

İŞLEM

Bir A kümesinden B kümesine tanımlanan her fonksiyona **birli işlem** denir.

A boş olmayan bir küme ve $A \subset B$ olsun.

Her $f : A \times A \rightarrow B$ fonksiyonuna A üzerinde **ikili işlem** veya kısaca **işlem** denir.

İşlem için genellikle $+, -, \cdot, \div, \Delta, \circ, *$ sembolleri kullanılır.

Örnek:

$$(5,6) \xrightarrow{+} 11 \dots\dots\dots 5 + 6 = 11$$

$$(6,4) \xrightarrow{\cdot} 24 \dots\dots\dots 6 \cdot 4 = 24$$

$$(a,b) \xrightarrow{*} c \dots\dots\dots a * b = c$$

$$(x,y) \xrightarrow{\Delta} z \dots\dots\dots x \Delta y = z$$

Örnek:

Tamsayılar kümesinde $x * y = 2x + 5y$ şeklinde $*$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre $5 * (-1)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$x * y = 2x + 5y \text{ ise,}$$

$$5 * (-1) = 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 10 - 5 = 5 \text{ olur.}$$

Örnek:

Sıfırdan ve birbirinden farklı reel sayılar kümesinde Δ işlemi $\frac{3}{a \Delta b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, $5 \Delta 2$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

Verilen işlemi düzenleyerek $5 \Delta 2$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\frac{3}{a \Delta b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{3}{a \Delta b} = \frac{a - b}{ab} \Rightarrow a \Delta b = \frac{3ab}{a - b} \text{ dir.}$$

Buna göre $a = 5$ ve $b = 2$ için,

$$5 \Delta 2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{5 - 2} = \frac{30}{3} = 10 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Tam sayılar kümesi üzerinde $a * b = 2a - b$ işlemi tanımlanmıştır. $k * 7 = 5 * 13$ olduğuna göre k'nın değerini bulalım.

Çözüm:

$$a * b = 2a - b \text{ olduğuna göre,}$$

$$k * 7 = 5 * 13 \Rightarrow 2k - 7 = 10 - 13 \Rightarrow 2k = 10 - 13 + 7$$

$$\Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Tam sayılar kümesi üzerinde $x * y = \begin{cases} x + y, & x \geq y \\ 2x - y, & x < y \end{cases}$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre $2 * (4 * 3)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Önce parantez içini sonuçlandıralım:

$$4 > 3 \text{ olduğu için } 4 * 3 = 4 + 3 = 7 \text{ bulunur.}$$

$$2 > 7 \text{ olduğu için } 2 * 7 = 2 \cdot 2 - 7 = -3 \text{ bulunur.}$$

$$\text{O halde } 2 * (4 * 3) = 2 * 7 = -3 \text{ tür.}$$

Örnek:

Rasyonel sayılarda $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğuna göre, $(3 * 4) * 12$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$a * b = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ olduğuna göre,}$$

$$a = 3 \text{ ve } b = 4 \text{ için, } 3 * 4 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ tir.}$$

$$a = 5 \text{ ve } b = 12 \text{ için, } 5 * 12 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Buna göre $(3 * 4) * 12 = 5 * 12 = 13$ bulunur.

Örnek:

Tam sayılar kümesi üzerinde

$a \Delta b = (a \text{ ve } b \text{ nin küçük olmayanı})$ işlemi tanımlanıyor.

Buna göre $(-2) \Delta (3 \Delta 5)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

“a ve b nin küçük olmayanı” ifadesi “a ve b nin büyük veya eşit olanı” ifadesine denktir. Buna göre önce parantez içini sonuçlandırılalım.

$$3 \Delta 5 = (3 \text{ ve } 5 \text{ in küçük olmayanı}) = 5 \text{ olur.}$$

$$(-2) \Delta 5 = (-2 \text{ ve } 5 \text{ in küçük olmayanı}) = 5 \text{ olduğundan,}$$

$$(-2) \Delta (3 \Delta 5) = (-2) \Delta 5 = 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Reel sayılar kümesindeki her x, y için,
 $(x + 1) * y = 3.x - y$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre
 $(5 * 6) * 8$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$(x + 1) * y = 3.x - y \text{ olduğuna göre,}$$

$$(4 + 1) * 6 = 3.4 - 6 \Rightarrow 5 * 6 = 12 - 6 = 6 \text{ dir.}$$

$$(5 + 1) * 8 = 3.5 - 8 \Rightarrow 6 * 8 = 15 - 8 = 7 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$(5 * 6) * 8 = 6 * 8 = 7 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerinde $(a - 1) * (b + 1) = 2.a.b + 2$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre $a * b$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$a - 1$ ifadesinin ters ifadesi $a + 1$ dir.

$b + 1$ ifadesinin ters ifadesi $b - 1$ dir.

Buna göre $(a - 1) * (b + 1) = 2.a.b + 2$ işleminde a yerine $a + 1$ ve b yerine $b - 1$ yazılırsa,

$$(a + 1 - 1) * (b - 1 + 1) = 2.(a + 1).(b - 1) + 2$$

$$a * b = 2.(ab - a + b - 1) + 2$$

$$a * b = 2.ab - 2a + 2b \text{ olur.}$$

Örnek:

Dik koordinat düzleminin noktaları üzerinde bir $*$ işlemi
 $(a, b) * (c, d) = (a + c, b.d)$ şeklinde tanımlanıyor.
 $(m, -3) * (4, n + m) = (1, 21)$ olduğuna göre $m - n$ farkı kaçtır?

Çözüm:

$(a, b) * (c, d) = (a + c, b.d)$ olduğuna göre,

$$(m, -3) * (4, n + m) = (1, 21) \Rightarrow (m + 4, -3n - 3m) = (1, 21)$$

Bu durumda,

$$m + 4 = 1 \Rightarrow m = 1 - 4 = -3 \text{ ve}$$

$$-3n - 3m = 21 \Rightarrow -3n - 3.(-3) = 21 \Rightarrow n = -4 \text{ olur.}$$

O halde $m - n = -3 - (-4) = 1$ bulunur.

Örnek:

Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde Δ ve $*$ işlemleri,
 $x \Delta y = x + 2y$ ve $x * y = x - 3y$ şeklinde tanımlanmıştır.
Buna göre $(2006 \Delta 2007) * 2005$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$x \Delta y = x + 2y$ olduğundan,

$$2006 \Delta 2007 = 2006 + 2.2007 = 2006 + 4014 = 6020 \text{ dir}$$

$x * y = x - 3y$ olduğundan,

$$6020 * 2005 = 6020 - 3.2005 = 6020 - 6015 = 5 \text{ tir.}$$

$$\text{O halde, } (2006 \Delta 2007) * 2005 = 6020 * 2005 = 5 \text{ olur.}$$

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerindeki her x,y için,
 $x \Delta y = 2x - y + 2.(y \Delta x)$ işlemleri tanımlanmıştır. Buna göre
 $6 \Delta 4$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$x \Delta y = 2x - y + 2.(y \Delta x) \text{ olduğuna göre,}$$

$$x = 6 \text{ ve } y = 4 \text{ için, } 6 \Delta 4 = 8 + 2.(4 \Delta 6) \text{ dir... (1)}$$

$$x = 4 \text{ ve } y = 6 \text{ için, } 4 \Delta 6 = 2 + 2.(6 \Delta 4) \text{ tür... (2)}$$

(2) eşitliğindeki ifade (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$6 \Delta 4 = 8 + 2.(4 \Delta 6) = 8 + 2.(2 + 2.(6 \Delta 4))$$

$$6 \Delta 4 = 8 + 2.(4 \Delta 6) = 8 + 2.(2 + 2.(6 \Delta 4)) \Rightarrow -3.(6 \Delta 4) = 12$$

$$6 \Delta 4 = -4 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

n pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$x^{[n]} = x^1 \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \dots \cdot x^{2n-1}$$

$$x^{[n]} = x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot \dots \cdot x^{2n} \text{ şeklinde tanımlanıyor.}$$

Buna göre, $\frac{2^{[25]}}{2^{[25]}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$2^{[25]} = 2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{49} = 2^{1+3+5+\dots+49} = 2^{(25^2)}$$

$$2^{[25]} = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \dots \cdot 2^{50} = 2^{2+4+6+\dots+50} = 2^{25 \cdot 26}$$

$$\frac{2^{[25]}}{2^{[25]}} = \frac{2^{(25^2)}}{2^{25 \cdot 26}} = \frac{2^{625}}{2^{650}} = 2^{625-650} = 2^{-25} = \frac{1}{2^{25}}$$

Örnek:

Δ	S	E	Ç	İ	L
S	E	Ç	İ	L	S
E	Ç	İ	L	S	E
Ç	İ	L	S	E	Ç
İ	L	S	E	Ç	İ
L	S	E	Ç	İ	L

A = {S,E,Ç,İ,L} kümesi üzerinde
 Δ işlemi yandaki tabloya göre
tanımlanıyor. Buna göre $S \Delta (\Ç \Delta L)$
işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Tabloya göre $\Ç \Delta L = \Ç$ ve $S \Delta \Ç = İ$ dir.

O halde,

$$S \Delta (\Ç \Delta L) = S \Delta \Ç = İ \text{ bulunur.}$$

Örnek:

*	a	b	c	d	e
a	d	e	a	b	c
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	c	d	e	a	b

A = {a,b,c,d,e} kümesi üzerinde *
işlemi yandaki tabloya göre
tanımlanıyor. Tabloya göre
 $c * (a * d) = b * x$ eşitliğini sağlayan
x in eşitini bulalım.

Çözüm:

$$c * (a * d) = b * x \text{ ise } c * b = b * x \Rightarrow b = b * x \text{ tir.}$$

$$b = b * c \text{ olduğundan } x = c \text{ dir.}$$

İşlemin Özellikleri

1. Değişme Özelliği

A boş olmayan bir küme ve * işlemi A da tanımlı bir işlem olsun.

Eğer $\forall a, b \in A$ için, $a * b = b * a$ oluyorsa * işleminin

değişme özelliği vardır denir.

Örnek:

Reel sayılar kümesinde tanımlanan $x \Delta y = x + y - 2xy$
işleminin değişme özelliği olup olmadığına bakalım.

Çözüm:

Verilen işlemin değişme özelliğine sahip olması için $x\Delta y = y\Delta x$ olmalıdır.

$$x\Delta y = x + y - 2xy \text{ ve}$$

$$y\Delta x = y + x - 2yx = x + y - 2xy$$

olduğundan $x\Delta y = y\Delta x$ dir.

O halde verilen işlem değişme özelliğine sahiptir.

Örnek:

Tam sayılar kümesinde tanımlanan $x\Delta y = x - y + 10$ işleminin değişme özelliği olup olmadığına bakalım.

Çözüm:

Verilen işlemin değişme özelliğine sahip olması için $x\Delta y = y\Delta x$ olmalıdır.

$$x\Delta y = x - y + 10 \text{ ve}$$

$$y\Delta x = y - x + 10 \neq x - y + 10$$

olduğundan $x\Delta y \neq y\Delta x$ dir.

O halde verilen işlem değişme özelliğine sahip değildir.

Örnek:

*	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

$K = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde * işlemi yandaki tabloya göre tanımlanıyor. Tabloyla tanımlanan * işlemi değişmelidir. Çünkü tablonun taralı kısmındaki elemanların

hepsi işlemi gören köşegene göre simetrik.

2. Birleşme Özelliği

A boş olmayan bir küme ve * işlemi A da tanımlı bir işlem olsun.

Eğer $\forall a, b, c \in A$ için, $a * (b * c) = (a * b) * c$ oluyorsa

* işleminin birleşme özelliği vardır denir.

Örnek:

Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $a * b = a + b - 3$ işleminin birleşme özelliğinin olup olmadığını $a = 2$, $b = 3$ ve $c = 5$ alarak bakalım.

Çözüm:

$$2 * (3 * 5) = 2 * (3 + 5 - 3) = 2 * 5 = 2 + 5 - 3 = 4$$

$$(2 * 3) * 5 = (2 + 3 - 3) * 5 = 2 * 5 = 2 + 5 - 3 = 4$$

$2 * (3 * 5) = (2 * 3) * 5$ olduğundan * işleminin birleşme özelliği vardır.

3. Birim (Etkisiz) Eleman Özelliği

A boş olmayan bir küme ve * işlemi A da tanımlı bir işlem olsun.

Eğer $\forall a \in A$ için, $a * e = e * a = a$ oluyorsa e ye * işleminin birim(etkisiz) elemanı denir.

Bir işlemde etkisiz eleman varsa bir tanedir. Birden fazla etkisiz eleman bulunuyorsa, işlemin etkisiz elemanı yoktur.

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $x\Delta y = x + y + 2$ işleminin etkisiz(birim) elemanını bulalım.

Çözüm:

Δ işleminin değişme özelliği olduğu için $x\Delta e = x$ eşitliğini sağlayan e sayısını bulmalıyız.

$$x\Delta e = x \Rightarrow x + e + 2 = x \Rightarrow e + 2 = 0 \Rightarrow e = -2 \text{ dir.}$$

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $x\Delta y = 2x - y + 3$ işleminin etkisiz(birim) elemanını bulalım.

Çözüm:

$$x\Delta e = x \Rightarrow 2x - e + 3 = x \Rightarrow x + 3 = e \Rightarrow e = x + 3 \text{ tür.}$$

e elemanı x in değişen değerlerine göre farklı değerler alacağından Δ işleminin etkisiz(birim) elemanı yoktur. Verilen işlemin değişme özelliği olmadığı için yukarıdaki işlem yapılmadan etkisiz elemanın olmayacağı söylenebilirdi.

Örnek:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi yandaki tabloya göre tanımlanıyor. $*$ işleminin etkisiz(birim) elemanını bulalım.

Çözüm:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$*$ işleminin bulunduğu satırın aynen ortaya çıktığı satırı ve $*$ işleminin bulunduğu sütunun aynen ortaya çıktığı sütunu yandaki gibi tarayalım. Taradığımız satırın ve taradığımız sütunun kesişiminde bulunan eleman

birim elemandır.

Buna göre, $*$ işleminin etkisiz(birim) elemanı c dir.

Tabloya dikkat edilirse,

$$a * c = c * a = a$$

$$b * c = c * b = b$$

$$c * c = c * c = c$$

$$d * c = c * d = d$$

eşitliklerinin doğru olduğu görülür.

4. Ters Eleman Özelliği

A boş olmayan bir küme ve $*$ işlemi A da tanımlı bir işlem olsun. e elemanı $*$ işleminin birim(etkisiz) elemanı olmak üzere,

$$a \in A \text{ için,}$$

$$a * x = x * a = e \text{ oluyorsa } x \text{ elemanına } * \text{ işlemine göre}$$

$$a \text{ nın tersi denir ve } x = a^{-1} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \text{ dir.}$$

Örnek:

Reel sayılar kümesinde tanımlanan $x \Delta y = x + y - 6$ işlemine göre 3 ün tersini bulalım.

Çözüm:

Bir elemanın tersinin bulunabilmesi için ilk olarak verilen işlemin birim elemanı bulunmalıdır.

Δ işleminde değişme özelliği olduğu için $x \Delta e = x$ eşitliğinden e yi bulmamız yeterlidir.

$$x \Delta e = x \Rightarrow x + e - 6 = x \Rightarrow e - 6 = 0 \Rightarrow e = 6 \text{ bulunur.}$$

O halde Δ işleminin etkisiz(birim) elemanı $e = 6$ dir.

3 ün Δ işlemine göre tersi 3^{-1} ise, 3 ile 3^{-1} işleme girdiğinde sonuç birim eleman yani 6 olmalıdır.

$$3 \Delta 3^{-1} = 6 \Rightarrow 3 + 3^{-1} - 6 = 6 \Rightarrow 3^{-1} - 3 = 6$$

$$\Rightarrow 3^{-1} = 9 \text{ olur.}$$

Uyarı

- Bir işlemin etkisiz elemanı yoksa ters elemanı da yoktur.
- Bir elemanın tersinin tersi kendisidir.
- Bir elemanın tersi varsa bir tanedir.
- Birim elemanın tersi kendisidir. Fakat tersi kendisine eşit olan her eleman birim eleman değildir.

Örnek:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi yandaki tabloya göre tanımlanıyor. $*$ işlemine göre her elemanın tersini bulalım.

Çözüm:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$*$ işleminin etkisiz(birim) elemanı c dir.

$$a * a^{-1} = c \Rightarrow a^{-1} = a \text{ dir.}$$

Buna göre a nın tersi a dir.

$$b * b^{-1} = c \Rightarrow b^{-1} = d \text{ dir. Buna göre b nin tersi d dir.}$$

$c * c^{-1} = c \Rightarrow c^{-1} = c$ dir. Buna göre c nin tersi c dir.

$d * d^{-1} = c \Rightarrow d^{-1} = b$ dir. Buna göre d nin tersi d dir.

Örnek:

*	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde * işlemi yandaki tabloya göre tanımlanıyor.

Her $x \in A$ için, $x^n = \underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ defa}}$ olduğuna göre,

d^{-2006} ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

*	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

Tabloda görüldüğü gibi işlemin etkisiz(birim) elemanı b dir.

Etkisiz eleman b olduğundan,
 $d * d^{-1} = b \Rightarrow d^{-1} = e$ olur.

Tabloya göre,

$$e^1 = e,$$

$$e^2 = e * e = c,$$

$$e^3 = e^1 * e^2 = e * c = a,$$

$$e^4 = e^1 * e^3 = e * a = d,$$

$$e^5 = e^1 * e^4 = e * d = b,$$

$$d^{-2006} = (d^{-1})^{2006} = e^{2006} = e^1 * e^{2005}$$

$$= e * (e^5)^{401} = e * b^{401} = e * b = e$$

$$d^{-2006} = e \text{ dir.}$$

Örnek:

$\mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}\}$ kümesi üzerinde * işlemi

$x * y = x + y + 4xy$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre 3 reel sayısının * işlemine göre tersini bulunuz.

Çözüm:

Bir elemanın tersinin bulunabilmesi için ilk olarak verilen işlemin birim elemanı bulunmalıdır.

* işleminde değişme özelliği olduğu için $a * e = a$ eşitliğinden e yi bulmamız yeterlidir.

$$a * e = a \Rightarrow a + e + 4ae = a \Rightarrow e.(1 + 4a) = 0 \text{ olur.}$$

Bu son eşitlikte $a \neq -\frac{1}{4}$ olduğundan $e = 0$ bulunur.

O halde * işleminin etkisiz(birim) elemanı $e = 0$ dir.

3 ün * işlemine göre tersi 3^{-1} ise, 3 ile 3^{-1} işleme girdiğinde sonuç birim eleman yani 0 olmalıdır.

$$3 * 3^{-1} = 0 \Rightarrow 3 + 3^{-1} + 4.3.3^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow 3^{-1} + 12.3^{-1} = -3$$

$$\Rightarrow 13.3^{-1} = -3$$

$$\Rightarrow 3^{-1} = -\frac{3}{13}$$

Örnek:

$\mathbb{R} - \{-2\}$ kümesi üzerinde * işlemi

$x * y = 2x + 2y + xy + 2$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre tersi kendisine eşit olan elemanların toplamını bulunuz.

Çözüm:

İlk olarak * işleminin etkisiz(birim) elemanı varsa bulalım. Etkisiz eleman e olsun. * işlemi değişmeli olduğu için, e elemanını $a * e = a$ eşitliğinden bulabiliriz.

$$a * e = a \Rightarrow 2a + 2e + ae + 2 = a$$

$$\Rightarrow a + 2 + 2e + ae = 0$$

$$\Rightarrow (a + 2) + e.(a + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (e + 1).(a + 2) = 0$$

Bu son eşitlikte $a \neq -2$ olduğundan $e = -1$ bulunur.

O halde $*$ işleminin etkisiz(birim) elemanı $e = -1$ dir.

Tersi kendisine eşit olan eleman m olsun.

Buna göre $m = m^{-1}$ olur.

$x * y = 2x + 2y + xy + 2$ olduğundan,

$$m * m^{-1} = 2.m + 2.m^{-1} + m.m^{-1} + 2$$

$$e = 2.m + 2.m + m + 2 \Rightarrow -1 = 4m + m^2 + 2$$

$$m^2 + 4m + 3 = 0 \Rightarrow (m + 3).(m + 1) = 0$$

$m = -3$ veya $m = -1$ dir.

Buna göre tersi kendisine eşit olan elemanların toplamı,

$$-3 + (-1) = -4 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$R - \{-\frac{3}{2}\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

$x * y = 3x + 3y + 2xy + 3$ şeklinde tanımlanıyor. Bu işleme göre B elemanının tersi C olduğuna göre $B * C$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

Etkisiz eleman e olsun. $*$ işlemi değişmeli olduğu için, e elemanını $a * e = a$ eşitliğinden bulabiliriz.

$$a * e = a \Rightarrow 3a + 3e + 2ae + 3 = a$$

$$\Rightarrow 2a + 3e + 2ae + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2a + 3).(e + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e = -1 \text{ bulunur.}$$

$*$ işlemine göre B elemanının tersi C olduğundan,

$$B * B^{-1} = -1 \Rightarrow B * C = -1 \text{ bulunur.}$$

5. Yutan Eleman

A kümesi boş kümeden farklı bir küme ve $*$, A da tanımlı bir işlem olsun.

Her $x \in A$ için, $x * y = y * x = y$ ise $y \in A$ elemanına $*$

işleminin yutan elemanı denir.

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerinde $x * y = x + y - 2xy$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre $*$ işleminin yutan elemanını bulalım.

Çözüm:

$*$ işleminin yutan elemanı y olsun. $*$ işlemi değişmeli olduğu için, y elemanını $a * y = y$ eşitliğinden bulabiliriz.

$$a * y = y \Rightarrow a * y = a + y - 2ay = y$$

$$\Rightarrow a - 2ay = 0$$

$$\Rightarrow 2ay = a \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Uyarı

- Bazı işlemlerin yutan elemanı yoktur.
- Bir işlemin yutan elemanı varsa bir tanedir.
- Yutan eleman sabit bir sayıdır.
- Yutan elemanın tersi yoktur. Fakat tersi olmayan her eleman yutan eleman değildir.

Örnek:

*	2	4	6	8
2	2	4	6	8
4	4	4	6	8
6	6	6	6	8
8	8	8	8	8

Yandaki tabloda, $P = \{2,4,6,8\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi gösterilmiştir. Buna göre P kümesinde tanımlı $*$ işlemini inceleyelim.

Çözüm:

- * işlemi değişmelidir.

Örneğin $2 * 4 = 4 * 2$, $6 * 8 = 8 * 6$, ... dir.

Tablonun sonuç kısmındaki elemanların hepsi işlemi gören köşegene göre simetrik.

- * işleminin etkisiz(birim) elemanı 2 dir.

- * işlemine göre,

2 nin tersi 2 dir.

4 ün tersi yoktur.

6 nın tersi yoktur.

8 in tersi yoktur.

- * işlemine göre, yutan eleman 8 dir. Çünkü 8 hangi elemanla işleme girerse girsin işlemin sonucu yine 8 olmaktadır.

4 ile 6 nın tersi olmamasına rağmen yutan eleman değildir.

6. Dağılma Özelliği

Boş olmayan bir E kümesinde * ve Δ işlemleri tanımlansın.

Her $a, b, c \in E$ için, $a * (b \Delta c) = (a * b) \Delta (a * c)$ oluyorsa

* işleminin Δ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.

$(b \Delta c) * = (b * a) \Delta (c * a)$ oluyorsa * işleminin Δ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır.

Çözümlü Sorular

1. Tam sayılar kümesi üzerinde, her a,b için,

$$a * b = 1 - a^b \text{ işlemi tanımlanmıştır.}$$

$7 * (1 * 8)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$7 * (1 * 8) = 7 * (1 - 1^8) = 7 * (1 - 1) = 7 * 0 = 1 - 7^0 = 0 \text{ dir.}$$

2. Reel sayılar kümesi üzerinde her a,b için,
 $a * b = 2a + 3b$ işlemi tanımlanmıştır.
 $k * 4 = 3 * 8$ olduğuna göre k kaçtır?

Çözüm:

$$k * 4 = 3 * 8 \Rightarrow 2k + 3.4 = 2.3 + 3.8$$

$$\Rightarrow 2k + 12 = 6 + 24$$

$$\Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9 \text{ bulunur.}$$

3. Reel sayılar kümesi üzerinde,
 $x * y = x + y + 1$ ve $a \Delta b = a - b - 1$ işlemleri veriliyor.
Buna göre, $2 * (4 \Delta m) = 0$ olduğuna göre m kaçtır

Çözüm:

$$2 * (4 \Delta m) = 0 \Rightarrow 2 * (4 - m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2 * (3 - m) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 3 - m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6 - m = 0$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ bulunur.}$$

4. Reel sayılar kümesi üzerinde sıfırdan farklı her a,b için
 $\frac{3}{a} * \frac{2}{b} = a - b$ işlemi tanımlanmıştır. $4 * 3$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{3}{a} = 4 \text{ ve } \frac{2}{b} = 3 \text{ olmalıdır.}$$

$$a = \frac{3}{4} \text{ ve } b = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{3}{\frac{3}{4}} * \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \Rightarrow 4 * 3 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$$5. \text{ Her } a, b \text{ reel sayısı için, } a * b = \begin{cases} \frac{a+b}{2}, & a+b \geq 0 \\ \frac{a+b}{3}, & a+b < 0 \end{cases}$$

işlemi tanımlanmıştır. Buna göre

$$\left(\frac{3}{4} * \left(-\frac{1}{4}\right)\right) * \left(-\frac{5}{4}\right) \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\frac{3}{4} * \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{3}{4} * \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} = \frac{\frac{2}{4}}{2} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

$$\frac{1}{4} * \left(-\frac{5}{4}\right) = -1 < 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{1}{4} * \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right)}{3} = -\frac{1}{3} \text{ dir.}$$

O halde,

$$\left(\frac{3}{4} * \left(-\frac{1}{4}\right)\right) * \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} * \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

6. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı * işlemi değişmelidir.
 $x * y = x + y + 3.(y * x)$ olduğuna göre $10 * 26$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

* işlemi değişmeli olduğundan $x * y = y * x$ tir.

$$x * y = x + y + 3.(y * x) = x + 3.(x * y)$$

$$\Rightarrow -2.(x * y) = x + y \Rightarrow x * y = -\frac{x+y}{2}$$

Buna göre,

$$10 * 26 = -\frac{10+26}{2} = -\frac{36}{2} = -18 \text{ bulunur.}$$

7. Reel sayılarda * işlemi $x * y = "x \text{ ile } y \text{ den küçük olmayanı}"$ şeklinde tanımlanıyor. $6 * (a * b) = 9$ ise a en fazla kaç olabilir?

Çözüm:

$6 * (a * b) = 9$ ise $a * b = 9$ olmalıdır.

$a * b = 9$ ise a ile b nin alabileceği en büyük değer 9 olur.

8. Reel sayılarda * işlemi, $a * b = \begin{cases} a + 1, & a \text{ çiftsayı} \\ b - 1, & a \text{ teksayı} \end{cases}$ şeklinde tanımlanıyor.

$(5 * a) + (6 * a) + (7 * a) + (8 * a) = 120$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

5 tek sayı olduğundan $5 * a = a - 1$ dir.

6 çift sayı olduğundan $6 * a = 6 + 1 = 7$ dir.

7 tek sayı olduğundan $7 * a = a - 1$ dir.

8 çift sayı olduğundan $8 * a = 8 + 1 = 9$ dur.

$(5 * a) + (6 * a) + (7 * a) + (8 * a) = 120$ olduğuna göre,

$$a - 1 + 7 + a - 1 + 9 = 120 \Rightarrow 2a + 14 = 120$$

$$\Rightarrow a = 53 \text{ tür.}$$

9. $x * y = x + y - mxy + 6$ işleminin birim(etkisiz) elemanı 3 olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

Birim eleman, kendisi ile işleme girdiğinde işlemin sonucu birim elemana eşittir.

Birim eleman e olmak üzere, $e * e = e$ olur.

Buna göre,

$$3 * 3 = 3 \text{ ise}$$

$$3 + 3 - m.3.3 + 6 = 3 \Rightarrow 6 - 9m + 6 = 3$$

$$-9m + 12 = 3 \Rightarrow -9m = -9 \Rightarrow m = 1 \text{ bulunur.}$$

10. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı $(a,b)\Delta(x,y) = (a.x, b + y)$ işleminin etkisiz(birim) elemanını bulunuz.

Çözüm:

Δ işleminin birim elemanı (e_1, e_2) olsun.

Buna göre,

$$(a,b)\Delta(e_1, e_2) = (a,b) \text{ olur.}$$

$$(a.e_1, b + e_2) = (a,b) \Rightarrow a.e_1 = a \text{ ve } b + e_2 = b \text{ dir.}$$

$$e_1 = 1 \text{ ve } e_2 = 0 \text{ bulunur.}$$

O halde Δ işleminin birim elemanı $(e_1, e_2) = (1,0)$ dir.

11. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $x * y = -\frac{3xy}{4}$ işlemine göre, 6'nın tersi kaçtır?

Çözüm:

İlk olarak $*$ işleminin etkisiz(birim) elemanı varsa bulalım.

Etkisiz eleman e olsun. $*$ işlemi değişmeli olduğu için, e elemanını $x * e = x$ eşitliğinden bulabiliriz.

$$x * e = x \Rightarrow -\frac{3xe}{4} = x \Rightarrow -3xe = 4x \Rightarrow e = -\frac{4}{3} \text{ tür.}$$

6'nın $*$ işlemine göre tersi 6^{-1} ise, 6 ile 6^{-1} işleme girdiğinde sonuç birim eleman yani $-\frac{4}{3}$ olmalıdır.

$$6 * 6^{-1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{3.6.6^{-1}}{4} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 6^{-1} = \frac{8}{27} \text{ bulunur}$$

12. Reel sayılar kümesi üzerinde $a * b = 2ab + a + b$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre $5^{-1} * 5$ kaçtır.

Çözüm:

$*$ işleminin etkisiz(birim) elemanı e olmak üzere,

$$5^{-1} * 5 = e \text{ olur.}$$

Buna göre, $*$ işlemi değişmeli olduğu için, e elemanını

$x * e = x$ eşitliğinden bulabiliriz.

$$x * e = x \Rightarrow 2xe + x + e = x$$

$$\Rightarrow e.(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e = 0 \text{ olur.}$$

O halde $5^{-1} * 5 = 0$ dir.

13. Reel sayılar kümesi üzerinde $a * b = x + y - 2xy$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre hangi reel sayının bu işleme göre tersi yoktur?

Çözüm:

Tersi olmayan eleman yutan elemandır. Yutan eleman y olsun.

Buna göre, her x reel sayısı için,

$$x * y = y \Rightarrow x + y - 2xy = y \Rightarrow 2xy = x$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

14. $A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi, her $x, y \in A$ için, $x * y = "x \text{ ile } y \text{ den büyük olmayı}"$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre $*$ işleminin yutan elemanını bulunuz.

Çözüm:

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

Tabloda görüldüğü gibi yutan eleman 1 dir.

15. Aşağıdaki tabloda $A = \{M, A, R, T, I\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi tanımlanmıştır.

*	M	A	R	T	I
M	A	R	T	I	M
A	R	T	I	M	A
R	T	I	M	A	R
T	I	M	A	R	T
I	M	A	R	T	I

Her $x \in A$ için,

$x^n = \underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ defa}}$ olduğuna

göre, $M^2 * (R * T)$ ifadesinin eşitini

bulalım.

Çözüm:

$$M^2 = M * M = A \text{ ve } R * T = A \text{ olduğundan,}$$

$$M^2 * (R * T) = A * A = T \text{ bulunur.}$$

16. Tam sayılar kümesi üzerinde her a, b için

$a \Delta b = a^b + b^a$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre $(2 \Delta 4) \Delta 1$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$2 \Delta 4 = 2^4 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \text{ dir.}$$

$$32 \Delta 1 = 32^1 + 1^{32} = 32 + 1 = 33 \text{ tür.}$$

O halde, $(2 \Delta 4) \Delta 1 = 32 \Delta 1 = 33$ tür.

17. Tam sayılar kümesi üzerinde her a, b için

$a * b = a^2 + b^2 - k$ işlemi tanımlanmıştır. $1 * 2 = 5$ olduğuna göre k kaçtır?

Çözüm:

$$1 * 2 = 5 \Rightarrow 1^2 + 2^2 - k = 5 \Rightarrow 1 + 4 - k = 5 \Rightarrow k = 0$$

bulunur.

18. Δ işlemi $\frac{3}{a \Delta b} = a + \frac{1}{b}$ şeklinde tanımlanmıştır. $5 \Delta 1$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{3}{a \Delta b} = a + \frac{1}{b} \text{ ise } \frac{3}{a \Delta b} = \frac{ab + 1}{b} \Rightarrow a \Delta b = \frac{3b}{ab + 1} \text{ dir.}$$

$$\text{Buna göre, } 5 \Delta 1 = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

19. $a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \Delta b = x \cdot a + 2 \cdot b + 3$ ve $2 \Delta 3 = 13$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$$2 \Delta 3 = 13 \text{ ise } 2x + 2 \cdot 3 + 3 = 13 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

20. $*$ ve Δ işlemleri

$a * b = a^2 - b^2$ ve $a \Delta b = 2a - 3b$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre $2 * (3 \Delta 1)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$3 \Delta 1 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3 \text{ ve}$$

$$2 * 3 = 2^2 - 3^2 = 4 - 9 = -5 \text{ olduğundan}$$

$$2 * (3 \Delta 1) = 2 * 3 = -5 \text{ bulunur.}$$

21. Tam sayılar kümesi üzerinde her a, b için

$a * b = 2a + 3b$ işlemi tanımlanmıştır. $(m + 1) * (2 - m) = 30$ olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm:

$$(m + 1) * (2 - m) = 30 \text{ ise } 2 \cdot (m + 1) + 3 \cdot (2 - m) = 30 \text{ dur.}$$

$$\Rightarrow 2m + 2 + 6 - 3m = 30$$

$$\Rightarrow -m + 8 = 30$$

$$\Rightarrow m = -22 \text{ dir}$$

22. Reel sayılar kümesi üzerinde,

$x \circ y = x - y - xy$ ve $x \Delta y = 2$ işlemleri tanımlanıyor.

$(3 \Delta 17) \circ x = 11$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm:

$x \Delta y = 2$ ise $3 \Delta 17 = 2$ dir.

$(3 \Delta 17) \circ x = 11$ ise $2 \circ x = 11$ olur.

$2 \circ x = 11 \Rightarrow 2 - x - 2x = 11 \Rightarrow -3x = 9 \Rightarrow x = -3$ tür.

23. Tam sayılar kümesi üzerinde her a,b için

$g^{a * b} = 3^{a + b}$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre $(2 * 4) * 1$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$g^{a * b} = 3^{a + b}$ ise

$\Rightarrow (3^2)^{a * b} = 3^{a + b} \Rightarrow 3^{2(a * b)} = 3^{a + b}$

$\Rightarrow 2(a * b) = a + b \Rightarrow a * b = \frac{a + b}{2}$ dir.

Buna göre, $(2 * 4) * 1 = \left(\frac{2 + 4}{2}\right) * 1 = 3 * 1 = \frac{3 + 1}{2} = 2$ dir.

24. Tam sayılar kümesi üzerinde her a,b için $(a + 5) * (3b) = 2a + b - 1$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre $(1 * 6) * 3$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$a + 5 = 1 \Rightarrow a = -4$ tür. $3b = 6 \Rightarrow b = 2$ dir.

$(-4 + 5) * (3 \cdot 2) = 2 \cdot (-4) + 2 - 1 \Rightarrow 1 * 6 = -7$ dir.

$a + 5 = -7 \Rightarrow a = -12$ dir. $3b = 3 \Rightarrow b = 1$ dir.

$(-12 + 5) * (3 \cdot 1) = 2 \cdot (-12) + 1 - 1 \Rightarrow -7 * 3 = -24$ tür.

Buna göre, $(1 * 6) * 3 = -7 * 3 = -24$ bulunur.

25. $A = \{4,7,10,12,15\}$ kümesi üzerinde her $a, b \in A$ için $a * b = "a$ ile b den büyük veya eşit olan" şeklinde bir * işlemi tanımlanıyor. Buna göre * işleminin birim elemanı kaçtır?

Çözüm:

*	4	7	10	12	15
4	4	7	10	12	15
7	7	7	10	12	15
10	10	10	10	12	15
12	12	12	12	12	15
15	15	15	15	15	15

Tabloda görüldüğü gibi birim eleman 4 tür.

26. Tam sayılar kümesi üzerinde her a,b için $a * b = a - b + 2$ işlemi tanımlanmıştır.

$a^1 = a$ ve $a^n = a * a^{n-1}$ olduğuna göre,

$10 * a^2 = a * 1$ eşitliğini sağlayan a tamsayısı kaçtır?

Çözüm:

$a^2 = a * a = a - a + 2 = 2$ olur.

Buna göre,

$10 * a^2 = a * 1 \Rightarrow 10 * 2 = a * 1 \Rightarrow 10 - 2 + 2 = a - 1 + 2$

$\Rightarrow 10 = a + 1 \Rightarrow a = 9$ bulunur.

27. Reel sayılar kümesinin üzerinde tanımlı, $x \circ y = x + y + xy$ işlemine göre, birim eleman hariç tersi kendisine eşit olan sayı kaçtır?

Çözüm:

Önce birim elemanı bulalım.

$x \circ e = x \Rightarrow x + e + xe = x \Rightarrow e \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow e = 0$ dir.

Tersi kendisine eşit olan sayı x olsun. O halde

$x \circ x^{-1} = e$ ise $x \circ x = 0$ olur.

$\Rightarrow x + x + x \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = -2$

Buna göre $x = 0$ birim eleman olduğu için $x = -2$ dir.

28. $\mathbb{R} - \{-1\}$ kümesi üzerinde $x \circ y = x + y + xy$ ve $x \Delta y = x \circ (y \circ 3)$ işlemleri tanımlanıyor. Buna göre Δ işleminin birim elemanı kaçtır?

Çözüm:

$$x \circ y = x + y + xy \text{ ve } x \Delta y = x \circ (y \circ 3) \text{ ise,}$$

$$x \Delta y = x \circ (y \circ 3) = x \circ (y + 3 + 3y)$$

$$= x + y + 3 + 3y + x.(y + 3 + 3y)$$

$$= x + y + 3 + 3y + x.y + 3x + 3xy$$

$x \Delta y = 4x + 4y + 4xy + 3$ olur. Δ işleminin birim elemanı e olsun.

Buna göre,

$$x \Delta e = x \text{ ise } 4x + 4e + 4xe + 3 = x \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 3x + 4e.(1+x) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3.(x+1) + 4e.(1+x) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1).(4e+3) = 0$$

$$\Rightarrow e = -\frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

29. Tam sayılar kümesinde $*$ işlemi,
 $x * y = 3x + xy + 3y + 6$ şeklinde tanımlanıyor. Hangi elemanın tersi yoktur?

Çözüm:

Yutan elemanın tersi yoktur.

Buna göre,

$x * y = y$ eşitliğini sağlayan y değerini bulmamız yeterli olacaktır.

$$x * y = y \Rightarrow 3x + xy + 3y + 6 = y$$

$$\Rightarrow x.(3+y) + 2.(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(3+y) = 0$$

$$\Rightarrow y = -3 \text{ bulunur.}$$

30. Aşağıdaki tabloda $*$ işlemi verilmiştir.

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	1	2
4	4	5	1	2	3
5	5	1	2	3	4

$2 * (3^{-1} * 4)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

Tablodan $*$ işleminin 1 olduğu görülür.

$$3 * 3^{-1} = 1 \Rightarrow 3^{-1} = 4 \text{ tür.}$$

Buna göre,

$$2 * (3^{-1} * 4) = 2 * (4 * 4) = 2 * 2 = 3 \text{ bulunur.}$$

Konu Bitmiştir.