POLİNOMLAR

$a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n$ birer reel sayı, n bir doğal sayı ve x belirsiz bir eleman olmak üzere,

$$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$$

biçimindeki ifadelere x e göre düzenlenmiş reel katsayılı ve bir belirsizli polinom denir.

x in bir polinomu $P(x), Q(x), R(x), T(x), K(x)$ gibi sembollerle gösterilir.

$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ polinomunda:

$a_0, a_1.x, a_2.x^2, ..., a_{n-1}.x^{n-1}, a_n.x^n$ ifadelerine polinomun terimleri, $a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n$ reel sayılarına polinomun katsayıları denir.

$a_n.x^n$ terimindeki a_n sayısına terimin katsayısı, x in kuvveti olan n doğal sayısına terimin derecesi denir.

Derecesi en büyük olan terimin derecesine polinomun derecesi denir ve $der[P(x)]$ ile gösterilir.

Derecesi en büyük olan terimin katsayısına ise polinomun baş katsayısı denir.

Polinomlar katsayılarına göre adlandırılırlar. Katsayıları reel sayılardan oluşuyorsa reel katsayılı polinom, katsayıları rasyonel sayılardan oluşuyorsa rasyonel katsayılı polinom, katsayıları tam sayılardan oluşuyorsa tam sayı katsayılı polinom diye adlandırılır.

Bir polinomda yanında değişken olmayan terime sabit terim denir.

Örnek:

$Q(x) = 4.x^2 - \sqrt[3]{2}.x - 1$ polinomu ikinci dereceden reel katsayılı bir polinomdur.

Polinomun derecesi 2 olduğundan $der[Q(x)] = 2$ dir.

Polinomda derecesi en büyük olan terimin katsayısı 4 olduğundan polinomun baş katsayısı 4 tür.

Değişken içermeyen terim -1 olduğundan polinomun sabit terimi -1 dir.

Örnek:

$P(x) = -\frac{1}{2}.x^2 - 5x^3 + 7x - \sqrt{2}$ polinomunda

$-\frac{1}{2}.x^2,\ -5x^3,\ 7x,\ -\sqrt{2}$ polinomun terimleridirler.

$-\frac{1}{2},\ -5,\ 7,\ -\sqrt{2}$ polinomun katsayılarıdırlar

$-5x^3$, derecesi en büyük olan terim olduğundan

$der[P(x)] = 3$ tür.

Polinomun baş katsayısı -5 tir.

$-\sqrt{2}$ terimi değişken içermediği için polinomun sabit terimi $-\sqrt{2}$ dir.

$-\frac{1}{2},\ -5,\ 7,\ -\sqrt{2}$ sayıları reel sayılar olduğundan polinom reel katsayılı polinomdur.

Örnek:

$P(x) = 5.x^3 - 4x^2 + 2x - 7$ polinomunda

$5.x^3,\ -4x^2,\ 2x,\ -7$ polinomun terimleridirler.

$5, -4,\ 2, -7$ polinomun katsayılarıdırlar

$5x^3$, derecesi en büyük olan terim olduğundan

$der[P(x)] = 3$ tür.

Polinomun baş katsayısı 5 tir.

-7 terimi değişken içermediği için polinomun sabit terimi

-7 dir.

Örnek:

$R(x)=x^4-\frac{1}{x^2}+3$ ifadesi bir polinom değildir.

Çünkü ifadeyi oluşturan $-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$ teriminin kuvveti -2 doğal sayı değildir.

Bir polinomda kuvvetler doğal sayı olmak zorundadır.

Örnek:

$Q(x)=8x^3+3\sqrt{x}$ ifadesi bir polinom değildir. Çünkü ifadeyi oluşturan $3.\sqrt{x}=3x^{\frac{1}{2}}$ teriminin kuvveti $\frac{1}{2}$ doğal sayı değildir.

Örnek:

$R(x)=x^2+\sqrt[3]{x^2}-2$ ifadesi bir polinom değildir.

Çünkü ifadeyi oluşturan $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ teriminin kuvveti $\frac{2}{3}$ doğal sayı değildir.

Bir polinomda kuvvetler doğal sayı olmak zorundadır.

Örnek:

$P(x)=x^3-x^{-4}+7$ ifadesi bir polinom değildir.

Çünkü ifadeyi oluşturan x^{-4} teriminin kuvveti -4 doğal sayı değildir.

Sonuç

Değişkenlerinin kuvvetleri doğal sayılar olan fonksiyonlara polinom denir

Örnek:

$m\in N$ olmak üzere $3x^{7-\frac{6}{m}}-x^3+x^{m-4}+\frac{1}{2}$

İfadesinin polinom olması için m kaç olmalıdır?

Çözüm:

$3x^{7-\frac{6}{m}}-x^3+x^{m-4}+\frac{1}{2}$ ifadesinin polinom olması için

$7-\frac{6}{m}$ ve $m-4$ ifadeleri doğal sayı olmalıdır.

$7-\frac{6}{m}$ ifadesinin doğal sayı olması için, m doğal sayısı 6 nın böleni olmalıdır.

Buna göre m = 1, m = 2, m = 3 ve m = 6 olabilir.

$m-4$ ifadesinin doğal sayı olması için,

$m-4\geq 0 \Rightarrow m\geq 4$ olmalıdır.

İki koşulu da sağlayan değer m = 6 dır. O halde m = 6 için verilen ifade $3x^6-x^3+x^2+\frac{1}{2}$ polinomuna dönüşür.

Sabit Polinom

$c\in R$ sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$P(x)=c+0.x+0.x^2+...+0.x^{n-1}+0.x^n=c$ şeklindeki polinomlara sabit polinom denir.

Sabit polinomların dereceleri sıfırdır.

Örnek:

$$\left.\begin{aligned}P(x)&=4\\Q(x)&=-\frac{3}{2}\\R(x)&=\sqrt[3]{2}\end{aligned}\right\}$$ polinomlarının her biri sabit polinomdur.

Sıfır Polinomu

$P(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + ... + 0.x^{n-1} + 0.x^n = 0$ şeklindeki polinoma sabit polinom denir.

Sıfır polinomu, 0 ile de gösterilir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

Örnek:

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0.x^6 \\ R(x) = 0.x^1 \end{array}\right\}$$ polinomlarının her biri sıfır polinomudur.

Örnek:

$P(x) = (2a-3).x^2 + bx + 2x + 5$ ifadesi sabit polinom olduğuna göre, a.b çarpımının değeri kaçtır?

Çözüm:

$$P(x) = (2a-3).x^2 + bx + 2x + 5$$

$$= (2a-3).x^2 + (b+2)x + 5$$

ifadesi sabit bir polinom olduğuna göre sabit terim dışındaki terimlerin kat sayıları sıfır olmalıdır.

$2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ ve $b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ bulunur.

O halde $a.b = \frac{3}{2}.(-2) = -3$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = (m-3).x^2 + (n+1).x - 5$ ifadesi sabit polinom olduğuna göre, m+n toplamının değeri kaçtır?

Çözüm:

$P(x) = (m-3).x^2 + (n+1).x - 5$ ifadesi sabit bir polinom olduğuna göre değişken içeren sabit terim dışındaki terimlerin kat sayıları sıfır olmalıdır.

Buna göre,

$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$ ve $n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$ bulunur.

O halde $m + n = 3 + (-1) = -2$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = 3 - \sqrt{3}$ polinomunun derecesi kaçtır?

Çözüm:

$P(x) = 3 - \sqrt{3}$ polinomu değişken içermediğinden sabit polinomdur.

Sabit polinomların dereceleri sıfır olduğundan

$der[P(x)] = 0$ dır.

Örnek:

m ve n birer reel sayı olmak üzere

$Q(x) = m^3x + 27x + n^2 - 3$ ifadesi sıfır polinomu olduğuna göre, $n^2 - m$ nin değerini bulunuz.

Çözüm:

$Q(x) = m^3x + 27x + n^2 - 3 = (m^3 + 27)x + n^2 - 3$ ifadesi sıfır polinomu olduğuna göre,

$m^3 + 27 = 0$ ve $n^2 - 3 = 0$ olmalıdır.

$m^3 + 27 = 0 \Rightarrow m^3 = -27 \Rightarrow m = -3$ bulunur
.

$n^2 - 3 = 0 \Rightarrow n^2 = 3$ bulunur. Bu durumda

$n^2 - m = 3 - (-3) = 6$ bulunur.

İşlemlerde kolaylık sağladığı için bir polinom x in azalan ya da artan kuvvetlerine göre yazılır.
x in artan kuvvetlerine göre yazılmış olan

$P(x) = a_o + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$

polinomu, $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} ... + a_2.x^2 + a_1.x + a_o$ şeklinde x azalan kuvvetlerine göre yazılabilir.

Örnek:

$P(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x^5 + 7$ polinomu, x in azalan kuvvetlerine göre, $P(x) = 5x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7$ şeklinde, x in artan kuvvetlerine göre, $P(x) = 7 + \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 + 5x^5$ şeklinde yazılır.

POLİNOM FONKSİYONLAR

$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ polinomunda x reel sayı da olabilen bir belirsizdir.

Eğer $P(x)$ polinomunda x reel sayı olarak seçilirse;

$P : R \to R$,

$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ bir fonksiyon olur. Bu tür fonksiyonlara polinom fonksiyon denir.

Örnek:

$P : R \to R$, $P(x) = 3.x^3 - 2.x^2 + 5x - 3$ fonksiyonu, reel sayılar kümesinde tanımlı üçüncü dereceden polinom fonksiyondur.

Bu fonksiyonda 3 ün görüntüsünü bulalım.
$P(x)$ polinomunda x gördüğümüz yere 3 yazarsak,

$P(3) = 3.3^3 - 2.3^2 + 5.3 - 3 = 75$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^3 + 3.x^2 + 4x + 2$ polinomu veriliyor. $P(2)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunda x gördüğümüz yere 2 yazarsak,

$P(2) = 2^3 + 3.2^2 + 4.2 + 2 = 30$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = 2.x^2 + x - 5$ polinomu veriliyor. $P(x+1)$ polinomunu bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunda x gördüğümüz yere x +1 yazarsak,

$P(x+1) = 2.(x+1)^2 + x + 1 - 5$

$P(x+1) = 2.(x^2 + 2x + 1) + x - 4$

$P(x+1) = 2.x^2 + 4x + 2 + x - 4 = 2.x^2 + 5x - 2$

bulunur.

Örnek:

$P(x-1) = 2.x^2 - 7.x + 10$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunu bulalım.

Çözüm:

$Q(x) = x - 1 \Rightarrow Q^{-1}(x) = x + 1$ dir.

$P(x-1) = 2.x^2 - 7.x + 10$ polinomunda x gördüğümüz yere x + 1 yazarsak,

$P(x+1-1) = 2.(x+1)^2 - 7.(x+1) + 10$

$P(x) = 2.(x^2 + 2x + 1) - 7x - 7 + 10$

$P(x) = 2.x^2 + 4x + 2 - 7x + 3 = 2.x^2 - 3x + 5$
bulunur.

Örnek:

$P(2x+1) = -8.x^2 - 2.x - 4$ polinomu veriliyor. $P(5)$ değerini bulalım.

1.Çözüm:

Önce $P(x)$, sonra $P(5)$ bulunur.

$P(2x+1) = -8.x^2 - 2.x - 4$ polinomunda x yerine $\frac{x-1}{2}$ yazarsak,

$$P\left(2.\frac{x-1}{2}+1\right) = -8.\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 2.\frac{x-1}{2} - 4$$

$$P(x-1+1) = -8.\left(\frac{x^2-2x+1}{4}\right) - x + 1 - 4$$

$P(x) = -2x^2 + 4x - 2 - x - 3 = -2x^2 + 3x - 5$ bulunur.

$P(5) = -2.5^2 + 3.5 - 5 = -40$ bulunur.

2.Çözüm:

$P(x)$ i bulmadan da $P(5)$ i bulabiliriz. $Q(x) = 2x+1$ polinomunu 5 sayısına eşitlersek,

$2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

O halde $P(2x+1) = -8.x^2 - 2.x - 4$ polinomunda x yerine 2 yazılırsa,

$$P(2.2+1) = -8.2^2 - 2.2 - 4$$

$P(5) = -40$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ polinomu veriliyor.

a. Polinomun katsayıları toplamını bulunuz.

b. Polinomun çift kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz

c. Polinomun tek kuvvetli katsayıları toplamını bulunuz

Çözüm:

a. Polinomda x yerine 1 yazılırsa, her katsayı 1 in kuvvetleri ile çarpılmış olacağından katsayılar toplamı bulunmuş olur.

b. Polinomda x yerine -1 yazarak $P(-1)$, x yerine 1 yazarak $P(1)$ değerini bulalım.

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_n.(-1)^n$$

$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ bulunur.

Bulunan bu değerler taraf tarafa toplanırsa,

$P(-1) + P(1) = 2.(a_0 + a_2 + a_4 + ...)$ dir. Polinomun çift kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamı;

$a_0 + a_2 + a_4 + ... = \frac{P(-1)+P(1)}{2}$ bulunur.

c. Polinomda x yerine 1 yazarak $P(1)$, x yerine -1 yazarak $P(-1)$ değerini bulalım.

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_n.(-1)^n$$

bulunur. Bulunan bu değerler taraf tarafa çıkarılırsa,

$P(1) - P(-1) = 2.(a_1 + a_3 + a_5 + ...)$ dir. Polinomun çift tek kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamı;

$a_1 + a_3 + a_5 + ... = \frac{P(1)-P(-1)}{2}$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = (2.x^2 - 3x + 5).(5x^3 - 3x + 2)$ polinomu veriliyor.

a. Polinomun katsayıları toplamını bulunuz.
b. Polinomun çift kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz
c. Polinomun tek kuvvetli katsayıları toplamını bulunuz

Çözüm:

a. Polinomda x yerine 1 yazılırsa,

$P(1)=(2.1^2-3.1+5)(5.1^3-3.1+2)=0$ bulunur.

b. Çift kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamı toplamı;

$\frac{P(-1)+P(1)}{2}=\frac{40+0}{2}=20$ bulunur.

c. Tek kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamı;

$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{0-40}{2}=-20$ bulunur.

Çok Belirsizli Polinomlar

x ve y iki değişken olmak üzere

$P(x,y)=5x^4.y^2-2x^3+4x^2y^5-y^2-8$ biçimindeki ifadelere iki belirsizli polinom denir.

$P(x,y)$ polinomunda bir terimin derecesi, bu terimdeki belirsizlerin üslerinin toplamıdır. Polinomun derecesi ise terimlerin derecelerinin en büyük olanıdır. Terimdeki sayısal çarpanlara katsayı denir.

$P(x,y)$ polinomunda $5x^4.y^2$ teriminin;

x e göre derecesi 4;
y ye göre derecesi 2;

x ve y ye göre derecesi, 4 +2 = 6 ve terimin katsayısı 5 tir. Diğer terimlerin x ve y ye göre dereceleri de yukarıdaki gibi bulunabileceğinden $P(x,y)$ polinomunun derecesi

$der[P(x,y)]=7$ dir.

İKİ POLİNOMUN EŞİTLİĞİ

Aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olan polinomlara eşit polinomlar denir.

Örnek:

$P(x)=a.x^2+(b-3).x+5$ ve

$Q(x)=-3x^2+5x+c+7$ polinomları veriliyor.

$P(x)=Q(x)$ olduğuna göre a, b ve c nin değerlerini bulalım.

Çözüm:

$P(x)=Q(x)$ ise,

$a.x^2+(b-3).x+5=-3x^2+5x+c+7$

$a=-3$, $b-3=5\Rightarrow b=8$, $c+7=5\Rightarrow c=-2$ olur.

Örnek:

$P(x)=x^3-(a-2).x+3$ ve

$Q(x)=(b+1).x^3+cx^2+5x+d-1$ polinomları veriliyor.

$P(x)=Q(x)$ olduğuna göre a, b,c ve d nin değerlerini bulalım.

Çözüm:

$P(x)=Q(x)$ ise,

$x^3-(a-2).x+3=(b+1).x^3+cx^2+5x+d-1$

$b+1=1\Rightarrow b=0$, $c=0$,

$-(a-2)=5\Rightarrow a-2=-5\Rightarrow a=-3$

$d-1=3\Rightarrow d=4$ bulunur.

Örnek:

$(a-b+1).x^2-3x+c=(a+b).x-ab+3$ olduğuna göre a, b ve c nin değerlerini bulalım.

Çözüm:

$(a-b+1).x^2-3x+c=(a+b).x-ab+3$ ise,

$a-b+1=0$, $a+b=-3$, $c=-ab+3$ olur.

$\left.\begin{array}{l} a-b+1=0 \\ a+b=-3 \end{array}\right\}$ sistemini taraf tarafa toplarsak,

$2a+1=-3 \Rightarrow 2a=-4 \Rightarrow a=-2$

$a+b=-3 \Rightarrow -2+b=-3 \Rightarrow b=-1$ bulunur.

$c=-ab+3=-(-2).(-1)+3=-2+3=1$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ olduğuna göre A ve B nin değerlerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A.(x+1)+B.(x-1)}{(x-1).(x+1)}$$

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A.x+A+B.x-B}{x^2-1}=\frac{x.(A+B)+A-B}{x^2-1}$$

$x+2=x.(A+B)+A-B$

$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ A-B=2 \end{array}\right\}$ sistemini taraf tarafa toplarsak,

$2A=3 \Rightarrow A=\dfrac{3}{2}$,

$A+B=1 \Rightarrow \dfrac{3}{2}+B=1 \Rightarrow B=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$ bulunur.

POLİNOMLARDA İŞLEMLER

1. Toplama İşlemi

İki polinom toplanırken; dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları kendi aralarında toplanır, sonuç o terimin katsayısı olarak yazılır.

Uyarı

- ➢ $a.x^n+b.x^n=(a+b).x^n$ dir.
- ➢ $x^n+b.x^n=(1+b).x^n$ dir.

Örnek:

$P(x)=2x+3$ ve $Q(x)=4x-5$ olmak üzere,

$P(x)+Q(x)=2x+3+4x-5=6x-2$ dir.

Örnek:

$P(x)=2x^2+1$ ve $Q(x)=-x^2+2x-3$ olmak üzere $P(x)+Q(x)$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$P(x)=2x^2+1=2.x^2+0.x+1$ dir.

$Q(x)=-x^2+2x-3=-1.x^2+2.x-3$ tür.

$P(x)+Q(x)=[2+(-1)].x^2+[0+2].x+(+1+(-3))$

$P(x)+Q(x)=1.x^2+2.x+(-2)$

$P(x)+Q(x)=x^2+2x-2$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=2x^3+\dfrac{3}{4}x^2+\sqrt{2}x-1$ ve $Q(x)=3x^2+2x+2$ olmak üzere $P(x)+Q(x)$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$P(x)+Q(x)=2.x^3+\left(\frac{3}{4}+3\right).x^2+\left(\sqrt{2}+2\right).x-1+2$$

$$P(x)+Q(x)=2x^3+\frac{15}{4}x^2+\left(\sqrt{2}+2\right).x+1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$x^2+3x-2+P(x)=2.x^3-4x^2+3x-1$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunu bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomu ile $Q(x)$ polinomunun toplamının derecesi, bunlardan derecesi büyük olanın derecesine eşittir.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun derecesi 3 tür.

$P(x)=a+b.x+c.x^2+d.x^3$ olsun.

$x^2+3x-2+a+b.x+c.x^2+d.x^3=2.x^3-4x^2+3x-1$

$d.x^3+(c+1).x^2+(b+3).x+a-2=2.x^3-4x^2+3x-1$

olup, buradan,

$d=2$, $c+1=-4 \Rightarrow c=-5$

$b+3=3 \Rightarrow b=0$, $a-2=-1 \Rightarrow a=1$ bulunur.

$P(x)=1+0.x-5.x^2+2.x^3=2.x^3-5.x^2+1$ olur.

Örnek:

$P(x,y)=7x-3y^3+4xy$ ve $Q(x,y)=2xy+5x+6y^3$ polinomlarının toplamını bulalım.

Çözüm:

$P(x,y)+Q(x,y)=(-3+6).y^3+(7+5).x+(4+2).xy$

$P(x,y)+Q(x,y)=3y^3+12x+6xy$ bulunur.

2. Çıkarma İşlemi

$P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$ olduğundan $P(x)$ polinomundan $Q(x)$ polinomunu çıkarmak, $P(x)$ ile $-Q(x)$ i toplamaktır. Bunun için çıkarma işleminin, çıkarılacak polinomun işaretini değiştirip toplama yapmak biçiminde ele alabiliriz.

Örnek:

$P(x)=2x+3$ ve $Q(x)=4x-5$ olduğuna göre,

$P(x)-Q(x)=2x+3-(4x-5)=2x+3-4x+5$

$P(x)-Q(x)=(2-4).x+3+5=-2x+8$ dir.

Örnek:

$P(x)=3$ ve $Q(x)=4x+5$ olduğuna göre,

$P(x)-Q(x)=3-(4x+5)=3-4x-5=-4x-2$ dir.

Örnek:

$P(x)=x^2-8$ ve $Q(x)=x^3+5x^2+2$ olmak üzere

$P(x)-Q(x)$ farkını bulalım.

Çözüm:

$P(x)=x^2-8=0.x^3+1.x^2+0.x-8$ dir.

$Q(x)=x^3+5x^2+2=1.x^3+5.x^2+0.x+2$ tür.

$P(x)-Q(x)=(0-1).x^3+[1-5].x^2+(0-0).x-8-2$

$P(x)-Q(x)=-1.x^3+(-4).x^2+0.x-10$

$P(x)-Q(x)=-x^3-4x^2-10$ bulunur.

4. Çarpma İşlemi

İki polinomun çarpımı; birisinin her teriminin diğerinin her terimi ile ayrı ayrı çarpımlarından elde edilen terimlerin toplamına eşittir.

Uyarı

- $ax^n.bx^m=(a.b).x^{n+m}$ dir.
- $x^n.bx^m=b.x^{n+m}$ dir.

Örnek:

$P(x)=3x$ ve $Q(x)=4x+5$ olmak üzere,

$P(x).Q(x)=3x.(4x+5)=3x.4x+3x.5=12x^2+15x$ dir.

Örnek:

$P(x)=3x-1$ ve $Q(x)=x^2+1$ olmak üzere

$P(x).Q(x)$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$P(x).Q(x)=(3x-1).(x^2+1)$

$P(x).Q(x)=3x.x^2+3x.1+(-1).x^2+(-1).1$

$P(x).Q(x)=3x^3+3x+-x^2-1$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=3x^2+1$ olduğuna göre $(x+2).P(x)$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$(x+2).P(x)=(x+2).(3x^2+1)$

$(x+2).P(x)=x.3x^2+x.1+2.3x^2+2.1$

$(x+2).P(x)=3x^3+6x^2+x+2$ dir.

Örnek:

$P(x)=3x-1$ olduğuna göre $(x^2-1)P(x)$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$(x^2-1)P(x)=(x^2-1)(3x-1)$

$(x^2-1)P(x)=x^2.3x+x^2.(-1)+(-1).3x+(-1).(-1)$

$(x^2-1)P(x)=3x^3-x^2-3x+1$ dir.

Örnek:

$P(x)=3x^2+2$ ve $Q(x)=5x^3-3x+3$ olmak üzere

$P(x).Q(x)$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$P(x).Q(x)=(3x^2+2).(5x^3-3x+3)$

$P(x).Q(x)=15x^5-9x^3+9x^2+10x^3-6x+6$

$P(x).Q(x)=15x^5+x^3+9x^2-6x+6$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=3x^2+2x+1$ polinomu veriliyor.

$P(x).Q(x)=9x^3+mx^2+nx-1$ olduğuna göre $Q(x)$ polinomunu ve m,n sayılarını bulalım.

Çözüm:

$der[P(x).Q(x)]=3$ ve $der[P(x)]=2$ ise $der[Q(x)]=1$ bulunur.

$der[Q(x)]=1$ ise $Q(x)=a.x+b$ şeklinde bir polinomdur.

$P(x).Q(x)=3ax^3+3bx^2+2ax^2+2bx+ax+b$

$P(x).Q(x)=3ax^3+(2a+3b)x^2+(a+2b)x+b$ dir.

$P(x).Q(x)=9x^3+mx^2+nx-1$ olduğundan

$3a=9\Rightarrow a=3$,

$b=-1$,

$2a+3b=m \Rightarrow m=6-3=3$,

$a+b=n \Rightarrow n=3-1=2$ bulunur.

$Q(x)=a.x+b=3x-1$ dir.

3. Bölme İşlemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom, $\text{der}[P(x)] > \text{der}[Q(x)] \geq 1$ olsun. $P(x)=Q(x).B(x)$ eşitliğini sağlayan $B(x)$ polinomuna, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümü denir.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} -\,Q(x).B(x) & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

$P(x)$ Bölünen
$Q(x)$ Bölen
$B(x)$ Bölüm
$K(x)$ Kalan
olmak üzere, yandaki işleme bölme işlemi denir. Yandaki bölme işleminde,

1. $\text{der}[P(x)] \geq \text{der}[Q(x)]$
2. $\text{der}[K(x)] < \text{der}[Q(x)]$
3. $\text{der}[K(x)] < \text{der}[B(x)]$ ise $Q(x)$ ile $B(x)$ in yer değiştirmesi kalanı değiştirmez.
4. $K(x)=0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam olarak bölünür. Bu durumda, $P(x)$ in çarpanlarından biri $Q(x)$ polinomudur.

Bölme İşleminin Yapılışı

Polinomlarda bölme işlemi, sayılarda bölme işlemine benzer şekilde yapılır. Bunun için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır.

1. Bölünen ve bölen polinomlar x değişkeninin azalan kuvvetlerine göre sıralanırlar.
2. Bölünen polinomun soldan ilk terimi, bölen polinomun soldan ilk terimine bölünür. Çıkan sonuç, bölümün ilk terimi olarak yazılır.
3. Bulunan bu bölüm, bölen polinomun bütün terimleri ile çarpılarak, aynı dereceli terimler alt alta gelecek şekilde bölünen polinomun altına yazılır.
4. Bölünenin altına yazılan çarpım polinomu, bölünenden çıkarılır.
5. Yukarıdaki işlemlere, kalan polinomun derecesi, bölen polinomun derecesinden küçük oluncaya kadar devam edilir.

Örnek:

$P(x)=2x^3+2x$ polinomunu $Q(x)=x$ polinomuna bölelim.

1.Çözüm:

1.Adım:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+2x & x \\ \cline{2-2} -\,2x^3 & 2x^2 \\ \hline 2x & \end{array}$$

$\dfrac{2x^3}{x}=2x^2$ olduğundan.

$\left(2x^3+2x\right)-2x^3=2x$ olduğuna dikkat ediniz.

2.Adım:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+2x & x \\ \cline{2-2} -\,2x^3 & 2x^2+2 \\ \hline 2x & \\ -\,2x & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\dfrac{2x}{x}=2$ olduğundan.

$2x-2x=0$ olduğuna dikkat ediniz.

Buna göre $P(x)=2x^3+2x$ polinomunun $Q(x)=x$ polinomuna bölünmesiyle elde edilen bölüm $2x^2+2$ ve kalan sıfırdır.

2.Çözüm:

$$\frac{2x^3+2x}{x}=\frac{x.\left(2x^2+2\right)}{x}=2x^2+2 \text{ olduğuna göre,}$$

$P(x)=2x^3+2x$ polinomunun $Q(x)=x$ polinomuna bölünmesiyle elde edilen bölüm $2x^2+2$ ve kalan sıfırdır.

Örnek:

$P(x)=x^3+2x$ polinomunu $Q(x)=x-2$ polinomuna bölelim.

Çözüm:

1.Adım:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x & x-2 \\ \cline{2-2} -\;x^3-2x^2 & x^2 \\ \hline 2x^2+2x & \end{array}$$

$\dfrac{x^3}{x}=x^2$ ve $x^2.(x-2)=x^3-2x^2$ olduğu için,

$\left(x^3+2x\right)-\left(x^3-2x^2\right)=2x^2+2x$ olduğuna dikkat ediniz.

2.Adım:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x & x-2 \\ \cline{2-2} -\;x^3-2x^2 & x^2+2x \\ \hline 2x^2+2x & \\ -\;2x^2-4x & \\ \hline 6x & \end{array}$$

$\dfrac{2x^2}{x}=2x$ ve

$2x.(x-2)=2x^2-4x$ olduğu için,

$\left(2x^2+2x\right)-\left(2x^2-4x\right)=6x$

olduğuna dikkat ediniz.

3.Adım:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x & x-2 \\ \cline{2-2} -\;x^3-2x^2 & x^2+2x+6 \\ \hline 2x^2+2x & \\ -\;2x^2-4x & \\ \hline 6x & \\ -\;6x-12 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$\dfrac{6x}{x}=6$ ve $6.(x-2)=6x-12$

olduğu için,

$6x-(6x-12)=12$ olduğuna dikkat ediniz.

$x-2$ nin derecesi 1 dir. 12 nin derecesi sıfırdır. 0 < 1 olduğu için bölme işlemi bitmiştir.

Buna göre $P(x)=x^3+2x$ polinomunun $Q(x)=x-2$ polinomuna bölünmesiyle elde edilen bölüm x^2+2x+6 ve kalan 12 dir.

Örnek:

$P(x)=x^4+5x$ polinomunu $Q(x)=x^2+2$ polinomuna bölelim.

Çözüm:

$$\begin{array}{l|l} x^4+5x & x^2+2 \\ \cline{2-2} -\;x^4+2x^2 & x^2-2 \\ \hline -2x^2+5x & \\ -\;-2x^2-4 & \\ \hline 5x+4 & \end{array}$$

$P(x)=x^4+5x$ polinomunun

$Q(x)=x^2+2$ polinomuna

bölümünde bölüm x^2-2, kalan $5x+4$ tür.

Örnek:

Bir $P(x)$ polinomunun $2x^2-3$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm $x+1$ ve kalan x olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & 2x^2-3 \\ \cline{2-2} - & x+1 \\ \hline x & \end{array}$$

Bölme işleminin sağlamasına göre,

$P(x)=\left(2x^2-3\right)(x+1)+x$

$P(x)=2x^3+2x^2-3x-3+x$

$P(x)=2x^3+2x^2-2x-3$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{a^6-2a^4+4a^2-8}{a^4+4}$ bölme işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{l|l} a^6-2a^4+4a^2-8 & a^4+4 \\ \cline{2-2} -\;a^6+4a^2 & a^2-2 \\ \hline -2a^4-8 & \\ -\;-2a^4-8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{a^6 - 2a^4 + 4a^2 - 8}{a^4 + 4} = a^2 - 2 \text{ bulunur.}$$

Kural

$m > n$ olmak üzere,

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$

$P(x)$ poinomunun $Q(x)$ ile bölümünden elde edilen

bölüm $B(x)$ olsun.

Buna göre,

- $der[P(x)] + der[Q(x)] = m$ dir. Yani iki polinomun toplamının derecesi, polinomlardan derecesi büyük olanın derecesine eşittir.
- $der[P(x)] + der[Q(x)] = m$ dir. Yani iki polinomun farkının derecesi, polinomlardan derecesi büyük olanın derecesine eşittir.
- $der[P(x)].der[Q(x)] = m + n$ dir. Yani iki polinomun çarpımının derecesi, polinomların dereceleri toplamına eşittir.
- $der[B(x)] = m - n$ dir. Yani iki polinomun bölümünün derecesi, polinomların dereceleri farkına eşittir.
- $der\left[P(x)^k\right] = k.m$ dir.

Örnek:

$P(x) = (x^2 + x - 3)^3$ olduğuna göre $der[P(x)]$ kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

$R(x) = x^2 + x - 3$ olsun. Bu durumda $der[R(x)] = 2$ olup,

$der[P(x)] = der\left[R(x)^3\right] = 3.2 = 6$ bulunur.

2.Yol

Derece, bir polinomdaki en büyük dereceli terim ile ilgilidir.

Yani x^2, $2x^2 + 3$, $x^2 + x - 3$ polinomlarının üçünün de derecesi 2 dir.

$P(x) = (x^2 + x - 3)^3$ polinomunun derecesi ile

$(x^2)^3 = x^6$ polinomunun derecesi aynıdır.

$der\left[\left(x^2\right)^3\right] = 6$ olduğuna göre $der[P(x)] = 6$ dır.

Örnek:

$P(x) = (x^2 + x - 3)^3$ olduğuna göre $der\left[P^2(x)\right]$ kaçtır?

Çözüm:

1.Yol

$der[P(x)] = 6$ olduğunu önceki örnekte bulduk. Buna göre,

$der\left[P^2(x)\right] = 2.der[P(x)] = 2.6 = 12$ bulunur.

2.Yol

$P(x) = (x^2 + x - 3)^3$ polinomunun derecesi ile

$(x^2)^3 = x^6$ polinomunun derecesi aynıdır.

$der\left[\left(x^6\right)^2\right] = der\left[x^{12}\right] = 12$ olduğuna göre

$der\left[P^2(x)\right] = 12$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = (x^2 + x - 3)^3$ ve $der[Q(x)] = 7$ olduğuna göre

$der\left[P(x)-Q(x)\right]$ kaçtır?

Çözüm:

$der\left[P(x)\right]=6$ olduğunu önceki örnekte bulduk.

$der\left[Q(x)\right]=7$ ve 7 > 6 olduğundan

$der\left[P(x)-Q(x)\right]=7$ dir.

Örnek:

$P(x)=\left(x^2+x-3\right)^3$ ve $der\left[Q(x)\right]=7$ olduğuna göre $P^2(x)$ polinomunun $Q(x)$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomunun derecesi kaçtır?

Çözüm:

$$der\left[\frac{P^2(x)}{Q(x)}\right]=der\left[P^2(x)\right]-der\left[Q(x)\right]$$

$$=2.der\left[P(x)\right]-der\left[Q(x)\right]$$

$$=2.6-7=12-7=5 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$P(x+3)=3x^3-5x+2$ olduğuna göre $P(1)$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$x+3=1\Rightarrow x=1-3=-2$ değeri polinomda yazılırsa,

$$P(-2+3)=3.(-2)^3-5.(-2)+2$$

$$=3.(-8)-10+2$$

$$=-24-10+2=-12 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$P(x)=x^3-2x^2+3x-4$ olduğuna göre $P(3)+P(-1)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$P(x)=x^3-2x^2+3x-4$ polinomunda,

$P(3)=3^3-2.3^2+3.3-4=14$ tür.

$P(-1)=(-1)^3-2.(-1)^2+3.(-1)-4=-10$ dur.

$P(3)+P(-1)=14-10=4$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=x^3-2x^2+3x-4$ olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamını bulalım.

Çözüm:

1.Yol

$P(x)=x^3-2x^2+3x-4$ polinomunun katsayıları,
1, -2, 3, -4 tür. Buna göre $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı

$1+(-2)+3+(-4)=-2$ dir.

2.Yol

$P(x)=x^3-2x^2+3x-4$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1)$ dir.

$P(x)=x^3-2x^2+3x-4$ polinomunda x = 1 ise,

$P(x)=1^3-2.1^2+3.1-4=-2$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=x^2-3x-4$ olduğuna göre, $P(x+1)$ polinomunun katsayıları toplamını bulalım.

Çözüm:

1.Yol

$P(x) = x^2 - 3x - 4$ olduğuna göre,

$P(x+1) = (x+1)^2 - 3.(x+1) - 4$

$P(x+1) = x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 - 4$

$P(x+1) = x^2 - x - 6$ bulunur.

Buna göre $P(x+1)$ polinomunun katsayıları toplamı,

$1 + (-1) + (-6) = -6$ bulunur.

2.Yol

$P(x+1)$ polinomunun katsayıları toplamı,

$P(1+1) = P(2)$ dir.

$P(x) = x^2 - 3x - 4$ polinomunda x = 2 yazılırsa,

$P(2) = 2^2 - 3.2 - 4 = -6$ bulunur.

Örnek:

$P(3x-8)$ polinomunun katsayıları toplamı 35 olduğuna göre, $P(-5)$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$P(3x-8)$ polinomunun katsayıları toplamı 35 ise,

$P(3.1-8) = 35 \Rightarrow P(-5) = 35$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulalım.

Çözüm:

1.Yol
Sabit terim x ten bağımsız olan terimdir.

Buna göre $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ polinomunun sabit terimi -4 tür.

2.Yol

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ polinomunun sabit terimi $P(0)$ dır.

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ polinomunda x = 0 ise,

$P(0) = 0^3 - 2.0^2 + 3.0 - 4 = -4$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^2 - x - 4$ olduğuna göre $P(x+2)$ polinomunun sabit terimini bulalım.

Çözüm:

1.Yol

$P(x) = x^2 - x - 4$ olduğuna göre,

$P(x+2) = (x+2)^2 - (x+2) - 4$

$P(x+2) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 4$

$P(x+2) = x^2 + 3x - 2$ bulunur.

Buna göre $P(x+2)$ polinomunun sabit terimi, -2 dir.

2.Yol

$P(x+2)$ polinomunun sabit terimi, $P(0+2) = P(2)$ dir.

$P(x) = x^2 - x - 4$ polinomunda x = 2 yazılırsa,

$P(2) = 2^2 - 2 - 4 = -2$ bulunur.

Örnek:

m ve n birer reel sayı olmak üzere $P(x)=(mx^2+n)^3$ polinomunun sabit terimi –8 ve katsayılar toplamı 27 olduğuna göre, m–n farkı kaçtır?

Çözüm:

Polinomun sabit terimi –8 olduğuna göre,

$$P(0)=(m.0^2+n)^3=n^3=-8$$

$n^3=-8 \Rightarrow n=-2$ bulunur.

Polinomun katsayılar toplamı 27 olduğuna göre,

$$P(1)=(m.1^2+n)^3=(m-2)^3=27$$

$m-2=3 \Rightarrow m=5$ bulunur.

Buna göre,

$m-n=5-(-2)=7$ elde edilir.

BÖLME İŞLEMİ YAPMADAN KALANI BULMA

A. Bir $P(x)$ Polinomunun $(ax+b)$ İle Bölümündeki Kalanı Bulma

$P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölünmesinden elde edilen bölüm $B(x)$, kalan K olsun.

Buna göre,

$P(x)=(ax+b).B(x)+K$ olur.

$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ dır. Bu değeri yazarsak,

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(a.\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right).B\left(-\frac{b}{a}\right)+K$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=(-b+b).B\left(-\frac{b}{a}\right)+K=K$$

O halde $P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulmak için $ax+b=0$ denkleminin kökü olan $x=-\frac{b}{a}$ için $P(x)$ polinomunun değeri olan $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ hesaplanır.

Sonuç

Bir $P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölünmesinden elde edilen kalan $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ dır.

Örnek:

$P(x)=2x^3+3x^2-2x+5$ polinomunun $Q(x)=x-3$ polinomuna bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ tür. $P(x)$ polinomunda x yerine 3 yazılırsa,

$$P(3)=2.3^3+3.3^2-2.3+5$$

$P(3)=54+27-6+5=80$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=x^3-2x^2+3x-7$ polinomunun $x+1$ polinomuna bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir. $P(x)$ polinomunda x yerine -1 yazılırsa,

$$P(-1)=(-1)^3-2.(-1)^2+3.(-1)-7$$

$P(-1)=-1-2-3-7=-13$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx - 12$ polinomunun $x - 2$ polinomuna tam bölünebilmesi için m nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun $x - 2$ polinomuna tam bölünebilmesi için kalan $K = 0$ olmalıdır.

Yani $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ için, $K = P(2) = 0$ olmalıdır.

Buna göre,

$P(2) = 2.2^3 - 3.2^2 + m.2 - 12 = 0$

$P(2) = 16 - 12 + 2m - 12 = 0$

$2m - 8 = 0 \Rightarrow m = 4$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ polinomunun $x - 1$ ile bölümündeki kalan 5 ve $x - 2$ ile bölümündeki kalan 20 olduğuna göre a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ için,

$K = 5 = P(1) = 1^3 + 5.1^2 + a.1 + b$

$a + b + 6 = 5 \Rightarrow a + b = -1$ bulunur

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ için,

$K = 20 = P(2) = 2^3 + 5.2^2 + a.2 + b$

$2a + b + 28 = 20 \Rightarrow 2a + b = -8$ bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a + b = -8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a - b = 1 \\ 2a + b = -8 \end{array}\right\} \quad a = -7,\ b = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$P(x) = x^2 - 3x - 4$ olduğuna göre $P(x + 1)$ polinomunun $x - 3$ polinomuna bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

1.Yol:

$P(x) = x^2 - 3x - 4$ olduğuna göre,

$P(x + 1) = (x + 1)^2 - 3.(x + 1) - 4$

$P(x + 1) = x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 - 4$

$P(x + 1) = x^2 - x - 6$ dır.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ için,

$K = P(3 + 1) = 3^2 - 3 - 6$

$K = P(4) = 9 - 3 - 6 = 0$ bulunur.

Yani $P(x + 1)$ polinomu $x - 3$ polinomuna tam bölünüyor.

2.Yol:

$P(x + 1)$ polinomu bulunmadan da kalan bulunabilir.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ için,

$K = P(3 + 1) = P(4)$ tür.

$P(x) = x^2 - 3x - 4$ polinomunda x yerine 4 yazılırsa,

$K = P(4) = 4^2 - 3.4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$ bulunur.

Yani $P(x + 1)$ polinomu $x - 3$ polinomuna tam bölünüyor.

Sonuç

- $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden elde edilen kalanı $P(a)$ dır.
- $P(x+b)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden elde edilen kalanı $P(a+b)$ dir.
- $P(3x+b)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden elde edilen kalanı $P(3a+b)$ dir.

Örnek:

$P(x-2)=x^2-7x+14$ verildiğine göre, $P(x)$ polinomunun $x-3$ polinomuna bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun $x-3$ ile bölünmesinden elde edilen kalan $P(3)$ tür.

$P(x-2)$ polinomunda x yerine 5 yazarsak,

$P(5-2)=5^2-7.5+14=25-35+14=4$

$P(3)=4$ bulunur.

Örnek:

$(x-1).P(x)=x^2+3x-a$ verildiğine göre, $P(x)$ polinomunun $x-3$ polinomuna bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ tür.

$P(x)$ polinomunun $x-3$ ile bölünmesinden elde edilen kalan $P(3)$ tür. Ancak, eşitliğin sağ tarafında yer alan **a** değerini bulmalıyız. Bunun için eşitliğin sol tarafını sıfır yapan x değerinden yararlanırız.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir. Verilen bağıntıda x yerine 1 yazarsak,

$(1-1).P(x)=1^2+3.1-a$

$0=1+3-a \Rightarrow a=4$ bulunur.

Buna göre, $(x-1).P(x)=x^2+3x-4$ olur.

Şimdi $P(x)$ polinomunun $x-3$ ile bölümündeki kalanı bulmak için x yerine 3 yazalım.

$(3-1).P(3)=3^2+3.3-4$

$2.P(3)=9+9-4 \Rightarrow P(3)=\frac{14}{2}=7$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=4.x^3-2x^2+m-2$ polinomunun $2x-1$ ile bölünebilmesi için m yerine hangi sayının yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

$2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ olur.

$P(x)$ polinomunun $2x-1$ ile tam bölünebilmesi için kalan sıfır olmalıdır. Yani $K=P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ olmalıdır.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=4.\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2+m-2=0$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+m-2=0$$

$m-2=0 \Rightarrow m=2$ bulunur.

D. Bir $P(x)$ Polinomunun x^n-a İle Bölümündeki Kalanı Bulma

$x^n-a=0 \Rightarrow x^n=a$ dır.

Buna göre derecesi n den büyük olan bir polinomun $x^n - a$ ile bölümünden kalanı bulmak için x^n yerine a yazılır.

Örnek:

$P(x) = x^9 + 2x^6 - 3x^3 + 4$ polinomunun $x^3 + 2$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -2$ dir.

$P(x) = x^9 + 2x^6 - 3x^3 + 4$

$P(x) = (x^3)^3 + 2.(x^3)^2 - 3x^3 + 4$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunda x^3 yerine -2 yazılırsa,

$K = (-2)^3 + 2.(-2)^2 - 3.(-2) + 4$

$K = -8 + 2.4 + 6 + 4 = 10$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$ polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ dir.

$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$

$P(x) = (x^2)^2 - x^2.x + 2.x^2 - 5$ olduğuna göre $P(x)$

polinomunda x^2 yerine 1 yazılırsa,

$K = 1^2 - 1.x + 2.1 - 5$

$K = -x - 2$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ polinomunun $x^2 + 2$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$ dir.

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2)^2 - 3x^2 + 2$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunda x^2 yerine -2 yazılırsa,

$K = (-2)^2 - 3.(-2) + 2$

$K = 4 + 6 + 2 = 12$ bulunur.

Örnek:

$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x + 1$ polinomunun $x^2 - 2$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$ dir.

$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x + 1$

$P(x) = (x^2)^2 - 2.x.x^2 - x^2 - 3x + 1$ olduğuna göre

$P(x)$ polinomunda x^2 yerine 2 yazılırsa,

$K(x) = 2^2 - 2.x.2 - 2 - 3x + 1$

$K(x) = 4 - 4.x - 2 - 3x + 1$

$K(x) = -7.x + 3$ tür.

Örnek:

$P(x) = x^{18} - x^{15} - 3$ polinomunun $x^3 + 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$ dir.

$P(x)=x^{18}-x^{15}-3=\left(x^3\right)^6-\left(x^3\right)^5-3$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunda x^3 yerine -1 yazılırsa,

$K=(-1)^6-(-1)^5-3$

$K=1+1-3=-1$ bulunur.

Örnek:

$P(x)=2x^{12}+x^8-\sqrt{2}$ polinomunun $x^4-\sqrt{2}$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^4-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x^4=\sqrt{2}$ dir.

$P(x)=2x^{12}+x^8-\sqrt{2}=2.\left(x^4\right)^3+\left(x^4\right)^2-\sqrt{2}$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunda x^4 yerine $\sqrt{2}$ yazılırsa,

$K=2.\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}$

$K=4\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2$ bulunur.

B. Bir $P(x)$ Polinomunun $(x-a).(x-b)$ İle Bölümü

- $P(x)$ polinomu $(x-a).(x-b)$ çarpımı ile tam olarak bölünebiliyorsa $x-a$ ve $x-b$ çarpanları ile ayrı ayrı tam olarak bölünür.
- $x-a$ ve $x-b$ aralarında asal polinomlar olmak üzere; $P(x)$ polinomu bu polinomlara ayrı ayrı tam olarak bölünebiliyorsa bunların çarpımı olan $(x-a).(x-b)$ ile de tam olarak bölünebilir.

Örnek:

$P(x)=2x^3+mx^2+nx-5$ polinomu $(x+1).(x-1)$ ile tam bölünebildiğine göre m^2-n^2 farkını bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomu $(x+1).(x-1)$ çarpımı ile tam bölünebildiğine göre $x+1$ ve $x-1$ çarpanları ile ayrı ayrı tam olarak bölünür.

$P(x)$ polinomu $x+1$ ile tam bölünebildiğine göre $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ olup $P(-1)=0$ dır.

$P(x)$ polinomu $x-1$ ile tam bölünebildiğine göre $x-1=0 \Rightarrow x=1$ olup $P(1)=0$ dır olmalıdır.

Buna göre,

$P(-1)=2.(-1)^3+m.(-1)^2+n.(-1)-5=0$

$\Rightarrow m-n=3$ bulunur.

$P(1)=2.1^3+m.1^2+n.1-5=0$

$\Rightarrow m+n=7$ bulunur.

Bulunan bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak,

$(m+n).(m-n)=7.3$

$m^2-n^2=21$ elde edilir.

Örnek:

$P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan 8 ve $x+1$ ile bölümünden kalan -1 dir. Buna göre $P(x)$ polinomunun $(x-2).(x+1)$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ in $x-2$ ile bölümünden kalan 8 ise $P(2)=8$ dir.

$P(x)$ in $x+1$ ile bölümünden kalan -1 ise $P(-1)=-1$ dir.

$(x-2).(x+1)$ çarpımı ikinci dereceden bir polinomdur.

Kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük olacağına göre, $P(x)$ in $(x-2).(x+1)$ ile bölümünden kalan birinci dereceden bir polinomdur.

Kalan $K(x)=mx+n$ olsun. Buna göre,

$P(x)=(x-2).(x+1).B(x)+mx+n$ dir.

$x=2$ için $P(2)=8$ ise,

$P(2)=(2-2).(2+1).B(2)+m.2+n=8$

$\Rightarrow 0.3.B(2)+2.m+n=8$

$\Rightarrow 2.m+n=8$ bulunur.

$x=-1$ için $P(-1)=-1$ ise,

$P(-1)=(-1-2).(-1+1).B(-1)-1.m+n=-1$

$\Rightarrow -3.0.B(-1)-m+n=-1$

$\Rightarrow -m+n=-1$ bulunur.

Bulunan bu iki eşitlik birlikte çözülürse,

$$\left.\begin{array}{l} 2.m+n=8 \\ \\ -m+n=-1 \end{array}\right\} m=3, n=2$$ bulunur. O halde $P(x)$ polinomunun $(x-2).(x+1)$ ile bölümünden kalan,

$K(x)=mx+n=3x+2$ dir.

C. Bir $P(x)$ Polinomunun $(a.x+b)^2$ İle Bölümü

$P(x)$ polinomu $(a.x+b)^2$ ile bölünebiliyorsa, $P(x)$ polinomu ile türevi olan $P'(x)$ polinomu $ax+b$ ye tam olarak bölünürler. Yani $P(x)$ polinomu $(a.x+b)^2$ ile bölünebiliyorsa

$P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ ve $P'\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ dır.

Örnek:

$P(x)=mx^3+6x^2-n$ polinomu $(x+1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, m.n çarpımını bulalım.

Çözüm:

1.Yol:

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x^2=-2x-1$ dir.

x^2 nin eşiti $P(x)$ polinomunda yazılırsa kalan bulunur. Kalanın sıfıra eşitlenmesi ile sonuca gidilir. Çünkü $P(x)$ polinomu $(x+1)^2$ ile tam bölünmektedir.

$P(x)=mx^3+6x^2-n=m.x.x^2+6.x^2-n$ olduğu için,

$K(x)=0=m.x.(-2x-1)+6.(-2x-1)-n$

$0=-2mx^2-mx-12x-6-n$

$0=-2m.(-2x-1)-mx-12x-6-n$

$0=4mx+2m-mx-12x-6-n$

$0=(3m-12).x+(2m-n-6)$ dir.

Buna göre polinomların eşitliği tanımına göre,

$3m-12=0 \Rightarrow m=4$

$2m-n-6=0 \Rightarrow 8-n-6=0 \Rightarrow n=2$ bulunur.

O halde $m.n=4.2=8$ elde edilir.

2.Yol:

$P(x)=mx^3+6x^2-n$ polinomu $(x+1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre $P(-1)=0$ ve $P'(-1)=0$ dır.

$P(x)=mx^3+6x^2-n$ ise,

$P'(x) = 3mx^2 + 12x$ tir.

$0 = P(-1) = m.(-1)^3 + 6.(-1)^2 - n$

$0 = -m - n + 6 \Rightarrow m + n = 6$ elde edilir.

$0 = P'(-1) = 3m.(-1)^2 + 12.(-1)$

$0 = 3m - 12 \Rightarrow m = 4$ bulunur.

$m + n = 6 \Rightarrow n = 6 - 4 = 2$ bulunur. O halde,

$m.n = 4.2 = 8$ dir.

Örnek:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ polinomu $(x-2)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, b değerini bulalım.

Çözüm:

Bu soruyu yukarıdaki 2.yolun dışında başka bir yoldan çözelim. Bunun için $P(x)$ polinomunu

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ ile bölelim.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + ax + b & x^2 - 4x + 4 \\
\underline{-\; x^3 - 4x^2 + 4x} & x + 2 \\
2x^2 + (a-4)x + b & \\
\underline{-\; 2x^2 - 8x + 8} & \\
\underbrace{(a+4)}_{0}x + \underbrace{(b-8)}_{0} &
\end{array}
$$

Buna göre $a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$ ve $b - 8 = 0 \Rightarrow b = 8$ bulunur.

Sonuç

$P(x)$ polinomu $(a.x + b)^n$ ile tam bölünebiliyorsa,

$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0, P'\left(-\frac{b}{a}\right) = 0, P''\left(-\frac{b}{a}\right) = 0, ..., P^{(n-1)}\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

olur.

Örnek:

$P(x) = ax^4 + 12x^3 + bx^2 + cx$ polinomu $(2x+1)^3$ ile tam bölünebildiğine göre, a ile b arasındaki bağıntıyı bulalım.

Çözüm:

$P(x) = ax^4 + 12x^3 + bx^2 + cx$ ise,

$P'(x) = 4ax^3 + 36x^2 + 2bx + c$

$P''(-x) = 12ax^2 + 72x + 2b$ dir.

$P(x)$ polinomu $(2x+1)^3$ ile tam bölünebiliyorsa,

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $P'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $P''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ dır

$0 = P''\left(-\frac{1}{2}\right) = 12.a.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 72.\left(-\frac{1}{2}\right) + 2b$

$0 = 3a - 36 + 2b \Rightarrow 3a + 2b = 36$ elde edilir.

HORNER YÖNTEMİ İLE BÖLME

Horner yöntemi, bir $P(x)$ polinomunun $(x-a)$ ya da $(ax+b)$ biçimindeki birinci dereceden bir polinoma bölünmesindeki bölüm ve kalanı bulmada kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Horner yöntemi ile bölmede yapılacak işlemleri aşağıdaki örneğimizde olduğu gibi sıralayabiliriz.

Örnek:

$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulalım.

Çözüm:

Sorunun çözümünü Horner yöntemi ile yapalım.

a) Bölünen polinomun katsayıları x in azalan kuvvetlerine göre sıralanır.

b) $x-2=0 \Rightarrow x=2$, düşey çizginin soluna yazılır.

c) Bölünen polinomun baş katsayısı olan 3 olduğu gibi aşağı indirilir.

d) 2 ile 3 çarpılıp -5 in altına yazılarak toplanır

e) 2 ile 1 çarpılıp, 2 nin altına yazılarak toplanır.

Bu sıralanış şema ile aşağıda verilmiştir. İnceleyiniz.

$x-2=0$	3	-5	2	-3	-1
$x=2$ (2)		6	2	8	10
	3	1	4	5	9 Kalan

Bölümün Katsayıları

İşleme böyle devam edildiğinde en son elde edilen 9 sayısı, kalandır. Diğer sayılar da bölüm polinomunun kat sayılarıdır.

Buna göre $K = 9$ dur.

$Q(x)$ bölümünün katsayıları 3,1,4,5 tir.

$Q(x) = 3x^3 + x^2 + 4x + 5$ olur..

Örnek:

$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 22x - 15$ polinomunun $(x+2).(x-3)$ ile bölümünden elde edilen kalanı Horner yöntemi ile bulalım.

Çözüm:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ dir.

	2	-3	0	22	-15
-2		-4	14	-28	12
	2	-7	14	-6	$-3 = K_1$

Bölümü $x-3$ ile tekrar bölelim.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ dir.

	2	-7	14	-6
3		6	-3	33
	2	-1	11	$27 = K_2$

$P(x) = (x+2).(x-3).\left(2x^2 - x + 11\right) + 27.(x+2) - 3$

Tablodan bulunan bu değerleri $K(x) = (x-a).27 - 3$ ifadesinde yerine yazalım,

$K(x) = (x+2).27 - 3 = 27x + 51$ bulunur.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $P(x) = (a+b)x^2 + cx + b$ ve $Q(x+2) = 2x^2 - 3x + 5$ polinomları veriliyor. $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre a,b ve c nin değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$Q(x+2) = 2x^2 - 3x + 5$ eşitliğinde x yerine $x-2$ yazılırsa,

$Q(x-2+2) = 2.(x-2)^2 - 3.(x-2) + 5$

$Q(x) = 2.\left(x^2 - 4x + 4\right) - 3x + 6 + 5$

$Q(x) = 2x^2 - 8x + 8 - 3x + 6 + 5$

$Q(x) = 2x^2 - 11x + 19$ olur.

$P(x) = Q(x)$ olduğundan,

$a + b = 2$, $c = -11$ ve $b = 19$ dur.

Buradan

$a = -17$, $b = 19$, $c = -11$ bulunur.

2. $P(x) = ax^3 - (a+b)x^2 + cx + d$ ve $Q(x) = (x-2)^3$ polinomları veriliyor. $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre a,b ve c nin değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$Q(x) = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ olup $P(x) = Q(x)$ eşitliğinden,

$a = 1\ ,\ -(a+b) = -6 \Rightarrow b = 5\ ,\ c = 12\ ,\ d = -8$

bulunur.

3. $P(x) = ax^2 + 2ax + b\ ,\ Q(x) = 3x$ ve $D(x) = cx^3 + 10x^2 + 8x - 5$ polinomları veriliyor. $P(x).Q(x) = P(x) + Q(x) + D(x)$ olduğuna göre a,b ve c nin değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$P(x).Q(x) = 3ax^3 + 6ax^2 + 3bx$ ve

$P(x) + Q(x) + D(x) = cx^3 + (a+10)x^2 + (2a+11)x + b - 5$

ise $P(x).Q(x) = P(x) + Q(x) + D(x)$ olduğuna göre,

$3a = c\ ,\ 6a = a + 10\ ,\ 3b = 2a + 11\ ,\ 0 = b - 5$ olup, bu eşitliklerden

$a = 2\ ,\ b = 5\ ,\ c = 6$ bulunur.

4. $\dfrac{2x+1}{2x^2 - x - 1} . \dfrac{x^2 - 1}{x+3} = \dfrac{ax+b}{x+3}$ olduğuna göre a.b çarpımının değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{2x+1}{2x^2 - x - 1} . \frac{x^2 - 1}{x+3} = \frac{ax+b}{x+3}$$

$$\frac{2x+1}{(2x+1).(x-1)} . \frac{(x-1).(x+1)}{x+3} = \frac{ax+b}{x+3}$$

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{ax+b}{x+3} \Rightarrow ax + b = x + 1$$

$a = 1$ ve $b = 1$ bulunur.
a.b = 1.1 = 1 dir.

5. $\dfrac{2x+1}{x^3 + 2x} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{C}{x}$ olduğuna göre A,B ve C nin değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{2x+1}{x^3 + 2x} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x}$$

$$\frac{2x+1}{x.(x^2+2)} = \frac{Ax^2 + Bx + Cx^2 + 2C}{x.(x^2+2)}$$

$2x + 1 = (A + C)x^2 + Bx + 2C$

$A + C = 0\ ,\ B = 2\ ,\ 2C = 1$ olup, buradan

$A = -\dfrac{1}{2}\ ,\ B = 2\ ,\ C = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

6. $P(x) = ax^3 + 3x^3 + (b-4)x + 7$ ifadesi sabit polinom olduğuna göre b – a farkı kaçtır?

Çözüm:

$P(x) = ax^3 + 3x^3 + (b-4)x + 7$ polinomu sabit olduğuna göre x içeren terimlerin katsayıları sıfır olmalıdır.

Buna göre,

$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3\ ,\ b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$ bulunur.

$b - a = 4 - (-3) = 7$ elde edilir.

7. $P(x) = a^3x^2 - 27x^2 + b + 3$ ifadesi sıfır polinomu olduğuna göre a – b farkı kaçtır?

Çözüm:

Sıfır polinomunda bütün terimlerin katsayıları sıfırdır. O halde $P(x) = (a^3 - 27)x^2 + b + 3$ ifadesinin sıfır polinomunu belirtmesi için,

$a^3 - 27 = 0 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$

$b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$

$a - b = 3 - (-3) = 6$ bulunur.

8. $P(x) = x^2 + 2$, $Q(x) = x - 2$ olduğuna göre

$(x-1).P(x) - x^2.Q(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm:

$$(x-1).P(x) - x^2.Q(x) = (x-1).(x^2+2) - x^2.(x-2)$$

$$(x-1).P(x) - x^2.Q(x) = x^3 + 2x - x^2 - 2 - x^3 + 2x^2$$

$$(x-1).P(x) - x^2.Q(x) = x^2 + 2x - 2 \text{ bulunur.}$$

9. $\dfrac{a^9 + 2a^6 + 9}{a^3 + 3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{array}{l|l} a^9 + 2a^6 + 9 & a^3 + 3 \\ \underline{-\ a^9 + 3a^6} & a^6 - a^3 + 3 \\ \quad -a^6 + 9 & \\ \underline{-\ -a^6 - 3a^3} & \\ \quad 3a^3 + 9 & \\ \underline{-\ 3a^3 + 9} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Buna göre $\dfrac{a^9 + 2a^6 + 9}{a^3 + 3} = a^6 - a^3 + 3$ tür.

10. $\text{der}[P(x)] = 3$ ve $\text{der}[Q(x)] = 4$ olduğuna göre $P(x) = ax^3 + 3x^3 + (b-4)x + 7$ polinomunun $Q^2(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm polinomunun derecesi kaçtır?

Çözüm:

$P(x) = ax^3 + 3x^3 + (b-4)x + 7$ polinomunun $Q^2(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm polinomunun derecesi,

$$\text{der}\left[\frac{P^3(x)}{Q^2(x)}\right] = \text{der}\left[P^3(x)\right] - \text{der}\left[Q^2(x)\right]$$

$$\text{der}\left[\frac{P^3(x)}{Q^2(x)}\right] = 3.\text{der}[P(x)] - 2.\text{der}[Q(x)]$$

$$\text{der}\left[\frac{P^3(x)}{Q^2(x)}\right] = 3.3 - 2.4 = 9 - 8 = 1 \text{ dir.}$$

11. $\dfrac{x+7}{x^2 - x - 2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+1}$ olduğuna göre A – B farkı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{x+7}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{x+7}{x^2 - x - 2} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{x^2 - x - 2}$$

$$x + 7 = (A+B)x + A - 2B$$

$A + B = 1$, $A - 2B = 7$ olup bu iki eşitlikten,

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ A - 2B = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -A - B = -1 \\ A - 2B = 7 \end{array}\right\} -3B = 6 \Rightarrow B = -2 \ , \ A = 3 \text{ tür.}$$

$$A - B = 3 - (-2) = 5 \text{ elde edilir.}$$

12. $P(x) = (x^3 - x + 2)^2 + x^3 + x - 2$ polinomunun $x^3 - x + 1$ ile bölümündeki kalan polinomu bulunuz.

Çözüm:

$$x^3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - x = -1 \text{ ve}$$

$$x^3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = x - 1 \text{ dir.}$$

Bu değerleri $P(x)$ polinomunda yerine yazarsak,

$P(x)=(x^3-x+2)^2+x^3+x-2$ ise

$K(x)=(-1+2)^2+x-1+x-2=1+2x-3=2x-2$
bulunur.

13. $P(x+2)=x^3-2x^2-3x+a$ polinomu veriliyor. $P(x)$ in katsayılar toplamı 9 olduğuna göre, sabit terimi kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in katsayılar toplamı 9 ise $P(1)=9$ dur. $P(x+2)$ polinomundan $P(1)$ elde etmek için x yerine -1 yazılırsa,

$P(-1+2)=(-1)^3-2.(-1)^2-3.(-1)+a$

$P(1)=-1-2+3+a \Rightarrow a=9$ bulunur.

Buna göre,

$P(x+2)=x^3-2x^2-3x+9$ dur. $P(x)$ in sabit terimi $P(0)$ dır. $P(x+2)$ polinomundan $P(0)$ elde etmek için x yerine -2 yazılırsa,

$P(-2+2)=(-2)^3-2.(-2)^2-3.(-2)+9$

$P(0)=-8-8+6+9=-16+15=-1$ bulunur.

14. $P(x)=x^4-2x^2+3x+m$ polinomunun çarpanlarından biri $x+3$ olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in çarpanlarından biri $x+3$ ise $P(x)$ polinomu $x+3$ ile tam bölünür. Bu durumda $P(-3)=0$ dır.

$0=P(-3)=(-3)^4-2.(-3)^2+3.(-3)+m$

$0=81-2.9-9+m \Rightarrow m=-54$ bulunur.

15. $P(x)=mx^3-4x^2+3x-3m$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan 5 tir. Buna göre $P(x)$ in $x+2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x-2$ ile bölümünden kalan 5 ise $P(2)=5$ tir.

$5=P(2)=m.2^3-4.2^2+3.2-3m$

$5=8m-16+6-3m \Rightarrow 5m=15 \Rightarrow m=3$ tür. Buna göre,

$P(x)=3x^3-4x^2+3x-9$ olur.

$P(x)$ in $x+2$ ile bölümünden kalan,

$P(-2)=3.(-2)^3-4.(-2)^2+3.(-2)-9$

$P(-2)=-24-16-6-9=-55$ bulunur.

16. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x+3$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 5 ve 2 dir. Buna göre $P(x).Q(x)$ polinomunun $x+3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x+3$ ile bölümünden kalan 5 ise $P(-3)=5$ tir

$Q(x)$ in $x+3$ ile bölümünde kalan 2 ise $Q(-3)=2$ dir

$P(x).Q(x)$ polinomunun $x+3$ ile bölümünden kalan,

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ değeri yerine yazılırsa,

$P(-3).Q(-3)=5.2=10$ bulunur.

17. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x+3$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla -5 ve 3 tür. $x.P(x)+(k+1).Q(x)$ polinomu $x+3$ ile tam bölünebildiğine göre k kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x+3$ ile bölümünden kalan -5 ise $P(-3)=5$

$Q(x)$ in $x+3$ ile bölümünde kalan 3 ise $Q(-3)=3$ tür.

$x.P(x)+(k+1).Q(x)$ polinomu $x+3$ ile tam bölünebildiğine göre,

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ değeri yerine yazılırsa,

$-3.P(-3)+(k+1).Q(-3)=0$ dır. Buna göre,

$0=-3.P(-3)+(k+1).Q(-3)=-3.(-5)+(k+1).3$

$0=15+3.(k+1) \Rightarrow 3.(k+1)=-15$

$\Rightarrow k+1=-5 \Rightarrow k=-6$ dır.

18. $P(x)$ in sabit terimi 3, katsayılar toplamı -4 tür. Buna göre $P(2-x)+P\left(\frac{x}{2}\right)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in sabit terimi 3 ise $P(0)=3$ tür.

$P(x)$ in katsayılar toplamı -4 ise $P(1)=-4$ tür.

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ olduğu için,

$P(2-x)+P\left(\frac{x}{2}\right)$ in $x-2$ ile bölümünden kalan,

$P(2-2)+P\left(\frac{2}{2}\right)=P(0)+P(1)=3+(-4)=-1$ olur.

19. $P(x)$ in $(x-4)^2$ ile bölümünden kalan $5x-7$ olduğuna göre $P(x)$ in $x-4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $(x-4)^2$ ile bölümünde; bölüm $B(x)$ ve kalan

$5x-7$ olduğuna göre, $P(x)=(x-4)^2.B(x)+5x-7$ dir.
$P(x)$ in $x-4$ ile bölümünden kalan $P(4)$ tür. Buna göre,

$P(4)=(4-4)^2.B(4)+5.4-7=0+20-7=13$ bulunur.

20. $P(2x+1)=(x^2-2)Q(3x-2)-4x+7$ eşitliği verilmiştir. $P(x)$ in $x-5$ ile bölümünden kalan 21 olduğuna göre $Q(x)$ in $x-4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x-5$ ile bölümünde kalan 21 ise $P(5)=21$ dir

$Q(x)$ in $x-4$ ile bölümünde kalan $Q(4)$ tür.

$P(2x+1)=(x^2-2)Q(3x-2)-4x+7$ eşitliğinde $P(5)$ elde etmek için x yerine 2 yazılırsa,

$P(2.2+1)=(2^2-2)Q(3.2-2)-4.2+7$

$P(5)=2.Q(4)-8+7 \Rightarrow 21=2.Q(4)-1$

$2.Q(4)=22 \Rightarrow Q(4)=11$ bulunur.

21. $P(x)$ in sabit terimi 2, katsayılar toplamı 5 tir. Buna göre $P(x)$ in x^2-x ile bölümündeki kalanı bulunuz.

Çözüm:

$P(x)$ in sabit terimi 2 ise $P(0)=2$ tür.

$P(x)$ in katsayılar toplamı 5 ise $P(1)=5$ tir.

x^2-x polinomu ikinci dereceden olduğu için $P(x)$ in x^2-x ile bölümündeki kalan birinci derecedendir.

$P(x)$ in $x^2 - x$ ile bölümündeki kalan $mx + n$ olsun.

Buna göre $P(x) = (x^2 - x).B(x) + mx + n$ dir.

Bu eşitlikte x yerine önce 1, sonra 0 yazılırsa,

$5 = P(1) = (1^2 - 1).B(1) + m.1 + n \Rightarrow m + n = 5$ bulunur.

$2 = P(0) = (0^2 - 0).B(0) + m.0 + n \Rightarrow n = 2$ bulunur.

$m + n = 5 \Rightarrow m = 3$ tür.

$P(x)$ in $x^2 - x$ ile bölümündeki kalan

$mx + n = 3x + 2$ dir.

22. $P(x) = 2x^{24} - 3x^{12} - 5$ polinomunun $x^6 - \sqrt{2}$ ile bölümündeki kalanı bulunuz.

Çözüm:

$P(x) = 2x^{24} - 3x^{12} - 5 = 2.(x^6)^4 - 3.(x^6)^2 - 5$

polinomunda, $x^6 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x^6 = \sqrt{2}$ yazılırsa

$K(x) = 2.(\sqrt{2})^4 - 3.(\sqrt{2})^2 - 5$

$= 2.4 - 3.2 - 5 = 8 - 6 - 5 = -3$ elde edilir.

23. $P(x) + P(x+2) = 2x^2 + 2x + 4$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm:

Verilenlere göre $P(x)$ ikinci dereceden bir polinomdur.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$P(x+2) = a.(x+2)^2 + b.(x+2) + c$

$P(x+2) = a.x^2 + 4ax + 4a + bx + 2b + c$

$P(x+2) = a.x^2 + (4a + b)x + 4a + 2b + c$

$P(x) + P(x+2) = 2x^2 + 2x + 4$ olduğuna göre,

$2ax^2 + (4a + 2b).x + 4a + 2b + 2c = 2x^2 + 2x + 4$ olup,

$2a = 2$, $4a + 2b = 2$, $4a + 2b + 2c = 4$ eşitliklerinden

$a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ bulunur. O halde,

$P(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - x + 1$ dir.

24. $P(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + ax$ polinomu $x^2 + 1$ ile kalansız bölünebildiğine göre a kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun $x^2 + 1$ ile kalansız bölünebilmesi için x^2 yerine -1 yazıldığında kalan 0 olmalıdır. Buna göre,

$P(x) = (x^2)^2 + \frac{1}{2}x^2.x + x^2 + ax$ ise,

$0 = K(x) = (-1)^2 + \frac{1}{2}(-1).x + (-1) + ax$

$0 = 1 - \frac{1}{2}.x + -1 + ax \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right).x = 0$

$a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ bulunur.

25. $P(x) = mx^4 + (2n - 1)x^3 + (m + 1)x - n$ polinomunun $x^3 + 2$ ile bölümünden kalan $-x + 7$ olduğuna göre $m + n$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -2$ olduğu için, $P(x)$ polinomunda x^3 yerine -2 yazılırsa kalan bulunur.

$P(x)=mx^3.x+(2n-1)x^3+(m+1)x-n$ olduğu için,

$-x+7=K(x)=m.(-2).x+(2n-1).(-2)+(m+1)x-n$

$-x+7=-2mx+-4n+2+mx+x-n$

$-x+7=-mx+-5n+2+x$

$-x+7=-(m-1)x+-5n+2$ ise,

$m-1=1\Rightarrow m=2$ ve $-5n+2=7\Rightarrow n=-1$ dir.

$m+n=2+(-1)=1$ bulunur.

26. $P(x)=\left(x^2-x+2\right)^3$ ve $Q(x)=x^4+2x-5$ olduğuna göre $P\left(x^2\right)$ polinomunun $x^2.Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm polinomunun derecesi kaçtır?

Çözüm:

$R(x)=x^2-x+2$ olsun. $der[R(x)]=2$ dir. Buna göre,

$P(x)=[R(x)]^3\Rightarrow der[P(x)]=der\left[R^3(x)\right]=3.2=6$ dır.

$der\left[P\left(x^2\right)\right]=2.der[P(x)]=2.6=12$ dir.

$der\left[x^2.Q(x)\right]=der\left(x^2\right)+der[Q(x)]=2+4=6$ dır.

Buna göre, $P\left(x^2\right)$ polinomunun $x^2.Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm polinomunun derecesi,

$$der\left[\frac{P\left(x^2\right)}{x^2.Q(x)}\right]=der\left[P\left(x^2\right)\right]-der\left[x^2.Q(x)\right]=12-6=6 \text{ dır.}$$

27. $\dfrac{a^4-2a^3-4a-4}{a^2+2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{array}{l|l}
a^4-2a^3-4a-4 & a^2+2 \\ \cline{2-2}
a^4+2a^2 & a^2-2a-2 \\ \cline{1-1}
-2a^3-2a^2-4a-4 & \\
-2a^3-4a & \\ \cline{1-1}
-2a^2-4 & \\
-2a^2-4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Buna göre $\dfrac{a^4-2a^3-4a-4}{a^2+2}=a^2-2a-2$ dır.

28. $P(x)$ in katsayılar toplamı 5, $Q(x)$ in sabit terimi -2 dir. Buna göre $3.P(x-1)+2.Q(x-2)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in katsayılar toplamı 5 ise $P(1)=5$ tir.

$Q(x)$ in sabit terimi -2 ise $Q(0)=-2$ dir.

$3.P(x-1)+2.Q(x-2)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalanı bulmak için x yerine 2 yazılırsa,

$K=3.P(2-1)+2.Q(2-2)=3.P(1)+2.Q(0)$

$K=3.5+2.(-2)=15-4=11$ bulunur.

29. $Q(x+2)=2x^4-3x+7$ polinomu veriliyor. $Q(x)$ in katsayılar toplamı A, $x-3$ ile bölümünden kalan B olduğuna göre, A – B kaçtır?

Çözüm:

$Q(x)$ in katsayılar toplamı A ise $Q(1)=A$ dır. $Q(x+2)$ den $Q(1)$ elde etmek için x yerine -1 yazılır,

$Q(-1+2)=2.(-1)^4-3.(-1)+7=2.1+3+7$

$A=Q(1)=12\Rightarrow A=12$ bulunur.

$Q(x)$ in $x-3$ ile bölümünde kalan B ise $Q(3)=B$ dir.

$Q(x+2)$ den $Q(3)$ elde etmek için x yerine 1 yazılır,

$Q(1+2)=2.1^4-3.1+7=2.1-3+7=6$

$B=Q(3)=6 \Rightarrow B=6$ bulunur.

$A-B=12-6=6$ elde edilir.

30. $P(x)$ in $x-1$ ile bölümünden kalan -3 olduğuna göre $P^2(x)$ in $x-1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x-1$ ile bölümünde kalan -3 ise $P(1)=-3$ tür.

$P^2(x)$ in $x-1$ ile bölümünde kalan $P^2(1)$ dir.

Buna göre, $P(1)=-3$ ise,

$P^2(1)=[P(1)]^2=(-3)^2=9$ olur.

31. $P(x)=x^3+6x^2+12x+8$ polinomunun $x+2-\sqrt{2}$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$x+2-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}-2$ dir. Buna göre $P(x)$ in $x+2-\sqrt{2}$ ile bölümünden kalan $P(\sqrt{2}-2)$ dir.

$P(x)=x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$ olduğuna göre,

$P(\sqrt{2}-2)=(\sqrt{2}-2+2)^3=\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}$ dir.

32. $P(x)=(x^3-3x^2+2x-4)Q(x)+2x-3$ bağıntısı veriliyor. $P(x)$ in $x-2$ ile bölümünde kalan 13 ise, $Q(x)$ in $x-2$ ile bölümünde kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x-2$ ile bölümünde kalan 13 ise $P(2)=13$ tür

$Q(x)$ in $x-2$ ile bölümünde kalan $Q(2)$ dir.

Verilen bağıntıda x yerine 2 yazılarak,

$P(2)=(2^3-3.2^2+2.2-4)Q(2)+2.2-3$

$13=(8-12+4-4).Q(2)+4-3$

$13=-4.Q(2)+1 \Rightarrow Q(2)=-3$ tür.

33. $\dfrac{P(x+3)}{Q(x-1)}=2x^2-x-5$ bağıntısı veriliyor. $Q(x)$ in $x-2$ ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre $P(6)$ kaçtır?

Çözüm:

$Q(x)$ in $x-2$ ile bölümünden kalan 2 ise $Q(2)=2$ dir

$Q(x-1)$ den $Q(2)$ elde etmek için $\dfrac{P(x+3)}{Q(x-1)}$ bağıntısında x yerine 3 yazılırsa,

$\dfrac{P(3+3)}{Q(3-1)}=2.3^2-3-5 \Rightarrow \dfrac{P(6)}{2}=10 \Rightarrow P(6)=20$ bulunur.

34. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x+2$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 3 ve -4 tür. $(x^2+1)P(x)+x.t.Q(x)$ polinomu $x+2$ ile tam bölünebildiğine göre t kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x+2$ ile bölümünde kalan 3 ise $P(-2)=3$ tür.

$Q(x)$ in $x+2$ ile bölümünden kalan -4 ise $Q(-2)=-4$

$(x^2+1)P(x)+x.t.Q(x)$ polinomu $x+2$ ile tam bölünebildiğine göre,

$\left((-2)^2+1\right).P(-2)-2.t.Q(-2)=0$ dır. Buradan,

$(4+1).3-2.t.(-4)=0 \Rightarrow 15+8t=0 \Rightarrow t=-\dfrac{15}{8}$ bulunur.

35. $P(x)=3x^{28}-2x^{14}+4x^7-7$ polinomunun x^7+2 ile bölümünde kalan kaçtır?

Çözüm:

$x^7+2=0 \Rightarrow x^7=-2$ olduğu için

$P(x)=3x^{28}-2x^{14}+4x^7-7$

$=3.\left(x^7\right)^4-2.\left(x^7\right)^2+4x^7-7$

polinomunun x^7+2 ile bölümünde kalanı bulmak için x^7 yerine -2 yazılırsa,

$K=3.(-2)^4-2.(-2)^2+4.(-2)-7$

$K=3.16-2.4-8-7=48-8-8-7=25$ bulunur.

36. $P(x)=2x^9-x^6+nx^3-7$ polinomunun çarpanlarından biri x^3-2 olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in çarpanlarından biri x^3-2 ise, $P(x)$ polinomu x^3-2 ile tam bölünür. Yani $P(x)$ polinomu x^3-2 ile böldüğünde kalan sıfırdır. Buna göre,

$x^3-2=0 \Rightarrow x^3=2$ değerini

$P(x)=2\left(x^3\right)^3-\left(x^3\right)^2+nx^3-7$ polinomunda yazarsak,

$0=K=2.2^3-2^2+n.2-7 \Rightarrow 16-4+2n-7=0$

$2n+5=0 \Rightarrow n=-\dfrac{5}{2}$ bulunur.

37. Bir $P(x)$ polinomunun $(x+3)^3$ ile bölümünden kalan x^2+2x+2 olduğuna göre, $P(x)$ in $x+3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun $(x+3)^3$ ile bölünmesiyle elde edilen bölüm $B(x)$ ve kalan x^2+2x+2 olsun.

Buna göre,

$P(x)=(x+3)^3.B(x)+x^2+2x+2$ olur. Bu eşitlikte x yerine -3 yazılırsa,

$P(-3)=(-3+3)^3.B(-3)+(-3)^2+2.(-3)+2$

$P(-3)=0+9-6+2=5$ bulunur.

38. $P(x)$ polinomunun $x^2-2x-15$ ile bölümünden kalan $3x+2$ dir. Buna göre $P(x)$ in $x+3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x^2-2x-15$ ile bölümünden kalan $3x+2$ olduğu için,

$P(x)=\left(x^2-2x-15\right)B(x)+3x+2$

$P(x)=(x-5).(x+3).B(x)+3x+2$ dir.

$P(x)$ in $x+3$ ile bölümünden kalan,

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ yazılırsa,

$P(-3)=(-3-5).(-3+3).B(-3)+3.(-3)+2$

$P(-3)=0-9+2=-7$ bulunur.

39. $P(x-2)+P(x+1)=2x^2-4x+10$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm:

Verilenlere göre $P(x) = ax^2 + bx + c$ tipinde ikinci dereceden bir polinomdur.
Buna göre,

$$P(x-2) = a.(x-2)^2 + b.(x-2) + c$$

$$P(x-2) = a.x^2 + (-4a+b)x + 4a - 2b + c \text{ dir.}$$

$$P(x+1) = a.(x+1)^2 + b.(x+1) + c$$

$$P(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c \text{ dir.}$$

$P(x-2) + P(x+1) = 2x^2 - 4x + 10$ olduğuna göre,

$2ax^2 + (-2a+2b)x + 5a - b + 2c = 2x^2 - 4x + 10$ olup,

$2a = 2$, $-2a + 2b = -4$, $5a - b + 2c = +10$

eşitliklerinden

$a = 1$, $b = -1$ ve $c = 2$ bulunur. Buna göre,

$$P(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - x + 2 \text{ dir.}$$

40. $P(x)$ in $x-3$ ile bölümünden kalan 4, $x-1$ ile bölümünden kalan -2 olduğuna göre $P(x)$ in $(x-3).(x-1)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x)$ in $x-3$ ile bölümünden kalan 4 ise $P(3) = 4$ tür.

$P(x)$ in $x-1$ ile bölümünden kalan -2 ise $P(1) = -2$ di

$(x-3).(x-1)$ polinomu ikinci derecedendir. Bölen ikinci dereceden olduğu için kalanın derecesi en çok 1 dir. $P(x)$ in $(x-3).(x-1)$ ile bölümünden kalan $mx + n$ olsun.

Buna göre,

$$P(x) = (x-3).(x-1).B(x) + mx + n \text{ dir.}$$

$x = 1$ için $P(1) = (1-3).(1-1).B(1) + m.1 + n$

$$-2 = -2.0.B(1) + m + n \Rightarrow m + n = -2 \text{ dir.}$$

$x = 3$ için $P(3) = (3-3).(3-1).B(3) + m.3 + n$

$$4 = 0.2.B(3) + 3m + n \Rightarrow 3m + n = 4 \text{ dir.}$$

Bulunan bu iki eşitlik birlikte çözülürse,

$\left.\begin{array}{l} 3m + n = 4 \\ m + n = -2 \end{array}\right\}$ $m = 3$, $n = -5$ bulunur. O halde $P(x)$ in

$(x-3).(x-1)$ ile bölümünden kalan,

$mx + n = 3x - 5$ tir.

41. $P(x) = ax + b$ polinomu veriliyor.

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 11x + 28} \cdot \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 9} = \frac{x+2}{x+3}$$ olduğuna göre $P(x)$ in $x-1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ olduğu için $P(x) = ax + b$ in $x-1$ ile bölümünden kalan $P(1) = a.1 + b = a + b$ dir. Verilen diğer eşitlikte x yerine 1 yazılırsa,

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 11x + 28} \cdot \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 9} = \frac{x+2}{x+3}$$ ise,

$$\frac{1^2 + a.1 + b}{1^2 + 11.1 + 28} \cdot \frac{1^2 + 4.1 - 21}{1^2 - 9} = \frac{1+2}{1+3}$$

$$\frac{1 + a + b}{40} \cdot \frac{-16}{-8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a + b + 1}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a + b + 1}{20} = \frac{15}{20} \Rightarrow a + b + 1 = 15 \Rightarrow a + b = 14 \text{ bulunur.}$$

$P(x) = ax + b$ in $x-1$ ile bölümünden kalan

$$P(1) = a.1 + b = a + b = 14 \text{ tür.}$$

42. $P(x+1)$ polinomunun katsayılar toplamı 4 ve $P(x-1)+x^2.P(x+1)=x^3+3x^2+x+1$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

Çözüm:

$P(x+1)$ polinomunun katsayılar toplamı 4 ise,

$P(1+1)=P(2)=4$ tür.

$P(x)$ polinomunun sabit terimi $P(0)$ dır.

$P(x-1)+x^2.P(x+1)=x^3+3x^2+x+1$ bağıntısında x yerine 1 yazılırsa,

$P(1-1)+1^2.P(1+1)=1^3+3.1^2+1+1$

$P(0)+P(2)=1+3+1+1 \Rightarrow P(0)+4=6 \Rightarrow P(0)=2$ dir.

$P(x)$ polinomunun sabit terimi $P(0)=2$ dir.

43. $x^3+ax-27=(x-3).P(x)$ bağıntısı veriliyor. $P(3)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

Verilen eşitlikte x yerine 3 yazılırsa,

$3^3+a.3-27=(3-3).P(3) \Rightarrow 27+3a-27=0 \Rightarrow a=0$ dır.

Buna göre,

$x^3+ax-27=(x-3).P(x) \Rightarrow x^3-27=(x-3).P(x)$

$P(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}=x^2+3x+9$ bulunur.

$P(x)=x^2+3x+9 \Rightarrow P(3)=3^2+3.3+9=27$ dir.

44. $P(x+1)=x^2-2x+3$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$ işleminin sonucu $P(x)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamını verir.

$\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$ işleminin sonucu $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamını verir.

Buna göre, $P(x+1)=x^2-2x+3$ polinomunda x yerine önce 0, sonra -2 yazılarak,

$P(0+1)=0^2-2.0+3 \Rightarrow P(1)=3$ ve

$P(-2+1)=(-2)^2-2.(-2)+3 \Rightarrow P(-1)=11$ bulunur.

Bu durumda $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı,

$\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}=\dfrac{3+11}{2}=\dfrac{14}{2}=7$ dir.

KONU BİTMİŞTİR.