

MODÜLER ARİTMETİK

Bir doğal sayının 3 ile bölünmesinden elde edilen kalanlar kümesi $\{0,1,2\}$ dir.

4 ile bölünmesinden elde edilen kalanlar kümesi $\{0,1,2,3\}$ tür.

Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $\beta = \{(x,y) : x,y \in Z \text{ ve } x - y \text{ 4 ile bölünür.}\}$ bağıntısı denklik bağıntısıdır.

Bir x tam sayısı 4 ile bölündüğünde kalan 0,1,2,3 sayılarından biri olur.

Buna göre Z tam sayılar kümesi 4 modülüne göre $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ kalan sınıflarına ayrılır. Z tam sayılar kümesinde 4 modülüne göre kalan sınıflar;

$$\bar{0} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots\},$$

$$\bar{1} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \dots\},$$

$$\bar{2} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \dots\},$$

$$\bar{3} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \dots\} \text{ şeklinde olur.}$$

4 modülüne göre kalan sınıfların kümesi $Z/4$ ile gösterilir.

$$Z/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \text{ tür.}$$

Bu sınıfların her birinde bulunan elemanların 4 ile bölünmesinden elde edilen kalan, o elemanın bulunduğu sınıfı verir.

Örneğin 10 un 4 ile bölümünden kalan 2 olduğundan, $10 \in \bar{2}$ olarak yazılır.

Yine 18 in 4 ile bölümünden kalan 2 olduğundan $18 \in \bar{2}$ dir.

Ayrıca aynı sınıfta bulunan iki elemanın denk olduğunu biliyoruz. Bu durumda 4 ün kalan sınıflarına göre 10 sayısı 18 e denktir.

Bunu $10 \equiv 18 \pmod{4}$ biçiminde yazar ve "4 modülüne göre 10, 18'e denktir" diye okuruz.

Sonuç

m pozitif tam sayısı için Z tam sayılar kümesi m modülüne göre $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{m-1}$ olmak üzere m tane kalan sınıfına

m modülüne göre kalan sınıfların kümesi;

$$Z/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{m-1}\} \text{ olur.}$$

a ile b aynı kalan sınıfına ait ise bu durum $a \equiv b \pmod{m}$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

25 in 7 ile bölümünden kalan 4 olduğu için

$$25 \equiv 4 \pmod{7} \text{ dir.}$$

523 ün 10 ile bölümünde kalan 3 olduğu için

$$523 \equiv 3 \pmod{10} \text{ dur.}$$

1242 nin 4 ile bölümünde kalan 2 olduğundan

$$1242 \equiv 2 \pmod{4} \text{ tür.}$$

63 ün 9 ile bölümünde kalan 0 olduğu için

$$63 \equiv 0 \pmod{9} \text{ dur.}$$

38 in 9 ile bölümünde kalan 2 olduğu için

$$38 \equiv 2 \pmod{9} \text{ dur.}$$

Örnek:

23 sayısı, 8 sayısı, 18 sayısı ve 13 sayısının 5 ile bölümünde kalanlar eşit olduğundan

$$28 \equiv 8 \equiv 18 \equiv 13 \equiv 3 \pmod{5} \text{ tir}$$

Örnek:

18 ve 27 sayısının 9 ile bölümünde kalan 0 dir. Buna göre,

$$18 \equiv 27 \equiv 0 \pmod{9} \text{ dur.}$$

Örnek:

56 nın 5 ile bölümünde kalan 1 olduğu için

$$56 \equiv 1 \pmod{5} \text{ tir.}$$

Sonuç

$A \equiv B \pmod{m}$ ve $B \equiv C \pmod{m}$ ise $A \equiv C \pmod{m}$ ve $C \equiv A \pmod{m}$ dir.

Örnek:

28 ve 35 sayılarının 7 ile bölümünde kalan 0 dir. Buna göre,
 $28 \equiv 35 \pmod{7}$ ve $35 \equiv 28 \pmod{7}$ dir.

Uyarı

$A \equiv D \pmod{m}$ ise A ve D nin m ile bölümünden kalanlar eşittir.

Örnek:

$34 \equiv 40 \pmod{6}$ olduğundan 34 ve 40 sayılarının 6vile bölümünden kalanlar eşittir.

Kural

$A \equiv B \pmod{m}$ ve $C \equiv D \pmod{m}$ ise olsun.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1. $A + C \equiv B + D \pmod{m}$ dir. Yani m modülüne göre yazılmış iki denklik taraf tarafa toplanabilir.
2. $A - C \equiv B - D \pmod{m}$ dir. Yani m modülüne göre yazılmış iki denklik taraf tarafa çıkarılabilir.
3. $A.C \equiv B.D \pmod{m}$ dir. Yani m modülüne göre yazılmış iki denklik taraf tarafa çarpılabilir.
4. k bir sabit sayı olmak üzere $k.A \equiv k.B \pmod{m}$ dir. Yani m modülüne göre yazılmış bir denkleğin her iki tarafı aynı sayı ile çarpılabilir.
5. $A^n \equiv B^n \pmod{m}$ dir. Yani m modülüne göre yazılmış bir denkleğin her iki tarafının aynı kuvveti alınabilir.

Örnek:

$18 \equiv 4 \pmod{7}$ ve $26 \equiv 5 \pmod{7}$ dir. Buna göre,

a) $18 + 26 \equiv 4 + 5 \pmod{7} \Rightarrow 44 \equiv 9 \pmod{7}$
 $\Rightarrow 2 \equiv 2 \pmod{7}$ elde edilir.

b) $18.26 \equiv 4.5 \pmod{7} \Rightarrow 468 \equiv 20 \pmod{7}$
 $\Rightarrow 6 \equiv 6 \pmod{7}$ elde edilir.

c) $18^2 \equiv 4^2 \pmod{7} \Rightarrow 324 \equiv 16 \pmod{7}$
 $\Rightarrow 2 \equiv 2 \pmod{7}$ elde edilir.

Örnek:

$6^{2008} \equiv x \pmod{5}$ ise x kaçtır?

Çözüm:

$6 \equiv 1 \pmod{5}$ olduğundan,

$$6^{2008} \equiv 1^{2008} \pmod{5} \Rightarrow 6^{2008} \equiv 1 \pmod{5}$$

olacağından $x = 1$ bulunur.

Kural

k, tam sayı olmak üzere $x \equiv y \pmod{m}$ ise $x = y + m.k$ dir.

Örnek:

$3x \equiv x \pmod{7}$ ise x in alabileceği en küçük üç farklı doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$$3x \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 3x = x + 7k \Rightarrow 2x = 7k \text{ elde edilir.}$$

$$k = 0 \text{ ise } 2x = 7.0 \Rightarrow x = 0 \text{ dir.}$$

$$k = 2 \text{ ise } 2x = 7.2 \Rightarrow x = 7 \text{ dir.}$$

$$k = 4 \text{ ise } 2x = 7.4 \Rightarrow x = 14 \text{ tür.}$$

Örnek:

$9293 - 6^8$ sayısının 5 ile bölümünde kalan kaçtır?

Çözüm:

$9293 \equiv 3 \pmod{5}$ dir.

$$6 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6^8 \equiv 1^8 \pmod{5} \Rightarrow 6^8 \equiv 1 \pmod{5} \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$9293 - 6^8 \equiv 3 - 1 \pmod{5} \Rightarrow 9293 - 6^8 \equiv 2 \pmod{5} \text{ olur.}$$

Örnek:

$6^8 - 10^8$ sayısının 9 ile bölümünde kalan kaçtır?

Çözüm:

$$6^2 = 36 \text{ sayısının 9 ile bölümünden kalan } 0 \text{ dir.}$$

Bu durumda $6^2 = 36$ dur.

Buradan

$$(6^2)^9 \equiv 0^9 \pmod{9} \Rightarrow 6^{18} \equiv 0 \pmod{9} \text{ bulunur.}$$

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 10^8 \equiv 1^8 \pmod{9} \Rightarrow 10^8 \equiv 1 \pmod{9}$$

olacağından;

$$6^8 - 10^8 \equiv 0 - 1 \pmod{9} \Rightarrow 6^8 - 10^8 \equiv -1 \pmod{9}$$

$$6^8 - 10^8 \equiv -1 + 9 \pmod{9} \Rightarrow 6^8 - 10^8 \equiv 8 \pmod{9}$$

bulunmuş olur.

Örnek:

2^{57} sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$2^{57} \equiv 2^{4 \cdot 14 + 1} \pmod{5} \equiv (2^4)^{14} \cdot 2^1 \pmod{5}$$

$$\equiv 1^{14} \cdot 2 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5} \text{ bulunmuş olur.}$$

Kısaca 2 nin 4. kuvveti 1 olduğuna göre 4 ün katı olan kuvvetleri de 1 dir. Bunun için üssün 4 ile bölümünden kalan bulunur. Buradan sonuca gidilir.

Örnek:

3^{34} sayısının birler basamağındaki rakamı bulalım.

Çözüm:

Bir sayının birler basamağındaki rakam 10 ile bölümündeki kalana eşittir.

Buna göre 3^{34} sayısının birler basamağındaki rakamı 10 ile bölümündeki kalan verir.

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$3^{34} \equiv 3^{4 \cdot 8 + 2} \pmod{10} \equiv (3^4)^8 \cdot 3^2 \pmod{10}$$

$$\equiv 1^8 \cdot 9 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10} \text{ bulunmuş olur.}$$

Örnek:

6^{75} sayısının 8 ile bölümündeki kalan kaçtır?

Çözüm:

$$6^1 \equiv 6 \pmod{8}$$

$$6^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$6^3 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$6^4 \equiv 0 \pmod{8}$$

...

$$6^{75} \equiv 0 \pmod{8} \text{ bulunmuş olur.}$$

Örnek:

$2002^{2005} \equiv x \pmod{10}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$$2002^1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$2002^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2002^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2002^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2002^5 \equiv 2 \pmod{10}$$

2002^5 in 10 ile bölümünden kalan 2002^1 in 10 ile bölümündeki kalan ile aynıdır. Buna göre 2005 in 4 ile bölümünden kalan 1 olduğu için,

$$2002^{2005} \equiv 2002^1 \pmod{10}$$

$$2002^{2005} \equiv 2 \pmod{10} \text{ bulunur.}$$

Kural

x, m'nin tam katı olmayan pozitif bir tam sayı ve m asal sayı ise $x^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ dir.

Örnek:

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ tir.}$$

Burada 5 asal sayı ve 2 sayısı 5 in katı değildir.

Örnek:

$3^{2008} \equiv x \pmod{5}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

3 sayısı 5 in katı olmayıp 5 asal sayı olduğundan

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ yazılabilir.}$$

$$3^{2008} \equiv (3^4)^{504} \pmod{5} \Rightarrow 3^{2008} \equiv 1^{504} \pmod{5}$$

$$3^{2008} \equiv 1 \pmod{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Son verdiğimiz kuraldan hareketle, 5^6 nın 7 ile bölümünden kalanın 1 olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre,

$$5^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ dir.}$$

Örnek:

$4^x \equiv 1 \pmod{5}$ olduğuna göre, x pozitif tam sayısının alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm:

$$4^1 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$4^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

olduğuna göre, $4^x \equiv 1 \pmod{5}$ ifadesini doğrulayan en küçük pozitif tam sayı 2 dir.

Uyarı

x , m 'nin tam katı olmayan pozitif bir tam sayı ve m asal sayı ise, $x^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ dir.

Ancak x in $m-1$ den küçük kuvvetleri için de denklik 1'e eşit olabilir. Örneğin $4^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ve $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$ olur.

Örnek:

$3^{2008} \equiv x \pmod{5}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

3 sayısı 5 in katı olmayıp 5 asal sayı olduğundan

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ yazılabilir.}$$

Buna göre 3^{2008} in kuvveti olan 2008 in 4 ile bölümünden kalan 0 olduğu için

$$3^{2008} \equiv 3^0 \pmod{5} \Rightarrow 3^{2008} \equiv 1 \pmod{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

3^{134} sayısının 7 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm:

Son verdiğimiz kural gereği,

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ dir.}$$

Buna göre 3^{134} sayısının kuvveti olan 134 sayısının 6 ile bölümünden kalan 2 olduğu için,

$$3^{134} \equiv 3^2 \pmod{7} \Rightarrow 3^{134} \equiv 2 \pmod{7} \text{ olur.}$$

Örnek:

$6^{75} \equiv a \pmod{8}$ olduğuna göre, a nın alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm:

$$6^1 \equiv 6 \pmod{8}$$

$$6^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$6^3 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$6^{75} \equiv (6^3)^{25} \pmod{8} \Rightarrow 6^{75} \equiv 0^{25} \pmod{8}$$

$$6^{75} \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow a = 0 \text{ bulunmuş olur.}$$

Takvim ve Saat Problemleri

Akrep ve yelkovanı olan bir saat şu anda 10 u gösteriyor. Bu saat 8 saat sonra kaç gösterir?

Problemini çözelim:

$10+8=18$ dir. Saatin üzerinde 18 sayısı yoktur.

Saat üzerinde 10 dan itibaren 8 birim sayarsak; 11,12,1,2,3,4,5,6 üzerine geliriz. Yani öğleden sonra saat 6 yi gösterir.

Bu toplama, tam sayılarda yaptığımızdan farklı bir toplamadır.

$$10 + 8 \equiv 18 \pmod{12} \Rightarrow 18 \equiv 6 \pmod{12} \text{ olur.}$$

Örnek:

Akrep ve yelkovanı olan bir saat şu anda 10'u gösteriyor.45 saat sonra kaç gösterir?

Çözüm:

$10+45=55$ tir. Fakat saat üzerinde 55 yoktur.

Her 12 saatte bir saat tekrar 10 olacağından 55 sayısının 12 modülüne göre kaç denkleme denk olacağını bulmalıyız.

$$55 \equiv 7 \pmod{12} \text{ olacağından saat 7 yi gösterecektir.}$$

Örnek:

Bugün 13 Ağustos 2005 Cumartesidir. Buna göre 17 gün sonraki günü bulalım.

Çözüm:

Bir hafta 7 gün olduğuna göre, bugünden itibaren her 7 gün sonrası Cumartesi olacaktır.

$17 \equiv 3 \pmod{7}$ olduğuna göre istenen gün Cumartesi gününden 3 gün sonrasıdır. Yani Salı günü.

Buna göre 13 Ağustos 2005 Cumartesi gününden 17 gün sonraki gün 30 Ağustos 2005 Salı günüdür.

Örnek:

Bu ay Ağustos ayıdır. Buna göre 173 ay öncesi hangi ay olduğunu bulalım.

Çözüm:

Bir yıl 12 ay olduğuna göre, 12 ay öncesi ve 12 nin katı ile ifade edilen aylar hep Ağustos olacaktır.

$173 \equiv 5 \pmod{12}$ olduğuna göre istenen ay Ağustostan 5 ay öncesindeki aydır. Yani Marttır.

Örnek:

Tam saat 1'i gösteriyorken çalıştırılan bir saatin akrebi 2230 saat sonra kaç gösterir?

Çözüm:

Akrep ile yelkovan her 12 saat sonra tekrar 1'i gösterecektir.

Buna göre $2230 \equiv 10 \pmod{12}$ olacağından istenen saat, 1'in 10 saat sonrasıdır. Yani 11 dir.

Örnek:

Bir hasta A hapını 12 günde bir yutuyor. Bu hasta, B hapını 8 günde bir yutuyor. Bu hasta A ve B hapını birlikte ilk kez Pazar günü yutuyor. Buna göre, A ve B hapını ikinci kez birlikte yuttuğu gün hangisidir?

Çözüm:

E.K.O.K.(12,8) = 24 olduğu için bu hasta A ve B hapını birlikte 24 günde bir yutar.

$24 \equiv 3 \pmod{7}$ olduğundan ve hapları birlikte ilk kez Pazar günü yuttuğundan A ve B hapını ikinci kez birlikte yutacağı gün Pazar gününden 3 gün sonrasındaki gün olan Çarşamba günü olacaktır.

Örnek:

$39 \equiv 3 \pmod{m}$ olduğuna göre m pozitif tam sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm:

$$39 \equiv 3 \pmod{m} \Rightarrow 39 - 3 \equiv 3 - 3 \pmod{m}$$

$$36 \equiv 0 \pmod{m}$$

olduğuna göre; m, 36'nın tam bölenleri olmalıdır. 36'nın pozitif bölenleri 1,2,3,4,6,9,12,18,36'dır. Modüler aritmetik tanımı gereği $m = 1$ olamaz. Bu durumda m sayısı 8 tane pozitif değer alabilir.

Örnek:

$$5^{75} \equiv x \pmod{6} \text{ olduğuna } x \text{ sayısı kaçtır?}$$

Çözüm:

$$6 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow 6 - 1 \equiv 0 - 1 \pmod{6}$$

$$5 \equiv -1 \pmod{6} \Rightarrow 5^{75} \equiv (-1)^{75} \pmod{6}$$

$$5^{75} \equiv -1 \pmod{6} \Rightarrow 5^{75} \equiv 5 \pmod{6}$$

$x = 5$ bulunur.

Örnek:

$$a + b \equiv 8 \pmod{10}, a \cdot b \equiv 5 \pmod{10} \text{ ve}$$

$$a^2 + b^2 \equiv x \pmod{10} \text{ olduğuna göre } x \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ olduğundan;}$$

$$a^2 + b^2 \equiv (a + b)^2 - 2ab \pmod{10}$$

$$a^2 + b^2 \equiv 8^2 - 2 \cdot 5 \pmod{10}$$

$$a^2 + b^2 \equiv 64 - 10 \pmod{10}$$

$$a^2 + b^2 \equiv 54 \pmod{10}$$

$$a^2 + b^2 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow x = 4 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$4x + 10 \equiv 6 \pmod{7}$ denkleğini sağlayan en küçük pozitif x sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$4x + 10 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 4x + 3 + 7 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$4x + 3 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 4x + 3 - 3 \equiv 6 - 3 \pmod{7}$$

$$4x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2.4x \equiv 2.3 \pmod{7}$$

$$8x \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 1.x \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}$$

Örnek:

$4 - 2x \equiv 1 \pmod{5}$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük iki farklı pozitif tam sayı değerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$4 - 2x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 4 - 2x + 2x \equiv 1 + 2x \pmod{5}$$

$$4 \equiv 1 + 2x \pmod{5} \Rightarrow 4 - 1 \equiv 1 + 2x - 1 \pmod{5}$$

$$3 \equiv 2x \pmod{5} \Rightarrow 3.3 \equiv 3.2x \pmod{5}$$

$$4 \equiv x \pmod{5}$$

olduğuna göre x sayısı 4, 9, 13, 18, 23 gibi değerleri alabilir. Buna göre x in en küçük iki farklı pozitif tam sayı değerinin toplamı; $4+9=13$ tür.

Z/m Kümesinde Toplama ve Çarpma İşlemleri

$x, y \in Z/m$ olsun. Bu elemanlar arasındaki toplama işlemi \oplus ile ve çarpma işlemi \otimes ile gösterilirse;

$$x \oplus y = x + y \text{ ve } x \otimes y = x.y \text{ dir.}$$

Örnek:

$Z/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinde;

$$\bar{2} \oplus \bar{2} = \bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$$

$$\bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}$$

$$\bar{3} \otimes \bar{2} = \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{2}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$$

$Z/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinde tanımlı \oplus ve \otimes işlemleri aşağıdaki tablo ile gösterilebilir.

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

\otimes	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Z/m Kümesinde Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Özellikleri

1. Değişme Özelliği

Z/m kümesi toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özellikleri vardır.

2. Birleşme Özelliği

Z/m kümesi toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özellikleri vardır.

Örnek:

$Z/4$ kümesinde

$$\bar{3} \oplus \bar{2} = \bar{1} \text{ ve } \bar{2} \oplus \bar{3} = \bar{1} \text{ olduğundan } \bar{3} \oplus \bar{2} = \bar{2} \oplus \bar{3} \text{ tür.}$$

$$\bar{3} \otimes \bar{2} = \bar{2} \text{ ve } \bar{2} \otimes \bar{3} = \bar{2} \text{ olduğundan } \bar{3} \otimes \bar{2} = \bar{2} \otimes \bar{3} \text{ tür.}$$

4. Toplama İşleminin Etkisiz Elemanı

Z/m kümesinde toplamanın birim elemanı $\bar{0}$ dir.

Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}/m$ için $\bar{x} \oplus 0 = 0 \oplus \bar{x} = \bar{x}$ dir.

Örnek:

$\mathbb{Z}/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinde

$\bar{3} \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{3} = \bar{3}$ ve $\bar{0} \oplus \bar{2} = \bar{2} \oplus \bar{0} = \bar{2}$ dir.

$\mathbb{Z}/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinin \oplus işlemine göre etkisiz elemanı $\bar{0}$ dir.

Çarpma işleminin etkisiz elemanı üzerinde çalışılan kümeye göre değişmektedir.

3. Toplama İşlemine Göre Bir Elemanın Tersi

Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}/m$ için

$$\bar{x} \oplus (-\bar{x}) = \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0} \text{ ve } (-\bar{x}) \oplus \bar{x} = -\bar{x} + \bar{x} = \bar{0}$$

olduğundan her $\bar{x} \in \mathbb{Z}/m$ için \oplus işlemine göre

\bar{x} in tersi $-\bar{x}$ tir.

Örnek:

$\mathbb{Z}/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinde

$$\bar{1} \oplus (-\bar{1}) = \bar{1} + (-\bar{1}) = \bar{0} \text{ olduğundan } \bar{1} \text{ in tersi } -\bar{1} = \bar{3} \text{ tür.}$$

$$\bar{2} \oplus (-\bar{2}) = \bar{2} + (-\bar{2}) = \bar{0} \text{ olduğundan } \bar{2} \text{ nin tersi } -\bar{2} = \bar{2}$$

Çarpma işlemine göre bir elemanın tersi üzerinde çalışılan kümeye göre değişebilmektedir

Örnek:

$\mathbb{Z}/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ kümesinde \oplus ve \otimes işlemlerinin tablosunu yapıp birim elemanları ve her elemanın tersini bulalım.

Çözüm:

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

\otimes	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

\oplus işleminde her $\bar{x} \in \mathbb{Z}/5$ için $\bar{x} \oplus \bar{0} = \bar{x}$ olduğundan etkisiz eleman $\bar{0}$ dir.

$\bar{0} \oplus \bar{0} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{0}$ in tersi $\bar{0}$ dir.

$\bar{1} \oplus \bar{4} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{1}$ in tersi $\bar{4}$ tür.

$\bar{2} \oplus \bar{3} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{2}$ nin tersi $\bar{3}$ tür.

$\bar{3} \oplus \bar{2} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{3}$ ün tersi $\bar{2}$ dir.

$\bar{4} \oplus \bar{1} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{4}$ ün tersi $\bar{1}$ dir.

\otimes işleminde her $\bar{x} \in \mathbb{Z}/5$ için $\bar{x} \otimes \bar{1} = \bar{x}$ olduğundan etkisiz eleman $\bar{1}$ dir.

$\bar{0} \otimes \bar{x} = \bar{1}$ olacak şekilde $\bar{x} \in \mathbb{Z}/5$ bulunmadığından

$\mathbb{Z}/5$ kümesinde \otimes işlemine göre $\bar{0}$ in tersi yoktur.

$\bar{1} \otimes \bar{1} = \bar{1}$ olduğundan $\bar{1}$ in tersi $\bar{1}$ dir.

$\bar{2} \otimes \bar{3} = \bar{1}$ olduğundan $\bar{2}$ nin in tersi $\bar{3}$ tür.

$\bar{3} \otimes \bar{2} = \bar{1}$ olduğundan $\bar{3}$ ün tersi $\bar{2}$ dir.

$\bar{4} \otimes \bar{4} = \bar{1}$ olduğundan $\bar{4}$ ün $\bar{4}$ tür.

Örnek:

$\mathbb{Z}/6$ kümesinde $\bar{2} \cdot \bar{x} + \bar{5} = \bar{3}$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$$\bar{2}x + \bar{5} = \bar{3} \Rightarrow \bar{2}x = \bar{-2} = \bar{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\bar{4}}{\bar{2}} = \bar{2} \text{ veya } x = \frac{\bar{4} + \bar{6}}{\bar{2}} = \bar{5} \text{ dir.}$$

O halde Ç.K. = $\{\bar{2}, \bar{5}\}$ tir.

Örnek:

Z/13 kümesinde $\bar{2}x + \bar{5} = \bar{8}$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$$\bar{2}x + \bar{5} = \bar{8} \Rightarrow \bar{2}x = \bar{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\bar{3}}{\bar{2}} = \frac{\bar{16}}{\bar{2}} = \bar{8} \text{ dir.}$$

O halde Ç.K. = $\{\bar{8}\}$ dir.

Örnek:

Z/7 kümesinde $\bar{3}x - \bar{5} = \bar{6}$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$$\bar{3}x - \bar{5} = \bar{6} \Rightarrow \bar{3}x = \bar{11} = \bar{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\bar{4}}{\bar{3}} = \frac{\bar{18}}{\bar{3}} = \bar{6}$$

O halde Ç.K. = $\{\bar{6}\}$ dir.

Örnek:

Z/5 kümesinde $(\bar{3}x + \bar{4})(\bar{2}x + \bar{3}) = \bar{0}$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$$(\bar{3}x + \bar{4})(\bar{2}x + \bar{3}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{3}x + \bar{4} = \bar{0} \text{ veya } \bar{2}x + \bar{3} = \bar{0} \text{ dir.}$$

$$\bar{3}x + \bar{4} = \bar{0} \Rightarrow \bar{3}x = \bar{-4} = \bar{1} \Rightarrow x = \frac{\bar{1}}{\bar{3}} = \frac{\bar{6}}{\bar{3}} = \bar{2}$$

$$\bar{2}x + \bar{3} = \bar{0} \Rightarrow \bar{2}x = \bar{-3} = \bar{2} \Rightarrow x = \frac{\bar{2}}{\bar{2}} = \bar{1}$$

O halde Ç.K. = $\{\bar{1}, \bar{2}\}$ dir.

Örnek:

Z/5 kümesinde $\bar{4}x^2 + \bar{3} = \bar{4}$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$$\bar{4}x^2 + \bar{3} = \bar{4} \Rightarrow \bar{4}x^2 = \bar{1} \Rightarrow x^2 = \frac{\bar{1}}{\bar{4}} = \frac{\bar{16}}{\bar{4}} = \bar{4}$$

$$x^2 = \bar{4} \Rightarrow x = \bar{2} \text{ veya } x = \bar{3} \text{ olur.}$$

O halde Ç.K. = $\{\bar{2}, \bar{3}\}$ dir.

Çözümlü Sorular

1. 2^{23} sayısının 7 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

Çözüm:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

Buna göre,

$$2^{23} \equiv (2^3)^7 \cdot 2^2 \pmod{7} \Rightarrow 2^3 \equiv 1^7 \cdot 4 \pmod{7}$$

$$2^{23} \equiv 4 \pmod{7}$$

2. $4^{27} \equiv x \pmod{3}$ olduğuna göre x sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$4^1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$4^{27} \equiv 1^{27} \pmod{3}$$

$$4^{27} \equiv 1 \pmod{3} \text{ olduğundan } x = 1 \text{ dir.}$$

3. $97^{13} + 98^5$ toplamının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$$97^1 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$97^{13} \equiv 1^{13} \pmod{6}$$

$$97^{13} \equiv 1 \pmod{6} \text{ olur.}$$

$$98^1 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$98^2 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$98^3 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$98^4 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$98^5 \equiv 2 \pmod{6} \text{ olduğundan}$$

$$97^{13} + 98^5 \equiv 1 + 2 \pmod{6}$$

$$97^{13} + 98^5 \equiv 3 \pmod{6} \text{ bulunur.}$$

4. 997^{999} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

Çözüm:

997^{999} sayısının birler basamağındaki rakam, bu sayının 10 ile bölümündeki kalana eşittir.

$$997^1 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$997^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$997^2 - 0 \equiv 9 - 10 \pmod{10}$$

$$997^2 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$(997^2)^{499} \equiv (-1)^{499} \pmod{10}$$

$$997^{998} \equiv -1 \pmod{10}$$

$$997^{998} \cdot 997 \equiv -1 \cdot 997 \pmod{10}$$

$$997^{999} \equiv -1 \cdot 7 \pmod{10}$$

$$997^{999} \equiv -7 \pmod{10}$$

$$997^{999} \equiv 3 \pmod{10} \text{ bulunur.}$$

5. $2^{38} \equiv x \pmod{10}$ olduğuna x sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$2^6 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^7 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2^8 \equiv 6 \pmod{10}$$

Görüldüğü gibi 2 nin 4 ten sonraki kuvvetlerinden elde edilen kalanlar ilk bulunan kalanlarla aynıdır.

$$2^1 \equiv 2^5 \equiv 2^9 \equiv \dots \equiv 2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{10}$$

$$2^2 \equiv 2^6 \equiv 2^{10} \equiv \dots \equiv 2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^3 \equiv 2^7 \equiv 2^{11} \equiv \dots \equiv 2^{4k+3} \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2^4 \equiv 2^8 \equiv 2^{12} \equiv \dots \equiv 2^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2^{38} \equiv 2^{4 \cdot 9 + 2} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10} \text{ bulunur.}$$

6. $997^x \equiv 4 \pmod{7}$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

$$997 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$997^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$997^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$997^4 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$997^x \equiv 4 \pmod{7} \text{ olduğuna göre } x = 4 \text{ tür.}$$

7. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere 5^{14+6k} sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

7, 5 in tam katı olmayan pozitif bir tam sayı ve 7 asal sayı olduğundan,

$$5^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ dir. Buna göre,}$$

$$5^{14+6k} \equiv 5^{6 \cdot (2+k) + 2} \pmod{7}$$

$$5^{14+6k} \equiv 5^{6 \cdot (2+k) + 2} \pmod{7}$$

$$5^{14+6k} \equiv (5^6)^{2+k} \cdot 5^2 \pmod{7}$$

$$5^{14+6k} \equiv 1^{k+2} \cdot 25 \pmod{7}$$

$$5^{14+6k} \equiv 1 \cdot 25 \pmod{7}$$

$$5^{14+6k} \equiv 4 \pmod{7} \text{ bulunur.}$$

8. $4x + 10 \equiv 6 \pmod{7}$ denkleğini sağlayan en küçük pozitif x tam sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$4x + 10 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$4x + 3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$4x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$8x \equiv 6 \pmod{7}$$

$$x \equiv 6 \pmod{7} \text{ bulunur.}$$

9. $4 - 2x \equiv 1 \pmod{5}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük iki farklı pozitif tam sayı değerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$4 - 2x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$4 - 1 \equiv 2x \pmod{5}$$

$$3 \equiv 2x \pmod{5}$$

$$9 \equiv 6x \pmod{5}$$

$$4 \equiv x \pmod{5}$$

olduğuna göre x sayısı 4,9,13,18,23 gibi değerleri alabilir.

Buna göre x in alabileceği en küçük iki farklı pozitif tam sayı değerinin toplamı, $4+9=13$ tür.

10. Bugün günlerden Salı olduğuna göre, 32 gün sonrası hangi gündür?

Çözüm:

Bir hafta 7 gündür. Bugün günlerden ne ise 7 gün sonra yine aynı gündür.

$32 \equiv 4 \pmod{7}$ olduğundan istenen gün Salı gününden 4 gün sonraki gündür. Yani Cumartesi günüdür.

11. Bir öğretmen 13 günde bir (12 gün arayla) nöbet tutmaktadır. 26. nöbetini Çarşamba günü tuttuğuna göre 1. nöbetini hangi gün tutmuştur?

Çözüm:

Bir hafta 7 gün olduğuna göre işlemlerimizi mod 7 ye göre yapmalıyız. 26. nöbet Çarşamba günü tutulduğuna göre 7 gün önce de Çarşamba dır. Bunun için kalanı 0 olan günler Çarşamba ya, kalanı 1 olan günler Salıya, kalanı 2 olan günler Pazartesi ye,... rastgelir.

1. nöbetten ile 26. nöbete zaman geçene kadar 25 defa nöbet tutulmuştur. Her nöbet 13 günde bir tutulduğundan, 1. nöbet, 26. nöbetten $25 \cdot 13 = 325$ gün önce tutulmuştur.

$325 \equiv 3 \pmod{7}$ olduğundan ilk nöbet Çarşamba gününden 3 gün önceki gün olan Pazar günü tutulmuştur.

12. Bir asker 4 günde bir nöbet tutmaktadır. Bu asker ilk nöbetini Pazartesi günü tuttuğuna göre, 100. nöbetini hangi gün tutar?

Çözüm:

Asker 4 günde bir nöbet tuttuğuna göre 100. nöbetini tutması için $99 \cdot 4 = 396$ gün geçmesi gerekir.

$396 \equiv 4 \pmod{7}$ olduğundan bizden istenen Pazartesi den 4 gün sonrasıdır. Yani 100. nöbetini Cuma günü tutar.

13. Bir elektronik saat şu anda 18:00 i gösterdiğine göre, 157 saat sonra kaç gösterir?

Çözüm:

Elektronik saat 24 saatte bir aynı vakti göstereceğine göre, işlemleri mod 24 e göre yapmalıyız.

$157 \equiv 13 \pmod{24}$ olduğundan bizden istenen saat 18:00 den 13 saat sonrası yani 31:00 dir.

$31 \equiv 7 \pmod{24}$ olduğu için, saat 07:00 yi gösterir.

14. $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} \equiv 1 \pmod{7}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$5^{-1} \cdot x + 4^{-1} \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$$

Burada 5 ve 4 ün mod 7 ye göre tersini bulmalıyız.

$$5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{7} \text{ olduğundan } 5 \text{ in mod } 7 \text{ ye göre tersi } 3,$$

$$4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{7} \text{ olduğundan } 4 \text{ ün mod } 7 \text{ ye göre tersi } 2 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda,

$$5^{-1} \cdot x + 4^{-1} \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3 \cdot x + 2 \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$5 \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$15 \cdot x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

Buna göre, x in alabileceği değerlerden bazıları -11,-4,3,10,17,24 tür. Bu durumda x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri 3 tür.

15. x iki basamaklı bir doğal sayı, $x \equiv 2 \pmod{6}$ ve $x \equiv 2 \pmod{8}$ olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm:

$x \equiv 2 \pmod{6}$ olduğuna göre, x in 6 ile bölümünden kalan 2 dir.

Buna göre, iki basamaklı x in alacağı değerler,

14,20,**26**,...,86,92,**98** dir.

$x \equiv 2 \pmod{8}$ olduğuna göre, x in 8 ile bölümünden kalan 2 dir.

Buna göre, iki basamaklı x in alacağı değerler,

10, 18, **26**, ..., 82, 90, **98** dir.

6 ile 8 in E.K.O.K'u 24 olduğundan x iki basamaklı sayısı 26, 50, 74, 98 değerlerini alabilir.

16. 365 günlük bir yıldaki Salı ve Çarşamba günleri sayısının toplamı en çok kaçtır?

Çözüm:

Bir hafta 7 gündür. $365 = 52 \cdot 7 + 1$ olduğu için, 52 tane Salı ve Çarşamba sayılır.

Sayma işlemine Salı günü başlanırsa, artan gün Salı olur.

Böylece, 53 Salı ve 52 Çarşamba günü olur.

Toplam $53 + 52 = 105$ Salı ve Çarşamba günü olur.

17. $1 < x \leq 28$ olmak üzere $28 - x \equiv 0 \pmod{x}$ denkleğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

Çözüm:

$1 < x \leq 28$ ve k tam sayı olmak üzere,

$28 - x \equiv 0 \pmod{x}$ ise,

$28 - x \equiv 0 + xk \Rightarrow 28 = (k + 1)x$ tir.

Buna göre, x tam sayısı 28 in tam bölenidir.

Bu durumda x in alabileceği değerler 2, 4, 7, 14, 28 olmak üzere beş tanedir.

18. $Z/7$ kümesinde $(\bar{5}x + \bar{2}).(\bar{3}x + \bar{3})$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

Çözüm:

$Z/7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dir.

Bu kümede işlemler mod 7 ye göre yapılır.

Buna göre,

$$(\bar{5}x + \bar{2}).(\bar{3}x + \bar{3}) \equiv \bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{6}x + \bar{6}$$

$$(\bar{5}x + \bar{2}).(\bar{3}x + \bar{3}) \equiv x^2 + \bar{0}x + \bar{6} \equiv x^2 + \bar{6} \text{ olur.}$$

19. $Z/8$ kümesinde $\bar{5}x + \bar{2}y + \bar{6} = \bar{0}$ ve $\bar{4}x + \bar{7}y + \bar{4} = \bar{0}$ olduğuna göre, $x + y$ toplamını bulunuz.

Çözüm:

$\bar{5}x + \bar{2}y + \bar{6} = \bar{0}$ ve $\bar{4}x + \bar{7}y + \bar{4} = \bar{0}$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\bar{5}x + \bar{4}x + \bar{2}y + \bar{7}y + \bar{6} + \bar{4} = \bar{0}$$

$$\bar{9}x + \bar{9}y + \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{1}x + \bar{1}y + \bar{2} = \bar{0}$$

$$x + y = \bar{-2}$$

$$x + y = \bar{8} - \bar{2} = \bar{6} \text{ bulunur.}$$

20. $Z/5$ kümesinde $4^{-1} + 3^{-1}$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$Z/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ tür.

Bu kümede işlemler mod 5e göre yapılır. Buna göre,

$$4 \cdot 4 \equiv 16 \pmod{5} \Rightarrow 4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{-1} \equiv 4 \pmod{5} \text{ tir.}$$

$$3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{5} \Rightarrow 3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{-1} \equiv 2 \pmod{5} \text{ dir.}$$

$$\text{O halde } 4^{-1} + 3^{-1} \equiv 4 + 2 \equiv 1 \pmod{5} \text{ bulunur.}$$

21. $f(x) = 2x + 2$ ve $g(x) = 4x$ olduğuna göre $(f \circ g)(2)$ nin $Z/5$ kümesindeki değeri kaçtır?

Çözüm:

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(8) = 18 \text{ dir.}$$

$18 \equiv 3 \pmod{5}$ olduğundan $(f \circ g)(2)$ nin $Z/5$ kümesindeki değeri 3 tür.

22. $2011^{2122} \equiv x \pmod{15}$ olduğuna x sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$2011 \equiv 1 \pmod{15} \text{ tir.}$$

Buna göre,

$$2011^{2122} \equiv 1^{2111} \pmod{15}$$

$$2011^{2122} \equiv 1 \pmod{15} \text{ bulunur.}$$

23. $5^{2009} + 5^{2011} \equiv x \pmod{26}$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$$5^{2009} + 5^{2011} \equiv 5^{2009} \cdot (1 + 5^2) \pmod{26}$$

$$5^{2009} + 5^{2011} \equiv 5^{2009} \cdot 26 \pmod{26}$$

$$5^{2009} + 5^{2011} \equiv 0 \pmod{26}$$

$$x = 0 \text{ bulunur.}$$

24. $6^{2015} \equiv x \pmod{27}$ olduğuna x sayısı kaçtır?

Çözüm:

$$6^1 \equiv 6 \pmod{27}$$

$$6^2 \equiv 9 \pmod{27}$$

$6^3 \equiv 0 \pmod{27}$ olduğuna göre 6 nın 3 ten büyük tüm kuvvetleri mod 27 de 0 a denktir.

Buna göre, $6^{2015} \equiv 0 \pmod{27}$ olup $x = 0$ bulunur.

25. $x = 197$ ve $y = 196$ olduğuna göre $x \cdot y + x^y$ sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$$197 \cdot 196 + 197^{196} \equiv x \pmod{9} \text{ ifadesinde x i bulmalıyız.}$$

$$197 \equiv 8 \pmod{9} \text{ ve } 196 \equiv 7 \pmod{9} \text{ olup,}$$

$$197 \cdot 196 \equiv 56 \equiv 2 \pmod{9} \text{ dur.}$$

$$197^1 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$197^2 \equiv 1 \pmod{9} \text{ olduğundan,}$$

$$197^{196} \equiv (197^2)^{98} \equiv 1^{98} \equiv 1 \pmod{9} \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$197 \cdot 196 + 197^{196} \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod{9} \text{ bulunur.}$$

26. Bir fabrikada yöneticiler 9 günde bir toplantı yapıyorlar. İlk toplantılarını Çarşamba günü yapmışlardır. 12. toplantılarını hangi gün yaparlar?

Çözüm:

Bir hafta 7 gün olduğuna göre işlemlerimizi mod 7 ye göre yapmalıyız. Bugün günlerden ne ise 7 gün sonra da aynı gündür.

12. toplantının yapılabilmesi için 11 tane 9 gün geçmelidir.

$$11 \cdot 9 \equiv 4 \cdot 2 \pmod{7} \Rightarrow 11 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{7} \text{ olduğuna göre}$$

istenen gün Çarşamba gününden 1 gün sonrası olan Perşembe günüdür.

27. $0! + 2! + 4! + 6! + \dots + 44!$ toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?

Çözüm:

Bir sayının 10 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamı verir.

$$0! + 2! + 4! + 6! + \dots + 44! = 0 + 2 + 24 + 720 + \dots$$

$$= 27 + 720 + \dots$$

$$= 7 + 20 + 720 + \dots$$

6! Sayısı 10 ile tam bölünür. 6!'den sonra gelen tüm terimler de 10 ile tam bölünür. Buna göre,

$$0! + 2! + 4! + 6! + \dots + 44! \equiv 7 \pmod{10} \text{ olur.}$$

O halde $0! + 2! + 4! + 6! + \dots + 44!$ toplamının birler basamağındaki rakam 7 dir.

28. $(5555)^{555}$ sayısının 9'a bölümünde kalan kaçtır?

Çözüm:

$$5555 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$(5555)^{555} \equiv 2^{555} \pmod{9} \text{ dur.}$$

$$2^{64} \equiv 64 \equiv 1 \pmod{9} \text{ olduğundan,}$$

$$2^{555} \equiv (2^6)^{92} \cdot 2^3 \equiv 1^{92} \cdot 8 \equiv 8 \pmod{9} \text{ olur.}$$

O halde $(5555)^{555}$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 8 dir.

29. $x \equiv 3 \pmod{6}$, $y \equiv 2 \pmod{6}$ ve $x^2 - y^2 \equiv a \pmod{6}$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \text{ dir.}$$

$$x \equiv 3 \pmod{6} \text{ ve } y \equiv 2 \pmod{6} \text{ ise,}$$

$$x^2 - y^2 \equiv (3 + 2)(3 - 2) \pmod{6}$$

$$x^2 - y^2 \equiv 5 \cdot 1 \equiv 5 \pmod{6} \text{ bulunur.}$$

30. $3x - 2 \equiv 4 \pmod{5}$ denkleğini sağlayan x değeri kaçtır?

Çözüm:

$$3x - 2 + 2 \equiv 4 + 2 \pmod{5}$$

$$3x \equiv 6 \pmod{5} \Rightarrow 3x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$7.3x \equiv 7.1 \pmod{5} \Rightarrow 21x \equiv 7 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{5} \text{ bulunur.}$$

31. $3x - 5 \equiv 6 \pmod{7}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük iki basamaklı pozitif tam sayı kaçtır?

Çözüm:

$$3x - 5 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 3x \equiv 5 + 6 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5.3x \equiv 5.4 \pmod{7}$$

$$x \equiv 20 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}$$

32. $ax + 3 \equiv 4 \pmod{7}$ denkleği $x = 2$ için sağlandığına göre, a kaçtır?

Çözüm:

$ax + 3 \equiv 4 \pmod{7}$ denkleği $x = 2$ için sağlanıyorsa,

$$a.2 + 3 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 2a + 3 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2a + 3 - 3 \equiv 4 - 3 \pmod{7} \Rightarrow 2a \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2a.4 \equiv 1.4 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv 4 \pmod{7} \text{ bulunur.}$$

33. $f(\bar{3}x + 1) = \bar{6}x + \bar{7}$ olduğuna göre $f(\bar{0})$ nin $\mathbb{Z}/9$ kümesindeki değeri kaçtır?

Çözüm:

$$f(\bar{3}x + 1) = \bar{6}x + \bar{7}$$

$$f(\bar{3}x + 1) = \bar{6}x + \bar{2} + \bar{5}$$

$$f(\bar{3}x + 1) = \bar{2} \cdot (\bar{3}x + 1) + \bar{5}$$

$$f(a) = \bar{2} \cdot a + \bar{5}$$

$$f(\bar{0}) = \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{5} = \bar{5} \text{ bulunur.}$$

Konu Bitmiştir.

