm kümesi, $Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = (-2,1)$ dir.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $x^2 < x+2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x^2 < x+2 \Rightarrow x^2-x-2<0$ dır. Kökleri bulalım.

$x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2).(x+1)=0$

$x-2=0$ veya $x+1=0 \Rightarrow x=2$ veya $x=-1$ dir.

x	-∞	-1	2	+∞
$y=x^2-x-2$	+	0 –	0	+
		Çözüm		

$Ç=(-1,2)$ dir.

2. $(2-x)^2.(x+1).(3-x)>0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

Verilen ifadenin bütün çarpanlarını sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$(2-x)^2=0 \Rightarrow x=2$ çift katlı kök.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir.

$3-x=0 \Rightarrow x=3$ tür.

$(2-x)^2$ ifadesinde $(-x)^2 = x^2$ nin işareti +, $x+1$ ifadesinde x in işareti +, $3-x$ ifadesinde $-x$ in işareti –, olduğundan $(2-x)^2.(x+1).(3-x) > 0$ eşitsizliğinin işareti incelenirken tablonun en sağına yazılacak olan işaret $(+).(+).(-) = (-)$ dir.

Ayrıca $x = 2$ çift katlı kök olduğundan 2 nin soluna geçerken işaret değişikliği yapılmayacaktır.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		+	0	−	0	−	0	+	

$x = -1,\ x = 2\ \ x = 3$ değerleri, $(2-x)^2.(x+1).(3-x)$ ifadesini sıfır yaptığından, bu değerlerde $(2-x)^2.(x+1).(3-x) > 0$ koşulu sağlanmaz.

Bu nedenle $x = -1,\ x = 2\ \ x = 3$ değerleri çözüm kümesine dahil değildirler.

Buna göre, $Ç = (-1,3) - \{2\}$ dir.

3. $(3-x).(2x-3) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm:

$(3-x).(2x-3) = 0 \Rightarrow 3 - x = 0$ veya $2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = \frac{3}{2}$ dir.

$3-x$ ifadesinin işareti – ve $2x-3$ ifadesinin işareti + olduğundan tablonun en sağına yazılacak olan işaret $(-).(+) = (-)$ dir.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$(3-x).(2x-3)$		−	0	+	0	−	
				Çözüm			

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ olur. Verilen eşitsizliği sağlayan doğal sayıların toplamı, 2 + 3 = 5 tir.

4. Karesi, kendisinin 20 fazlasından küçük olan tam sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm:

İstenilen koşulları sağlayan sayılar x olsun. Verilenlere göre, $x^2 < x + 20$ dir. Buradan $x^2 - x - 20 < 0$ olur.

$x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x-5).(x+4) = 0$

$\Rightarrow x - 5$ veya $x = -4$ tür.

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$x^2 - x - 20$		+	0	−	0	+	
				Çözüm			

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç = (-4,5)$ olur.

Verilen eşitsizliği sağlayan tam sayıların toplamı,

$(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 4$ tür.

5. $\frac{x}{3} - \frac{3}{x} < 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı doğal sayı vardır?

Çözüm:

$\underset{(x)}{\frac{x}{3}} - \underset{(3)}{\frac{3}{x}} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 9}{3x} < 0$ dır.

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -3$ tür.

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$\frac{x}{3} - \frac{3}{x}$		−	0	+	0	−	0	+	

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç = (-\infty, -3) \cup (0,3)$ tür.

Bu aralıktaki doğal sayılar 1 ve 2 dir.

6. Küpü kendisinin 4 katından küçük olan $\left(-15,15\right)$ aralığında kaç tane tam sayı vardır?

Çözüm:

İstenilen koşulları sağlayan sayılar x olsun. Verilenlere göre, $x^3 < 4x$ dir. Buradan $x^3 - 4x < 0$ olur.

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x.\left(x-2\right).\left(x+2\right) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 2$ veya $x = -2$ dir.

Tablonun en sağına yazılacak olan işaret, $\left(+\right).\left(+\right).\left(+\right) = \left(+\right)$ dır.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$x^3 - 4x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç = \left(-\infty,-2\right) \cup \left(0,2\right)$ dir.

Verilen eşitsizliği sağlayan $\left(-15,15\right)$ aralığında olan tamsayılar, -14, -13,…,-3,1 dir.

Bu tam sayıların sayısı 13 tür.

7. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{\left|x+2\right| - 4} < 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\dfrac{x^2 - 2x + 1}{\left|x+2\right| - 4} < 0 \Rightarrow \dfrac{\left(x-1\right)^2}{\left|x+2\right| - 4} < 0$

$\left|x+2\right| - 4 < 0$ ve $x \neq 1$ dir.

$\left|x+2\right| < 4$ ve $x \neq 1 \Rightarrow -4 < x + 2 < 4$ ve $x \neq 1$

$\Rightarrow -6 < x < 2$ ve $x \neq 1$ olur.

Bu aralıktaki tamsayıların toplamı,

$\left(-5\right) + \left(-4\right) + \left(-3\right) + \left(-2\right) + \left(-1\right) + 0 = -15$ tir.

$x = 1$ sayısının eşitsizliği sağlamadığına dikkat ediniz.

8. $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x - 8} \leq 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \left(x-2\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ çift katlı kök.

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \left(x-4\right).\left(x+2\right) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ veya $x = -2$

$x = 4$ ve $x = -2$ değerleri paydayı sıfır yapıp, ifadeyi tanımsız yaptığından dolayı çözüm kümesine alınmayacaktır.

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret $\dfrac{\left(+\right)}{\left(+\right)} = \left(+\right)$ dır.

x	$-\infty$	-2		2		4	$+\infty$
$\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x - 8}$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç = \left(-2,4\right)$ tür.

9. $\dfrac{\left|x-3\right|.\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)^{98}.\left(x-1\right)^{99}} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı vardır?

Çözüm:

$\left|x-3\right| \geq 0$ ve $\left(x+1\right)^{98} \geq 0$ olduğundan bu çarpanlar yokmuş gibi çözüm yapılabilir. Ancak $\left|x-3\right|$ çarpanını sıfır yapan $x = 3$ değeri çözüm kümesinde olmalıdır.

$\left(x+1\right)^{98}$ çarpanını sıfır yapıp ifadeyi tanımsız hale getiren $x = -1$ değeri çözüm kümesinde olmamalıdır.

$\dfrac{\left|x-3\right|.\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)^{98}.\left(x-1\right)^{99}} \leq 0$ ifadesinde belirtilen çarpanlar göz ardı edilirse, $\dfrac{x+2}{\left(x-1\right)^{99}} \leq 0$ olup,

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ ve $(x-1)^{99}=0 \Rightarrow x=1$ tek katlı

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret $\frac{(+)}{(+)}=(+)$ dır.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\frac{x+2}{(x-1)^{99}}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Buna göre $\frac{x+2}{(x-1)^{99}} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç_1=[-2,1)$ dir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesinden -1 tam sayısı çıkarılıp, 3 tam sayısı ilave edilirse,

$\frac{|x-3|.(x+2)}{(x+1)^{98}.(x-1)^{99}} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

$Ç=Ç_1 \cup \{3\}-\{-1\}=[-2,1)\cup\{3\}-\{-1\}$ bulunur.

Bu çözüm kümesindeki tam sayılar -2,0,3 olup üç tanedirler.

10. $\frac{x^2-4x-12}{x^2-4} \leq 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

Verilen eşitsizlikteki ifadenin pay ve paydasında bulunan çarpanları sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x-6).(x+2)=0$

$\Rightarrow x=6$ veya $x=-2$ dir.

$x^2-4=0 \Rightarrow (x-2).(x+2)=0 \Rightarrow x=2$ veya $x=-2$

Burada $x=-2$ kökü 2 tane olduğu için çift katlı köktür.

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret $\frac{(+)}{(+)}=(+)$ dır.

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi, $Ç=(2,6]$ dir.

11. $\frac{x}{x-1} \geq 2$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\frac{x}{x-1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{x-1}-2 \geq 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x-1} \geq 0$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$ ve $x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir. $x=1$ değeri ifadeyi tanımsız yaptığından çözüm kümesine alınmayacaktır.

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret $\frac{(-)}{(+)}=(-)$ dir.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\frac{2-x}{x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi, $Ç=(1,2]$ dir.

12. $\frac{(x+1).(1-x)^3}{\sqrt{5-x}} \leq 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\sqrt{5-x}$ ifadesinin reel sayılarda tanımlı olması için,

$5-x>0 \Rightarrow 5>x$ olmalıdır.

$\sqrt{5-x} \geq 0$ dır. Bu nedenle bu çarpan yokmuş gibi çözüm yapılabilir.
Buna göre,

$\frac{(x+1).(1-x)^3}{\sqrt{5-x}} \leq 0$ ifadesinde belirtilen çarpan göz ardı edilirse, $(x+1).(1-x)^3 \le 0$ olup,

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ve $(1-x)^3 = 0 \Rightarrow x=1$ tek katlı

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret $(+).(-)=(-)$ dır.

x	$-\infty$	-1		1		5	$+\infty$
$(x+1).(1-x)^3$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
$5-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
Kesişim		0		0			

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty,-1] \cup [1,5)$ tir.

13. $x < \frac{8}{x} + 2$ eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm:

$x < \frac{8}{x} + 2 \Rightarrow x - \frac{8}{x} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-8}{x} < 0$ dır.

Verilen ifadenin pay ve paydasının köklerini bulalım.

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4).(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ veya $x =$ -2 dir.

$x = 0 \Rightarrow x = 0$ dır. Ancak bu değer ifadeyi tanımsız kıldığından çözüm kümesine dahil edilmeyecektir.

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret $\frac{(+)}{(+)} = (+)$ dır.

x	$-\infty$	-2		0		4	$+\infty$
$\frac{x^2-2x-8}{x}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Buna göre verilen ifadenin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty,-2) \cup (0,4)$ tür. O halde eşitsizliği sağlayan doğal sayılarının toplamı, 1 + 2 + 3 = 6 dır.

14. $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 3$ olduğuna göre m nin alabileceği değerler kümesini bulunuz.

Çözüm:

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{1} = 2m$,

Kökler çarpımı $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{m-1}{1} = m-1$ dir.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 3 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1.x_2} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-1} - 3 > 0$

$\Rightarrow \frac{2m-3m+3}{m-1} > 0 \Rightarrow \frac{3-m}{m-1} > 0$ olur.

$\frac{3-m}{m-1}$ ifadesinin pay ve paydasındaki ifadelerin köklerini bulalım.

$3 - m = 0 \Rightarrow m = 3$ tür. $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ dir.

$\frac{3-m}{m-1} > 0$ eşitsizliğinin işareti incelenirken tabloda en sağa azılacak olan işaret, $\frac{(-)}{(+)} = (-)$ dir.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$\frac{3-m}{m-1}$	$-$	0	$+$	0	$-$

Buna göre m nin alabileceği değerler kümesi $Ç = (1,3)$ tür.

15. $x^2 - 9 \le 5.(x-3)$

$\frac{x^2-1}{x+1} < 1$

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

Her iki eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 - 9 \le 5.(x-3) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \le 0$ olur.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2).(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 2$ veya $x = 3$ tür.

$x^2 - 5x + 6$ ifadesinin işareti incelenirken tabloda en sağa yazılacak olan işaret + dır.

$$\frac{x^2-1}{x+1} < 1 \Rightarrow \frac{x^2-1-x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x+1} < 0$$

$\dfrac{x^2-x-2}{x+1} = 0$ ifadesinin pay ve paydasının kökleri,

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2).(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 2$ veya $x = -1$ dir.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ olur. Buna göre $x = -1$ değerinden iki tane bulunduğu için $x = -1$ değeri $\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ ifadesinin çift katlı köküdür.

$\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ ifadesinin işareti incelenirken tabloda en sağa yazılacak olan işaret $\dfrac{(+)}{(+)} = (+)$ dır.

x	-∞		-1		2		3		+∞
x^2-5x+6		+		+	0	−	0	+	
$\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$		−	0	−	0	+		+	
Kesişim									

Buna göre verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, $Ç = \phi$ tur.

16. $x > \dfrac{1}{x}$

$x^2 < 4$

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

Her iki eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$x > \dfrac{1}{x} \Rightarrow x - \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x} > 0$ olur. Bu ifadenin pay ve paydasını sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1).(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -1$ veya $x = 1$ dir.

$x = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

Buna göre $\dfrac{x^2-1}{x}$ ifadesinin kökleri -1,0,1 olup bu ifadenin işareti incelenirken tabloda en sağa $\dfrac{+}{+} = (+)$ işareti yazılacaktır.

$x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$ olur.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+2).(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -2$ veya $x = 2$ dir.

$x^2 - 4$ ifadesinin işareti + olup bu ifadenin işareti incelenirken tabloda en sağa + işareti yazılacaktır.

x	-∞		-2		-1		0		1		2	
$\dfrac{x^2-1}{x}$		−		−	0	+	0	−	0	+		+
x^2-4		+	0	−		−		−		−	0	+
Kesişim			0		0		0		0		0	
						Çözüm				*Çözüm*		

Buna göre verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi,

$Ç = (-1,0) \cup (1,2)$ dir.

17. $\dfrac{(x-2).(9-x^2)}{x+1} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm:

Verilen ifadenin pay ve paydasındaki ifadeleri sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$x-2 \Rightarrow x=2$ dir.

$9-x^2 \Rightarrow (3-x).(3+x)=0 \Rightarrow x=3$ veya $x=-3$ tür.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir. Ancak bu değer verilen ifadeyi tanımsız yaptığından çözüm kümesine alınmayacaktır.

x	$-\infty$		-3		-1		2		3		$+\infty$
$\dfrac{(x-2).(9-x^2)}{x+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$Ç=(-3,-1)\cup(2,3)$ olur.

18. $x^2-2mx+4m-3=0$ denkleminin reel kökü olmadığına göre, m nin alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

Çözüm:

$x^2-2mx+4m-3=0$ denkleminde,

$\Delta=b^2-4ac=(-2m)^2-4.1.(4m-3)$

$=4m^2-4.(4m-3)$

Verilen denklemin reel kökü yoksa $\Delta<0$ dır. Buna göre,

$4m^2-4.(4m-3)<0 \Rightarrow m^2-4m+3<0$ olur.

Bu eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$m^2-4m+3=0 \Rightarrow (m-3).(m-1)=0$

$\Rightarrow m-3=0$ veya $m-1=0$

$\Rightarrow m=3$ veya $m=1$ dir.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
m^2-4m+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

m nin alabileceği değerlerin kümesi, $Ç=(1,3)$ tür. Bu aralıktaki m tam sayısı bir tanedir. O da 2 dir.

19. $-x^2+4x+m<5$ eşitsizliğinin daima sağlanabilmesi için m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

$ax^2+bx+c<0$ eşitsizliği daima doğru ise, $a<0$ ve $\Delta<0$ dır.

$-x^2+4x+m<5 \Rightarrow -x^2+4x+m-5<0$ eşitsizliği bütün reel sayılar için doğru ise,

$a=-1<0$ ve $\Delta<0$ olmalıdır.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4.(-1).(m-5)<0$

$\Rightarrow 16+4m-20<0 \Rightarrow 4m-4<0 \Rightarrow 4m<4 \Rightarrow m<1$ dir.

Buna göre m nin alabileceği en büyük tam sayı 0 dır.

20. $a<b<0<c$ olmak üzere, $\dfrac{(x+a).(x+b)}{x+c}>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini a,b ve c ye bağlı olarak bulunuz.

Çözüm:

$f(x)=\dfrac{(x+a).(x+b)}{x+c}$ fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturup $\dfrac{(x+a).(x+b)}{x+c}>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$f(x)=\dfrac{(x+a).(x+b)}{x+c}$ ifadesinin pay ve paydasındaki çarpanları sıfıra eşitleyip köklerini bulalım.

$(x+a).(x+b)=0 \Rightarrow x=-a$ veya $x=-b$ dir.

$x+c=0 \Rightarrow x=-c$ dir.

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret, $\dfrac{(+).(+)}{(+)}=(+)$ dır.

$x=-a,\ x=-b,\ x=-c$ değerlerini sıralayalım.

$a < b < 0 < c$ olduğuna göre $-a$ ile $-b$ pozitif, $-c$ negatiftir. Buna göre bu üç değerden en küçüğü $-c$ dir.

$a < b < 0 \Rightarrow -a > -b > 0$ olur.

Buna göre,

$-c < -b < -a$ dır.

x	$-\infty$		$-c$		$-b$		$-a$		$+\infty$
$\dfrac{(x+a).(x+b)}{x+c}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Yukarıdaki tabloyu yorumlayacak olursak, $x = -b$ de ve $x = -a$ da $f(x)$ in sonucu sıfırdır. $x = -c$ de $f(x)$ tanımsızdır. x in $-c$ den küçük veya $-b$ ile $-a$ arasındaki değerleri için $f(x)$ in sonucu negatif, x in $-a$ dan büyük veya $-c$ ile $-b$ arasındaki değerleri için $f(x)$ in sonucu pozitiftir.

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç = (-c,-b) \cup (-a,+\infty)$ dur.

21. $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

x^2-2x+4 denkleminde, $a = 1,\ b = -2,\ c = 4$ ve

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4.1.4 = -12 < 0$ dır.

$a = 1 > 0$ ve $\Delta < 0$ ise her $x \in R$ için $x^2-2x+4 > 0$ dır.

x^2+2x+4 denkleminde, $a = 1,\ b = -2,\ c = 4$ ve

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4.1.4 = -12 < 0$ dır.

$a = 1 > 0$ ve $\Delta < 0$ ise her $x \in R$ için $x^2+2x+4 > 0$ dır.

Her $x \in R$ için $x^2-2x+4 > 0$ ve $x^2+2x+4 > 0$ ise,

Her $x \in R$ için $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4} > 0$ dır.

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = R$ dir.

22. $\dfrac{2+|x+5|}{x^2-1} \le 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?

Çözüm:

$\dfrac{2+|x+5|}{x^2-1} \le 0$ eşitsizliğinde $|x+5|$ mutlak değerinin sonucu her zaman pozitif olduğundan eşitliğin çözümünde bu ifadeyi göz ardı edebiliriz.

$\dfrac{2}{x^2-1} \le 0$ ifadesinde, $x^2-1 = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 1$ dir.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\dfrac{2}{x^2-1}$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Çözüm kümesi $Ç = (-1,1)$ olan verilen eşitsizliği sağlayan 1 tane tam sayı vardır. O da sıfırdır.

23. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2} \ge 0$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x tamsayısı kaçtır?

Çözüm:

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{x-2}{x^2} \ge 0$ olur.

$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ çift katlı köktür.

Tabloda en sağa yazılacak olan işaret, $\dfrac{(+)}{(+)} = (+)$ dır.

x	−∞		0		2		+∞
$\frac{x-2}{x^2}$		−	0	−	0	+	

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = [2,\infty)$ olur. Bu aralıktaki en küçük x tam sayısı 2 dir.

24. $-3 < \frac{x+1}{x-1} \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$-3 < \frac{x+1}{x-1} \leq 4$ olduğuna göre,

$-3 < \frac{x+1}{x-1}$ ve $\frac{x+1}{x-1} \leq 4$ eşitsizliği birlikte çözülmelidir.

Önce $-3 < \frac{x+1}{x-1}$ eşitsizliğini inceleyelim.

$-3 < \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} + 3 > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-1} > 0$ olur.

$4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ dir.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

Bu eşitsizliğin işareti incelenirken tabloda en sağa

$\frac{(+)}{(+)} = (+)$ yazılacaktır.

Şimdi de $\frac{x+1}{x-1} \leq 4$ eşitsizliğini inceleyelim.

$\frac{x+1}{x-1} \leq 4 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - 4 \leq 0 \Rightarrow \frac{-3x+5}{x-1} \leq 0$ olur.

$-3x + 5 = 0 \Rightarrow -3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ dir.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

Bu eşitsizliğin işareti incelenirken tabloda en sağa

$\frac{(-)}{(+)} = (-)$ yazılacaktır.

x	−∞		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		+∞
$\frac{4x-2}{x-1}$		+	0	−	0	+		+	
$\frac{-3x+5}{x-1}$		−		−	0	+	0	−	
Kesişim			0				0		
		Çözüm						Çözüm	

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ dur.

25. $\frac{x^2+1}{x-3} \geq 0$

$|x| \leq 5$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\frac{x^2+1}{x-3} \geq 0$ olmak üzere,

$x^2 + 1 = 0$ ise reel kök yoktur. $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ tür.

$|x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$ tir.

x	−∞		-5		3		5		+∞
$\frac{x^2+1}{x-3}$		−		−		+		+	
$\|x\| \leq 5$		+	0	−		−	0	+	
Kesişim									
						Çözüm			

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç = (3,5]$ tir. Bu aralıktaki tam sayılar 4 ve 5 olmak üzere 2 tanedir.

KONU BİTMİŞTİR