FONKSİYONLAR

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, A dan B ye bir f bağıntısı bağıntısı tanımlansın.

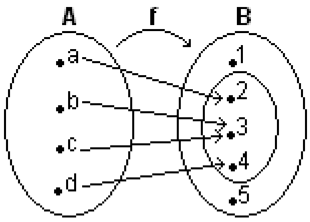
f bağıntısı, A'nın her elemanını B'nin yalnız bir elemanına eşliyor ise f bağıntısına A dan B ye fonksiyon denir ve

$f : A \to B$ şeklinde gösterilir.

A kümesine tanım kümesi,
B kümesine de değer kümesi denir.

A kümesinin elemanlarının B kümesindeki eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye fonksiyonun görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

Örnek:



A kümesindeki her elemanın B kümesinde yalnız bir tane görüntüsü vardır. **f bağıntısı fonksiyondur.**

Tanım kümesi $A = \{a, b, c, d\}$ ve değer kümesi $B = \{1,2,3,4,5\}$ tir.

Görüntü kümesi $f(A) = \{2,3,4\}$ tür.

$f(A) \subset B$ dir.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ için
$f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, d)\}$ bağıntısı A dan B ye ise f nin fonksiyon olup olmadığını belirtiniz.

Çözüm:

A kümesinin her elemanı f bağıntısına göre yalnız bir görüntüsü vardır. A kümesinin bir elemanı B de birden fazla elemanla eşelenmemiştir. f fonksiyondur.

Not:

A kümesindeki elemanları kişiler B kümesindeki elemanları evler olarak düşünelim. Bağıntının fonksiyon olması için her kişi bir eve gidecek ve bir kimse iki eve gitmeyecek ayrıca evsiz kimse kalmayacak.

Örnek:

$A = \{2,4,6\}$ ve $B = \{1,3,7,9\}$ olmak üzere $f : A \to B$ için
$f = \{(2,7), (4,3), (6,1)\}$ bağıntısı fonksiyon mudur?

Çözüm:

f bağıntısına göre, A daki her elemanın bir görüntüsü vardır ve A da tanımsız eleman yoktur. fonksiyondur.

Uyarı

$f : A \to B$ fonksiyon ve $(x, y) \in f$ ise $f : x \to y$ veya $f(x) = y$ şeklinde gösterilir ve " x in f altındaki görüntüsü y dir" denir.

Örnek:

$A = \{2,4,6,8\}$ ve $B = \{3,7,9,11\}$ olmak üzere $f : A \to B$ için
$f = \{(2,7), (4,3)\}$ bağıntısı fonksiyon mudur?

Çözüm:

f bağıntısına göre $6 \in A$ ve $8 \in A$ olmasına rağmen $f(6)$ ve $f(8)$ tanımlı değildir. Hem $f(6) \notin B$ hem de $f(8) \notin B$ olduğundan f fonksiyon değildir.

Örnek:

$A = \{2,4,6\}$ ve $B = \{3,7,9,11\}$ olmak üzere $f : A \to B$ için
$f = \{(2,7), (4,7), (6,7)\}$ bağıntısı fonksiyon mudur?

Çözüm:

f bağıntısına göre A nın her elemanının bir tek görüntüsü var ve A da tanımsız eleman yoktur. Buna göre f fonksiyondur.

Örnek:

$f = \{(x, y) : y = 3x + 5,\ x \in R, y \in R\}$ bağıntısı fonksiyon mudur?

Çözüm:

Her $x \in R$ için $y = 3x + 5 \in R$ olduğundan f bağıntısı bir fonksiyondur.

Örnek:

$A = \{2, 4, 6\}$ ve $B = \{3, 7, 9, 11\}$ olmak üzere $f : A \to B$ için $f = \{(2,3), (4,7), (6,9)\}$ ise $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ nedir?

Çözüm:

f bağıntısındaki

$(2, 3)$ sıralı ikilisi $f(2) = 3$,

$(4, 7)$ sıralı ikilisi $f(4) = 7$,

$(6, 9)$ sıralı ikilisi ise $f(6) = 9$ anlamında olduğundan

$f(2) = 3$, $f(4) = 7$ ve $f(6) = 9$ bulunur.

Örnek:

$A = \{2,3,4\}$, $B = \{1,4,5,6,8\}$, $f : A \to B$ ve $f = \{(2,1), (3,1), (4,6)\}$ olduğuna göre $f(2) + f(3) + f(4)$ kaçtır?

Çözüm:

$(2,1) \in f$ olduğundan $f(2) = 1$ dir.

$(3,1) \in f$ olduğundan $f(3) = 1$ dir.

$(4,6) \in f$ olduğundan $f(4) = 6$ dır.

Buna göre, $f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 1 + 6 = 8$ dir.

Örnek:

$A = \{-1,0,1\}$, $B = \{0,1\}$, $f : A \to B$, $f(x) = x^2$ olduğuna göre, $f(0) + f(1)$ in değerini bulunuz.

Çözüm:

$x = 0$ için $f(0) = 0^2 = 0$ dır.

$x = 1$ için $f(1) = 1^2 = 1$ dir.

Buna göre, $f(0) + f(1) = 0 + 1 = 1$ dir.

Örnek:

$A = \{-2,-1,0,1\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye f fonksiyonu $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyonu inceleyelim.

Çözüm:

$f(x) = x^2 + 1$ ise,

$x = -2$ için $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ tir.

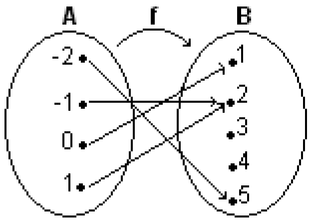
$x = -1$ için $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ dir.

$x = 0$ için $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ dir.

$x = 1$ için $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ dir.

Bu fonksiyonun liste yöntemiyle gösterimi

$f = \{(-2,5), (-1,2), (0,1), (1,2)\}$ dir.



Bu fonksiyonun şema ile gösterimi yanda verilmiştir.

f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{-2,-1,0,1\}$ dir.

Değer kümesi $B = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

Görüntü kümesi $f(A) = \{1,2,5\}$ tir.

Sonuç

A kümesinden B kümesine tanımlanan f bağıntısının fonksiyon olabilmesi için,

- Tanım kümesinde (A da) görüntüsü olmayan (açıkta) eleman kalmamalı. Fakat değer kümesinde (B de) açıkta (eşlenmeyen) eleman kalabilir.
- Tanım kümesindeki (A daki) her elemanın birden fazla görüntüsü olmamalıdır.

Örnek:

$A=\{2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $f:A\to B$,
$f=\{(2,a),(2,b),(3,c),(4,d\}$ bağıntısını inceleyelim.

Bu bağıntı fonksiyon değildir. Çünkü $f(2)=a$ ve $f(2)=b$ olmak üzere $f(2)$ iki ayrı değer almıştır.

Örnek:

$A=\{2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $f:A\to B$,
$f=\{(2,c),(3,a),(4,d)\}$ bağıntısını inceleyelim.

Bu bağıntı fonksiyondur. Yukarıdaki sonuçta verilen her iki koşulu da sağlamaktadır.

Örnek:

$A=\{2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $f:A\to B$,
$f=\{(2,c),(3,c),(4,c)\}$ bağıntısını inceleyelim.

Bu bağıntı fonksiyondur. Yukarıdaki sonuçta verilen her iki koşulu da sağlamaktadır.

Örnek:

$f\subset R\times R$ olmak üzere $f=\left\{(x,y)\mid x,y\in R \text{ ve } y=\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right\}$ bağıntısını inceleyelim.

$y=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ bağıntısında $x=2$ ve $x=-2$ için payda tanımsız olur. Yani tanım kümesindeki -2 ve 2 elemanları değer kümesindeki bir eleman ile eşlenmediği için (tanım kümesinde açıkta eleman kaldığı için) f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek:

$f\subset R\times R$ olmak üzere $f=\{(x,y)\mid x,y\in R \text{ ve } |y|=x^2+3\}$ bağıntısını inceleyelim.

$|y|=x^2+3$ bağıntısında tanım kümesindeki her elemanın iki görüntüsü vardır. $x=1$ için $y=4$ ve $y=-4$ gibi. Bu durumda f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek:

$f\subset N\times N$ olmak üzere $f=\{(x,y)\mid x,y\in N \text{ ve } y=x-5\}$ bağıntısını inceleyelim.

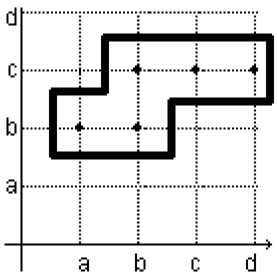
$y=x-5$ bağıntısında tanım kümesindeki 0,1,2,3,4 elemanlarının görüntüsü yoktur. Örneğin $x=1$ için $y=1-5=-4\notin N$ dir. Bu durumda f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek:

$f\subset Z\times Z$ olmak üzere
$f=\left\{(x,y)\mid x,y\in Z \text{ ve } y=\dfrac{2x+1}{3}\right\}$ bağıntısını inceleyelim.

$y=\dfrac{2x+1}{3}$ bağıntısında tanım kümesindeki bazı elemanların görüntüsü yoktur. Örneğin $x=2$ için $y=\dfrac{2.2+1}{3}=\dfrac{5}{3}\notin Z$ dir. Bu durumda f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek:



$A=\{a,b,c,d\}$, $f\subset A\times A$ olmak üzere f bağıntısının grafiği yanda verilmiştir. Bu bağıntının fonksiyon olup olmadığını inceleyelim.
Bu f bağıntısını liste yöntemiyle gösterelim.

$f=\{(a,b),(b,b),(b,c),(c,c),(d,c)\}$

olur, f bağıntısında tanım kümesindeki b elemanının b ve c gibi farklı iki görüntüsü vardır. Bu durumda, f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek:

$f:A\to B$ $f(x)=3x+2$ fonksiyonunun görüntü kümesi $B=\{3,5,7\}$ olduğuna göre tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonun da, tanım kümesinin elemanlarına karşılık gelecek görüntüleri verildiğinden, $f(x) = 3x + 2$ fonksiyonu görüntü kümesinin elemanlarıyla tek tek eşitleyerek tanım kümesi elde edilecektir.

Görüntü kümesinin elemanları 3, 5, 7 ye eşitleme yapılırsa:

$3x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$3x + 2 = 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

$3x + 2 = 7 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

olduğundan tanım kümesi $A = \left\{ \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3} \right\}$ olacaktır.

Fonksiyon Sayısı

A ve B kümeleri verildiğinde, $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A dan B ye tanımlanabilecek fonksiyon sayısı n^m dir..

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1,2\}$ kümeleri üzerinden tanımlanabilecek fonksiyon olmayan bağıntı sayısını bulunuz.

Çözüm:

A dan B ye tanımlanabilecek bağıntı sayısı

$2^{s(A \times B)} = 2^{3.2} = 64$ tür.

A dan B ye tanımlanabilen fonksiyon sayısı

$s(B)^{s(A)} = 2^3 = 8$ dir.

Buna göre A dan B ye tanımlanabilen fonksiyon olmayan bağıntı sayısı, 64 – 8 = 56 dır.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{10, 11, 12, 13, 14\}$ kümeleri üzerinden tanımlanabilecek fonksiyon sayısını bulunuz.

Çözüm:

Fonksiyon $A \rightarrow B$ ye tanımlanacak ise $s(A) = 4$ ve $s(B) = 5$ için fonksiyon sayısı $5^4 = 625$ olacaktır.

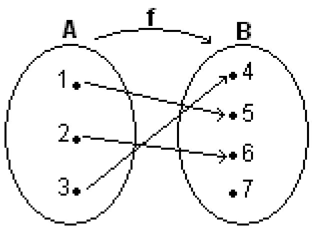
Fonksiyon $B \rightarrow A$ ye tanımlanacak ise $s(A) = 4$ ve $s(B) = 5$ için fonksiyon sayısı $4^5 = 1024$ olacaktır.

Fonksiyon Çeşitleri

11. Bire Bir (1 – 1) Fonksiyon

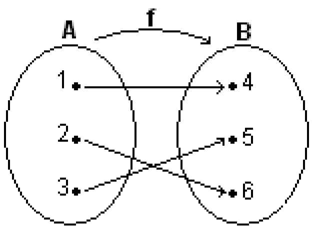
$f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. A nın her elemanının görüntüsü farklı ise f bire bir (1-1) fonksiyondur. Yani Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ veya $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonuna ***bire bir (1-1) fonksiyon*** denir.

Örnek:



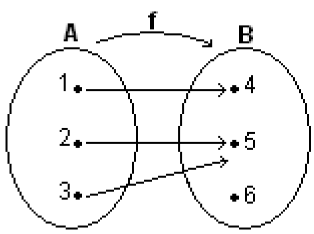
Yanda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonunda, A nın her elemanının görüntüsü farklıdır. Bu durumda f fonksiyonu bire birdir.

Örnek:



Yanda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonunda, A nın her elemanının görüntüsü farklıdır. Bu durumda f fonksiyonu bire birdir.

Örnek:



Yanda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonunda, A nın her elemanının görüntüsü farklı olmadığından f fonksiyonu bire bir değildir.

Örnek:

$f \subset R \times R$ olmak üzere $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunu inceleyelim.

$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ dir.

$f(1) = f(-1)$ olduğundan f fonksiyonu bire bir değildir.

Örnek:

$A = \{1,3,5\}$ ve $B = \{-4,0,4,8\}$ kümeleri için $f : A \to B$, $f(x) = -2x + 6$ fonksiyonu bire bir (1-1) fonksiyon mudur?

Çözüm:

Tanım kümesi $A = \{1,3,5\}$ için değerleri bulunursa

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2 \cdot 1 + 6 = -2 + 6 = 4$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -2 \cdot 3 + 6 = -6 + 6 = 0$

$x = 5 \Rightarrow f(5) = -2 \cdot 5 + 6 = -10 + 6 = -4$

Farklı elemanların görüntüleri de farklı olduğundan $\left(\forall x, y \in A \text{ için } x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\right)$ f fonksiyonu bire bir (1-1) fonksiyondur.

Örten Fonksiyon

$f : A \to B$ fonksiyonu için $f(A) = B$ ise f fonksiyonuna ***örten fonksiyon*** denir.

Başka bir deyişle B değer kümesinde boşta eleman kalmıyorsa f örten fonksiyondur.

Örnek:

$A = \{-1,0,1\}$ ve $B = \{-3,-1,1\}$ kümeleri için $f : A \to B$ $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu örten fonksiyon mudur?

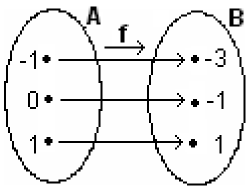
Çözüm:

Tanım kümesi $A = \{-1,0,1\}$ için değerleri bulunursa

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$

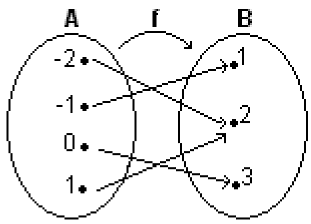
$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot (0) - 1 = 0 - 1 = -1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot (1) - 1 = 2 - 1 = 1$



$f(A) = \{-3,-1,1\}$ dir. $f(A) = B$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyondur.

Örnek:



Yandaki şekilde verilmiş olan f fonksiyonu örtendir. Çünkü değer kümesinde (B de) eşlenmemiş (açıkta kalmış) eleman yoktur. Diğer bir ifade ile değer kümesi görüntü kümesine eşit olduğu için f fonksiyonu örtendir.

Örnek:

$f : N \to N$, $f(x) = 2x + 3$ olmak üzere, f fonksiyonu örten değildir.

Çünkü değer kümesinde eşlenmemiş eleman vardır. Örneğin, x yerine hangi doğal sayı yazılırsa yazılsın sonuç sıfır olamaz. Bu durumda değer kümesinde bulunan 0 sayısı eşlenmemiştir.
Bu fonksiyon bire birdir.

Örnek:

$f : Z \to Z$, $f(x) = x + 3$ olmak üzere, f fonksiyonu örtendir. Çünkü açıkta eleman yoktur. Bu fonksiyon bire birdir.

İçine Fonksiyon

$f : A \to B$ fonksiyonu için $f(A) \neq B$ ise f fonksiyonuna ***içine fonksiyon*** denir.

Başka bir deyişle, değer kümesinde eşlenmeyen en az bir eleman kalırsa f fonksiyonuna ***içine fonksiyon*** denir.

Örnek:

$A = \{-1,0,1,2\}$ ve $B = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ kümeleri için $f : A \to B$ $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu içine fonksiyon mudur?

Çözüm:

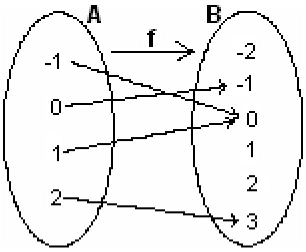
$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonun tanım kümesi $A = \{-1,0,1,2\}$ için değerleri bulunursa

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

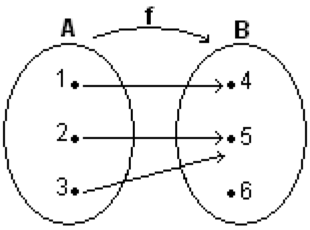
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$



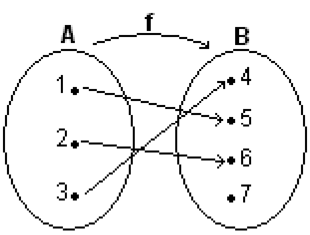
$f(A) = \{-1,0,3\}$ dür. $f(A) \neq B$ olduğundan f fonksiyonu içine fonksiyondur.

Örnek:



Yanda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonu içinedir. Çünkü değer kümesi B de 6 elemanı eşlenmemiştir.

Örnek:



Yanda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonu içinedir. Çünkü değer kümesi B de 7 elemanı eşlenmemiştir.
Bu fonksiyon bire birdir.

Örnek:

$f \subset Z \times Z$ olmak üzere $f(x) = 2x$ fonksiyonu içinedir. Çünkü değer kümesi olan tam sayılar kümesindeki tek sayılar eşlenmemiştir. Örneğin $f(x) = 3$ olacak şekilde x tamsayısı yoktur.

Sabit Fonksiyon

$f : A \to B$ için A kümesinin bütün elemanları B kümesinin yalnız bir elemanı ile eşleniyorsa f fonksiyonuna ***sabit fonksiyon*** denir.

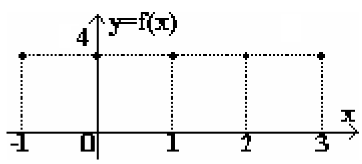
$f : A \to B$ ve $b \in B$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = b$ ise f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Örnek:

$A = \{-1,0,1,2,3\}$ ve $B = \{-2,0,2,3,5\}$ kümeleri için $f : A \to B$ $f(x) = 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon mudur? Grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Tanım kümesi $A = \{-1,0,1,2,3\}$ için değerleri hesaplanırsa bunların 4 olduğu görülecektir. Bu da fonksiyonun sabit fonksiyon olduğunu gösterir.



$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 4$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 4$

olduğundan f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 5 + (m-7)x + (k+3)x^2$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olabilmesi için m ve k ne olmalıdır?

Çözüm:

Sabit fonksiyon $f(x) = c$, $(c \in R)$ olduğundan sabit fonksiyon şu şekilde ifade edilebilir:

$f(x) = 5x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \cdots + 0x^n$.

Fonksiyonların eşitliğinden

$5 + (m-7)x + (k+3)x^2 = 5x^0 + 0x^1 + 0x^2$ yazılabilir.

Bu durumda

$m - 7 = 0$ ve $k + 3 = 0$ olacaktır. Buradan $m = 7$ ve $k = -3$ olduğu takdirde verilen $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon olacaktır.

Birim (Özdeşlik) Fonksiyonu

$f : A \to A$ ve $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ fonksiyonuna A nın birim (özdeşlik) fonksiyon denir. Birim (özdeşlik) fonksiyon **I** ile gösterilir. $I(x) = x$ dir.

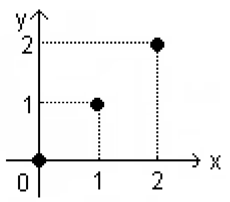
Birim fonksiyonda A nın her elemanının görüntüsü yine kendisidir.

Örnek:

$A = \{0,1,2\}$ kümesi için $f : A \to A$, $f(x) = x$ birim fonksiyon olduğunu gösteriniz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Tanım kümesi $A = \{0,1,2\}$ için değerler bulunursa birim fonksiyon olduğu görülecektir.



$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2$

Böylece f fonksiyonunun bire bir ve örten fonksiyon olduğu da görülecektir.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = d + (m-n)x + (k-r)x^2$ fonksiyonunun birim fonksiyon olabilmesi için **d**, **m**, **n**, **k**, **r** ne olmalıdır?

Çözüm:

Birim fonksiyon $f(x) = x$ olduğundan birim fonksiyon şu şekilde de ifade edilebilir:

$f(x) = 0x^0 + 1x^2 + 0x^2 + \cdots + 0x^n$. Fonksiyonların eşitliğinden

$d + (m-n)x + (k-r)x^2 = 0x^0 + 1x^1 + 0x^2$ yazılabilir.

Bu durumda

$d = 0$, $m - n = 0$ ve $k - r = 0$ olacaktır.

Buradan $d = 0$, $m = n$ ve $k = r$ olduğu takdirde verilen $f(x)$ fonksiyonu birim fonksiyon olacaktır.

Örnek:

$A = \{-1,0,1\}$ olmak üzere $f : A \to A$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunu inceleyelim.

Çözüm:

$f(x) = x^3$ olduğu için,

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 = -1$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 = 0$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 = 1$

A nın her elemanının görüntüsü yine kendisi olduğu için f, birim fonksiyondur.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = c + bx + ax^2$ fonksiyonu birim fonksiyon ise,

$a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ dır.

Eşit Fonksiyonlar

$f : A \to B$ ve $g : A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, f ile g ye eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$A = \{0,-2\}$, $B = \{5,9\}$ olmak üzere $f : A \to B$, $f(x) = x^2 + 5$ ve $g : A \to B$, $g(x) = -2x + 5$ ile tanımlanan f ve g eşit fonksiyonlar mıdır?

Çözüm:

$A = \{0,-2\}$ tanım kümesi için

$$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = 0^2 + 5 = 5 \\ g(0) = -2.0 + 5 = 5 \end{array}\right\} \text{ise } f(0) = g(0)$$

$$x = -2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9 \\ g(-2) = -2.(-2) + 5 = 9 \end{array}\right\} \text{ise } f(-2) = g(-2)$$

olduğundan $f = g$ dir.

Örnek:

$A = \{-1,0,1\}$, $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ olmak üzere $f : A \to B$, $f(x) = x^3$ ve $g : A \to B$, $g(x) = x$ ile tanımlanan f ve g eşit fonksiyonlar mıdır?

Çözüm:

Tanım kümesi $A = \{-1,0,1\}$ nın elemanları için f ve g fonksiyonlarının değerleri hesaplanırsa:

$$x = -1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 = -1 \\ g(-1) = -1 \end{array}\right\} \text{ise } f(-1) = g(-1)$$

$$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = 0^3 = 0 \\ g(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ise } f(0) = g(0)$$

$$x = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 = 1 \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \text{ise } f(1) = g(1$$

olduğundan $f = g$ dir.

Tek ve Çift Fonksiyon

$f : A \to B$, fonksiyonunda $\forall x \in A$ için
$f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.
$f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

Örnek:

$f(x) = 2x^2$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olduğunu bulunuz.

Çözüm:

$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2$ olduğundan $f(x) = 2x^2$ çift fonksiyondur.

Örnek:

$f(x) = x^5 - x^3$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olduklarını bulunuz.

Çözüm:

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 = -x^5 + x^3$$

$$= -(x^5 - x^3) = -f(x)$$

olduğundan $f(x) = x^5 - x^3$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 2x^3 + 5x$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^3 + 5.(-x) = -2x^3 - 5x$$

$= -(2x^3 + 5x) = -f(x)$

Buna göre $f(-x) = -f(x)$ olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Örnek:

$f : R \to R, \quad f(x) = x^2 + |x|$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$

Buna göre $f(-x) = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek:

$f : R \to R, \quad f(x) = 2x^2 - 3x$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$f(-x) = 2.(-x)^2 - 3.(-x) = 2x^2 + 3x$

Buna göre $f(-x) = f(x)$ veya $f(-x) = -f(x)$ olmadığından f fonksiyonu ne çift ne de tek fonksiyondur.

Fonksiyonlarda Dört İşlem

$A \cap B \neq \phi$ olmak üzere,
$f : A \to R$ ve $g : B \to R$ fonksiyonları tanımlansın.

1. $f + g : A \cap B \to R$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ dir.

2. $f - g : A \cap B \to R$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ dir.

3. $f.g : A \cap B \to R$, $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ tir.

4. $\forall x \in A \cap B$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere,
$\frac{f}{g} : A \cap B \to R$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tir.

5. $c \in R$ olmak üzere, $c.f : A \to R$, $(c.f)(x) = c.f(x)$ tir.

Örnek:

$f : R \to R, \ f(x) = x + 1$ ve $g : R \to R, \ g(x) = 3x - 5$ ise $(f+g)(x)$ nedir?

Çözüm:

$R \cap R = R$ olup, $f + g : R \to R$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ olduğundan

$(f+g)(x) = (x+1) + (3x-5) = 4x - 4$ bulunur.

Örnek:

$f : R \to R, \ f(x) = x^2 - 3x$ ve $g : R \to R, \ g(x) = x - 3$ ise $(f+g)(x)$ nedir?

Çözüm:

$R \cap R = R$ olup, $f + g : R \to R$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ olduğundan

$(f+g)(x) = (x^2 - 3x) + (x - 3) = x^2 - 2x - 3$ bulunur.

Örnek:

$f = \{(1,3), (2,4), (3,7)\}$ ve $g = \{(1,5), (2,8), (5,14)\}$ ise $f + g$ nedir?

Çözüm:

f fonksiyonu için tanım kümesi $A = \{1,2,3\}$ ve görüntü kümesi $D = \{3,4,7\}$, g fonksiyonu için tanım kümesi $B = \{1,2,5\}$ ve görüntü kümesi $E = \{5,8,14\}$ dir.

$f + g : A \cap B \to C$ biçiminde olacağından $A \cap B = \{1,2\}$ olur. Bu durumda

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 3 + 5 = 8 \Rightarrow (1,8) \in f + g$

$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 8 = 12 \Rightarrow (2,12) \in f + g$

Bu durumda $f + g = \{(1,8), (2,12)\}$ dir.

Örnek:

$f: R \to R,\ f(x) = 2x + 1$ ve $g: R \to R,\ g(x) = x^2 - 3x - 2$ ise $f + g$ nedir?

Çözüm:

f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri R, değer kümeleri R dir. $f + g : R \cap R \to R$ biçiminde olacağından

$R \cap R = R$ olur.

Bu durumda

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x+1) + (x^2 - 3x - 2)$$

$$= x^2 - x - 1$$

olduğundan $(f+g)(x) = x^2 - x - 1$ dir.

Örnek:

$f: R \to R,\ f(x) = x + 1$ ve $g: R \to R,\ g(x) = 3x - 5$ ise $(f-g)(x)$ nedir?

Çözüm:

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ olduğundan

$(f-g)(x) = (x+1) - (3x-5) = x + 1 - 3x + 5 = -2x + 6$

bulunur.

Örnek:

$f = \{(1,3),(2,4),(3,7)\}$ ve $g = \{(1,5),(2,8),(5,14)\}$ ise $f - g$ nedir?

Çözüm:

f fonksiyonu için tanım kümesi $A = \{1,2,3\}$ ve görüntü kümesi $D = \{3,4,7\}$, g fonksiyonu için tanım kümesi $B = \{1,2,5\}$ ve görüntü kümesi $E = \{5,8,14\}$ dir.

$f - g : A \cap B \to C$ biçiminde olacağından $A \cap B = \{1,2\}$

olur.

Bu durumda,

$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 3 - 5 = -2 \Rightarrow (1,-2) \in f - g$

$(f-g)(2) = f(2) - g(2) = 4 - 8 = -4 \Rightarrow (2,-4) \in f - g$

olup bu durumda $f - g = \{(1,-2),(2,-4)\}$ dir.

Örnek

$f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 3x + 1$ ve $g: R \to R,$ $g(x) = -3x^2 - 3x - 5$ ise $(f-g)(x)$ nedir?

Çözüm:

f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri R, görüntü kümeleri R dir. $f - g : R \cap R \to R$ biçiminde olacağından

$R \cap R = R$ olur.

Bu durumda,

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$= (x^2 - 3x + 1) - (-3x^2 - 3x - 5)$$

$$= x^2 - 3x + 1 + 3x^2 + 3x + 5 = 4x^2 + 6$$

Örnek:

$f = \{(1,3),(2,4),(3,7)\}$ ise $2 \cdot f$ nedir?

Çözüm:

$f = \{(1,3),(2,4),(3,7)\}$ fonksiyonu için

$x = 1 \Rightarrow (2 \cdot f)(1) = 2f(1) = 2 \cdot 3 = 6$

$x = 2 \Rightarrow (2 \cdot f)(2) = 2f(2) = 2 \cdot 4 = 8$

$x = 3 \Rightarrow (2 \cdot f)(3) = 2f(3) = 2 \cdot 7 = 14$

olduğundan $2 \cdot f = \{(1,6),(2,8),(3,14)\}$

Örnek:

$f: R \to R,\ f(x) = 3x - 5$ ve $g: R \to R,\ g(x) = x^2 + 5x + 8$ ise $(2f - 3g)(x)$ nedir?

Çözüm:

f ve g fonksiyonlarının skaler ile çarpımları bulunacaktır.

$(2f-3g)(x)=2f(x)-3g(x)$

$=2(3x-5)-3(x^2+5x+8)$

$=6x-10-3x^2-15x-24$

$=-3x^2-9x-34$

olduğundan $(2f-3g)(x)=-3x^2-9x-34$ dir.

Örnek:

$f=\{(1,3),(2,4),(3,7)\}$ ve $g=\{(1,5),(2,8),(5,14)\}$ ise $f\cdot g$ nedir?

Çözüm:

f fonksiyonu için tanım kümesi $A=\{1,2,3\}$ ve görüntü kümesi $D=\{3,4,7\}$, g fonksiyonu için tanım kümesi $B=\{1,2,5\}$ ve görüntü kümesi $E=\{5,8,14\}$ dir.

$f\cdot g : A\cap B\to C$ biçiminde olacağından $A\cap B=\{1,2\}$ olur.

Bu durumda

$(f\cdot g)(1)=f(1)\cdot g(1)=3\cdot 5=15\Rightarrow(1,15)\in f.g$

$(f\cdot g)(2)=f(2)\cdot g(2)=4\cdot 8=32\Rightarrow(2,32)\in f.g$

Bu durumda $f\cdot g=\{(1,15),(2,32)\}$ dir.

Örnek:

$f:R\to R,\ f(x)=x+1$ ve $g:R\to R,\ g(x)=x^2+1$ ise $(f\cdot g)(x)$ nedir?

Çözüm:

f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri R, görüntü kümeleri ise R dir. $f\cdot g$ nin tanım kümesi $R\cap R=R$ olacaktır.

Bu durumda

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+1)(x^2+1)$

$=x^3+x^2+x+1$

olduğundan $(f\cdot g)(x)=x^3+x^2+x+1$ dir.

Örnek:

$f=\{(1,3),(2,4),(3,7)\}$ ve $g=\{(1,5),(2,8),(5,14)\}$ ise $\frac{f}{g}$ nedir?

Çözüm:

f fonksiyonu için tanım kümesi $A=\{1,2,3\}$ ve görüntü kümesi $D=\{3,4,7\}$, g fonksiyonu için tanım kümesi $B=\{1,2,5\}$ ve görüntü kümesi $E=\{5,8,14\}$ dir.

$\frac{f}{g}: A\cap B\to R$ biçiminde olacağından $A\cap B=\{1,2\}$ olur.

Bu durumda

$\left(\frac{f}{g}\right)(1)=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{3}{5}\Rightarrow\left(1,\frac{3}{5}\right)\in\frac{f}{g}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(2)=\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(2,\frac{1}{2}\right)\in\frac{f}{g}$

Bu durumda $\frac{f}{g}=\left\{\left(1,\frac{3}{5}\right),\left(2,\frac{1}{2}\right)\right\}$ dir.

Örnek:

$f:R\to R,\ f(x)=x^2-1$ ve $g:R^+\to R,\ g(x)=x+1$ ise $\frac{f}{g}$ nedir?

Çözüm:

f fonksiyonunun tanım kümesi R olmasına rağmen g fonksiyonunun tanım kümesi R^+ dir. Görüntü kümeleri ise

R dir. $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun tanım kümesi ise $R \cap R^{+} = R^{+}$ dir.

Bu durumda

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$$

olduğundan $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 1$ dir.

Örnek:

R den R ye tanımlı $f(x) = x^2 - 3x$ ve $g(x) = x - 3$ fonksiyonları veriliyor. $(2f - g)(3)$ ün değerini bulalım.

Çözüm:

$$(2f - g)(x) = (2f)(x) - g(x) = 2.f(x) - g(x)$$

$$= 2.(x^2 - 3x) - (x - 3) = 2x^2 - 6x - x + 3$$

$$= 2x^2 - 7x + 3$$

Buna göre,

$(2f - g)(3) = 2.3^2 - 7.3 + 3 = 2.9 - 21 + 3 = 0$ bulunur.

Örnek:

R den R ye tanımlı $f(x) = x^2 - 3x$ ve $g(x) = x - 3$ fonksiyonları veriliyor. $(f.g)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 3x)(x - 3)$$

$$= x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = x^2 - 3x$, $g : R - \{3\} \to R,\ g(x) = x - 3$

olduğuna göre

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x.(x-3)}{x - 31} = x$$

olduğundan $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x$ dir.

Örnek:

$f : \{1,2,3\} \to R$, $f(x) = x^2 + x$ ve $g : \{-1,1,2\} \to R$, $g(x) = 2x + 3$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $f + 3g$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm:

$f + 3g$ fonksiyonu $\{1,2,3\} \cap \{-1,1,2\} = \{1,2\}$ kümesinden R ye tanımlıdır.

Buna göre,

$$(f + 3g)(x) = f(x) + 3.g(x) = x^2 + x + 3.(2x + 3)$$

$$= x^2 + x + 6x + 9 = x^2 + 7x + 9 \text{ olup,}$$

$(f + 3g)(1) = 1^2 + 7.1 + 9 = 1 + 7 + 9 = 17$ dir.

$(f + 3g)(2) = 2^2 + 7.2 + 9 = 4 + 14 + 9 = 27$ dir.

O halde, $f + 3g$ fonksiyonunun, tanım kümesi $\{1,2\}$ ve görüntü kümesi $\{17,27\}$ dir.

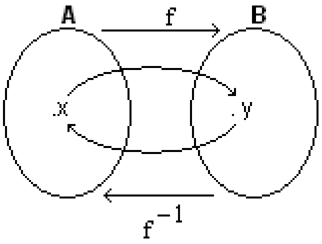
Bir Fonksiyonun Tersi

$f : A \to B$, $f = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,

$$f^{-1} : B \to A,\ f^{-1} = \{(y,x) \mid y \in B \text{ ve } x \in A\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi denir. f fonksiyonunun tersi f^{-1} ile gösterilir.

$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ dir.



$(x, y) \in f$ ise

$(y, x) \in f^{-1}$

olacağından

$y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ dir.

Örnek:

$f = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10)\}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f : A \to B$ olduğundan $f^{-1} : B \to A$ olacaktır.

Aynı zamanda, şu biçimde de ifade edilebilir

$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

Bu durumda $f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5), (8,7), (10,9)\}$ olur.

Örnek:

$f = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10)\}$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna ait tanım ve görüntü kümelerini bulunuz

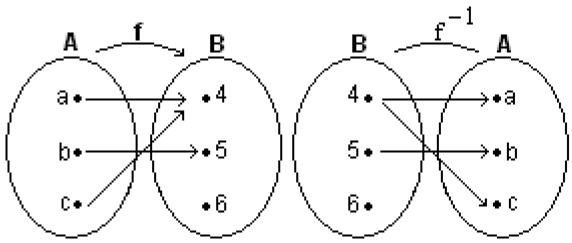
Çözüm:

f nin ters fonksiyonu $f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5), (8,7), (10,9)\}$ olacaktır.

Tanım kümesi $A = \{2,4,6,8,10\}$ ve görüntü kümesi $B = \{1,3,5,7,9\}$ dur.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ kümesinden $B = \{4,5,6\}$ kümesine tanımlı $f = \{(a,4), (b,5), (c,4)\}$ fonksiyonunu inceleyelim.



$f^{-1} = \{(4, a), (4, c), (5, b)\}$ dir. f^{-1} bağıntısında tanım kümesi olan B de 4 elemanı iki eleman ile eşleştiğinden ve 6 elemanı açıkta kaldığından f^{-1} bağıntısı fonksiyon değildir.

Sonuç

$f : A \to B$ bire bir ve örten bir fonksiyon değilse, $f^{-1} : B \to A$ bir fonksiyon olmayıp bir bağıntıdır.

Ters Fonksiyonun Bulunması

$y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğundan $f^{-1}(x)$ i bulmak için x, y türünden bulunur ve x ile y nin yerleri değiştirilir.

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$ ise

$$y = \frac{3x+2}{4} \Rightarrow 3x + 2 = 4y \Rightarrow 3x = 4y - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y-2}{3} \text{ olur.}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{4y-2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = 2x + 3$ olduğuna göre, $f^{-1}(-1)$ i bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 2x + 3$ ise

$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \dfrac{y-3}{2}$ olur.

$f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$ bulunur.

Buna göre

$f^{-1}(-1) = \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ olur.

Örnek:

$f : R - \{2\} \to R,\ f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$ olduğuna göre,

$f^{-1}(1)$ i bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$ ise

$y = \dfrac{3x+2}{2x-4} \Rightarrow 3x + 2 = 2xy - 4y \Rightarrow 3x - 2xy = -4y - 2$

$\Rightarrow x.(3-2y) = -4y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{-4y-2}{3-2y}$ dir.

Buna göre, $f^{-1}(x) = \dfrac{-4x-2}{3-2x}$ bulunur.

O halde,

$f^{-1}(1) = \dfrac{-4.1-2}{3-2.1} = \dfrac{-6}{1} = -6$ olur.

2.Yol

$f^{-1}(1) = k$ olsun.

Buna göre $f(k) = 1$ olur.

$f(k) = \dfrac{3k+2}{2k-4} = 1 \Rightarrow 3k + 2 = 2k - 4 \Rightarrow k = -6$ bulunur.

Buna göre $f^{-1}(1) = -6$ dır.

Sonuç

1. $f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$ dır.

2. $f : R - \{-\dfrac{d}{c}\} \to R - \{\dfrac{a}{c}\}$, olmak üzere

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$ dır.

Örnek:

$f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ iken $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$ dır.

$f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{-(-4)x+2}{2x-(3)} = \dfrac{4x+2}{2x-3}$ tür.

Örnek:

$f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ i bulalım

$f(x) = \dfrac{3x+2}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-(4)x+2}{-(3)} = \dfrac{-4x+2}{-3}$ tür.

Örnek:

$f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$$f(x)=\frac{x-3}{2x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-0.x-3}{2x-(1)}=\frac{-3}{2x-1}$$ bulunur.

Örnek:

$f(x)=2^{x+1}$ olduğuna göre, $f^{-1}(16)$ yı bulalım.

Çözüm:

$f^{-1}(16)=k$ olsun.

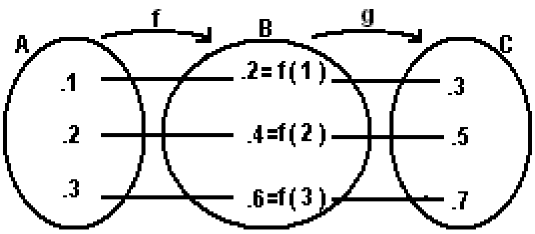
Buna göre $f(k)=16$ olur.

$f(k)=2^{k+1}=16\Rightarrow 2^{k+1}=2^{4}\Rightarrow k+1=4\Rightarrow k=3$ bulunur.

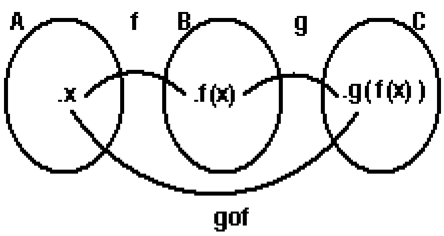
Buna göre $f^{-1}(16)=3$ tür.

Fonksiyonların Bileşkesi

$f:A\to B$ ve $g:B\to C$ fonksiyonları aşağıdaki şemalarla verilsin.



Görüldüğü gibi; f fonksiyonu A nın elemanlarını B nin elemanlarına, g fonksiyonu da B nin elemanlarını C nin elemanları ile eşleşmiştir.



f ve g fonksiyonları birlikte A nın elemanlarını C nin elemanlarına eşler. A nın elemanlarını C nin elemanlarına eşleyen fonksiyona f ve g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $g\circ f$ biçiminde yazılır ve "g bileşke f " diye okunur.

Buna göre,

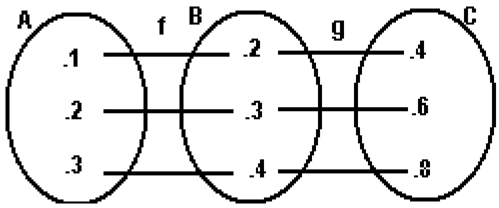
$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=3$ tür.

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=5$ tir.

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(6)=7$ dir.

Örnek:

f ve g fonksiyonları aşağıdaki şemada verilmiştir. $(g\circ f)(1)$, $(g\circ f)(2)$, $(g\circ f)(3)$ değerlerini hesaplayarak $g\circ f$ fonksiyonunu şema ile gösterelim.



$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=4$ tür.

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=6$ dır.

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=8$ dir.

Örnek:

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,4,9\}$, $A=\{2,8,18\}$

kümeleri ile $f:A\to B$, $f(x)=x^{2}$ ve $g:B\to C$, $g(x)=2x$ fonksiyonları veriliyor.

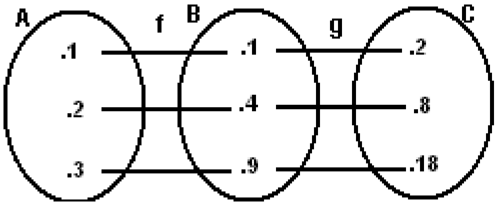
$(g\circ f)(1)$, $(g\circ f)(2)$, $(g\circ f)(3)$ değerlerini hesaplayarak $g\circ f$ fonksiyonunu şema ile gösterelim.

Çözüm:

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1^{2})=g(1)=2.1=2$ dir.

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(2^{2})=g(4)=2.4=8$ dir.

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3^2) = g(9) = 2.9 = 18$ dir.



Uyarı

$(f \circ g)(x)$ bulunurken $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonundaki her x değişkeninin yerine $g(x)$ fonksiyonu koyularak hesaplanır.

$(g \circ f)(x)$ bulunurken $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ olduğundan $g(x)$ fonksiyonundaki her x değişkeninin yerine $f(x)$ fonksiyonu koyularak hesaplanır.

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = 2x - 1$ ve $g : R \to R,\ g(x) = x + 2$ fonksiyonları için $(f \circ g)(x)$ ve $(g \circ f)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{x + 2}_{g(x)}) = 2.(x + 2) - 1$$

$$= 2x + 4 - 1 = 2x + 3$$

$(f \circ g)(x) = 2x + 3$ tür.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{2x - 1}_{f(x)}) = (2x - 1) + 2 = 2x + 1$$

$(g \circ f)(x) = 2x + 1$ dir.

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = 2x - 1$ ve $g : R \to R,\ g(x) = x^2 + 2$ fonksiyonları için $(f \circ g)(x)$ ve $(g \circ f)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{x^2 + 2}_{g(x)}) = 2.(x^2 + 2) - 1$$

$$= 2x^2 + 3$$

$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$ tür.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{2x - 1}_{f(x)}) = (2x - 1)^2 + 2$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2 = 4x^2 - 4x + 3$$

$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 3$ tür.

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = 2x^2 - x + 1$ ve $g : R \to R,\ g(x) = x^2 + 2$ fonksiyonları için $(f \circ g)(x)$ ve $(g \circ f)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{x^2 + 2}_{g(x)})$$

$$= 2.(x^2 + 2)^2 - (x^2 + 2) + 1$$

$$= 2.(x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 - 2 + 1$$

$$= 2x^4 + 8x^2 + 8 - x^2 - 1$$

$$= 2x^4 + 7x^2 + 7$$

$(f \circ g)(x) = 2x^4 + 7x^2 + 7$ dir.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{2x^2 - x + 1}_{f(x)})$$

$$= (2x^2 - x + 1)^2 + 2$$

$$= 4x^4 + x^2 + 1 - 4x^3 - 4x^2 + 2x$$

$= 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

$(g \circ f)(x) = 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ dir.

Örnek:

$f : R \to R, \quad f(x) = 2x - 1$ ve $g : R \to R, \; g(x) = x + 2$ fonksiyonları için $(f \circ g)(0)$ ve $(g \circ f)(0)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(\underbrace{0^2 + 2}_{g(0)}) = f(2) = 2.2 - 1 = 3 \text{ tür.}$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(\underbrace{2.0 - 1}_{f(0)}) = g(-1) = (-1)^2 + 2 = 1$$

Örnek:

$f : R \to R, \; f(x) = 2x + 3$ ve $g : R \to R, \; g(x) = 5x + 4$ fonksiyonları için $(f \circ g)(3)$ ve $(g \circ f)(2)$ değerlerini bulalım.

Çözüm:

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(5.3 + 4) = f(19) = 2.19 + 3 = 41$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2.2 + 3) = g(7) = 5.7 + 4 = 39$

Uyarı

Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur. Yani f ve g iki fonksiyon olmak üzere $f \circ g \neq g \circ f$ dir.

Örnek:

R den R ye tanımlı $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $h(x) = x + 3$ olduğuna göre $(f \circ g \circ h)(2)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$(f \circ g \circ h)(2) = f[g(h(2))] = f[g(2 + 3)] = f[g(5)]$

$= f(3.5) = f(15) = 15^2 + 1 = 226$

Fonksiyonlarda Bileşke İşleminin Özellikleri

1. Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır. Yani $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$ tır.

2. I birim fonksiyon olmak üzere $f \circ I = I \circ f = f$ tir.

3. I birim fonksiyon olmak üzere $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ tir.

4. f, g ve h fonksiyonları bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ve

$(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ dir.

Örnek:

$f(x) = 3x + 2$ ve $(f \circ g)(x) = 6x + 11$ olduğuna göre $g(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 3x + 2$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{3}$ tür.

$(f \circ g)(x) = 6x + 11$ ise,

$\Rightarrow [f^{-1} \circ (f \circ g)(x)] = (f^{-1} \circ (6x + 11))$

$\Rightarrow [I \circ (g)(x)] = (f^{-1}(6x + 11))$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{6x + 11 - 2}{3} = \dfrac{6x + 9}{3} = 2x + 3$ tür.

2.Yol

$f(x) = 3x + 2$ olmak üzere $(f \circ g)(x) = 6x + 11$ ise,

$\Rightarrow f(g(x)) = 6x + 11 \Rightarrow 3.g(x) + 2 = 6x + 11$

$\Rightarrow 3.g(x) = 6x + 9 \Rightarrow g(x) = \dfrac{6x + 9}{3} = 2x + 3$ tür.

Örnek:

$f(x) = x + 2$ ve $(g \circ f)(x) = 2x + 11$ olduğuna göre $g(3)$ ü bulalım.

Çözüm:

$(g \circ f)(x) = 2x + 11 \Rightarrow g(f(x)) = 2x + 11$

$\Rightarrow g(x+2) = 2x + 11$

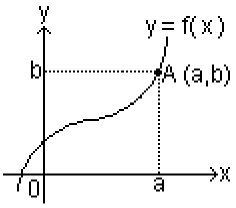
Bu son eşitlikte x yerine 1 yazılırsa,

$g(1+2) = 2.1 + 11 \Rightarrow g(3) = 2 + 11 = 13$ bulunur.

Bir Fonksiyonun Grafiği

Bir fonksiyonun elemanlarına analitik düzlemde karşılık gelen noktaların kümesine bu fonksiyonun grafiği denir.

$f : A \to B$, $f = \left\{ (x,y) \middle| \; x \in A, \; y \in B \text{ ve } y = f(x) \right\}$



$(a,b) \in f$ olduğundan $f(a) = b$ dir.

Ayrıca $f^{-1}(b) = a$ dır.

Örnek:

$A = \{-1,0,1,2\}$, $f : A \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

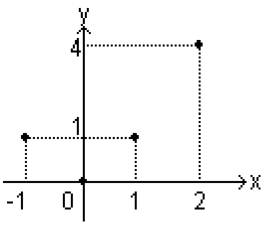
Çözüm:

$x = -1$ için $f(-1) = (-1)^2 = 1$ dir.

$x = 0$ için $f(0) = 0^2 = 0$ dır.

$x = 1$ için $f(1) = 1^2 = 1$ dir.

$x = 2$ için $f(2) = 2^2 = 4$ tür.



Buna göre $f = \{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$ olur. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki dört noktadır.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = -x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

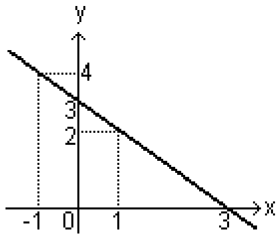
$x = -1$ için $f(-1) = -(-1) + 3 = 4$ tür.

$x = 0$ için $f(0) = -0 + 3 = 3$ tür.

$x = 1$ için $f(1) = -1 + 3 = 2$ dir.

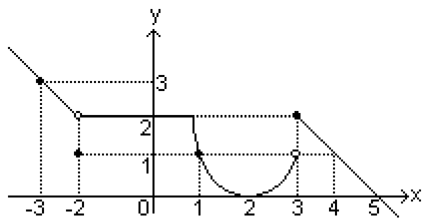
Buna göre $f = \{..., (-1,4), (0,3), (1,2), ...\}$ dir. A aşağıdaki tabloda x in bazı değerlerine karşın $f(x)$ in aldığı değerler verilmiştir.

x	. . .	-1	0	1	. . .
y = -x + 3	. . .	4	3	2	. . .



Bir önceki örnekte fonksiyonun tanım kümesi 4 elemanlı olduğu için, f in grafiği 4 tane noktadan oluştu. Bu örnekte ise; tanım kümesi tüm reel sayılar olduğu için, f in grafiği sonsuz tane noktadan oluşmaktadır. Fonksiyonun tanımından dolayı, bu noktalar bir doğru belirtmektedir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\dfrac{f(-2) + f(-1)}{f(3) + f(5)}$ değerini bulunuz.

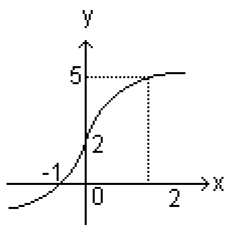
Çözüm:

Grafikten $f(-2) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(3) = 2$ ve $f(5) = 0$ olduğu görülmektedir.

Buna göre,

$$\frac{f(-2)+f(-1)}{f(3)+f(5)}=\frac{1+2}{2+0}=\frac{3}{2}$$ bulunur.

Örnek:



Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(-1)+f^{-1}(2)+f(2)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

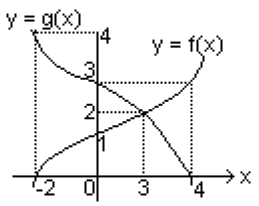
Grafikten $f(-1)=0$ dir.

$f(0)=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=0$ dır.

$f(2)=5$ tir.

Buna göre, $f(-1)+f^{-1}(2)+f(2)=0+0+5=5$ bulunur.

Örnek:



Yandaki şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre $(f\circ g^{-1}\circ f)(4)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

$(f\circ g^{-1}\circ f)(4)=f(g^{-1}(f(4)))$ olup

$y=f(x)$ in grafiğinde x = 4 için y = 4 olduğundan $f(4)=3$ tür.

$y=f(x)$ in grafiğinde x = 0 için y = 1 olduğundan $f(0)=1$ dir.

$y=g(x)$ in grafiğinde x = 0 için y = 3 olduğundan $g(0)=3$ olup $g^{-1}(3)=0$ dır.

O halde,

$(f\circ g^{-1}\circ f)(4)=f(g^{-1}(f(4)))=f(g^{-1}(3))=f(0)=1$ olur.

Çözümlü Sorular

1. $A=\{-2,-1,0,1,3\}$, $f:A\to R$,
$f=\{(-2,4),(-1,3),(0,2),(1,4),(3,1)\}$ olduğuna göre
$f(-2)+f(0)+f(3)$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$(-2,4)\in f$ olduğundan $f(-2)=4$ tür.

$(0,2)\in f$ olduğundan $f(0)=2$ dir.

$(3,1)\in f$ olduğundan $f(3)=1$ dir.

Bu durumda,

$f(-2)+f(0)+f(3)=4+2+1=7$ olur.

2. $f(x)=x^2-2x+1$ olduğuna göre $f(\sqrt{3}+1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)=x^2-2x+1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2$ dir.

$f(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3}+1-1)^2=(\sqrt{3})^2=3$ bulunur.

3. $f(2x+3)=3x+2$ olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

Çözüm:

$2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ dir.

Buna göre $f(2x+3)=3x+2$ fonksiyonunda x görülen yere $-\frac{3}{2}$ yazılırsa $f(0)$ bulunur.

$f(2.(-\frac{3}{2})+3)=3.(-\frac{3}{2})+2=-\frac{9}{2}+2=-\frac{5}{2}$ olur.

4. $f(\frac{3x-1}{2x+1}) = 2x-3$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$\frac{3x-1}{2x+1} = 2 \Rightarrow 4x+2 = 3x-1 \Rightarrow x = -3$ tür.

Buna göre verilen fonksiyonda x görülen yere -3 yazılırsa $f(2)$ bulunur.

$f(\frac{3.(-3)-1}{2.(-3)+1}) = 2.(-3)-3 \Rightarrow f(2) = -9$ olur.

5. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ olduğuna göre $f(x-2)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2.2.x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$ dir.

Bu ifade de x görülen yere $x-2$ yazılırsa,

$f(x-2) = (x-2+2)^2 + 1 = x^2 + 1$ bulunur.

6. $f(\frac{x+2}{x-1}) = \frac{x-1}{x+2}$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(\frac{x+2}{x-1}) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}$ olur.

Bu ifadede $\frac{x+2}{x-1}$ gördüğümüz her yere x yazalım.

$f(x) = \frac{1}{x}$ olur.

Buna göre $f(2) = \frac{1}{2}$ dir.

7. $a \neq b$ olmak üzere $f(x) = a^x - b^x$ olduğuna göre $\frac{f(2)}{f(1)}$ kaçtır?

Çözüm:

$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b).(a-b)}{a-b} = a+b$ olur.

8. $f(x)$ doğrusal bir fonksiyon olmak üzere $f(5) = 3$ ve $f(3) = 5$ olduğuna göre $f(1)$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ doğrusal bir fonksiyonu $f(x) = ax + b$ olsun.

$f(5) = 3 \Rightarrow 5a + b = 3$ tür.

$f(3) = 5 \Rightarrow 3a + b = 5$ tir.

Bu iki eşitlik birlikte çözülürse,

$\left.\begin{matrix} 5a+b=3 \\ 3a+b=5 \end{matrix}\right\} a = -1$ ve $b = 8$ bulunur.

O halde $f(x) = -x + 8$ dir.

Buna göre $f(1) = -1 + 8 = 7$ bulunur.

9. $f(3x+2) = 5x-4$ olduğuna göre $f(8)$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$3x + 2 = 8 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ dir.

Buna göre verilen fonksiyonda x yerine 2 yazılarak $f(8)$ in değeri hesaplanabilir.

$x = 2$ için $f(3.2+2) = 5.2-4 \Rightarrow f(8) = 6$ dır.

10. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ olduğuna göre $f(x-1)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$ dür.

$f(x) = (x-1+1)^3 = x^3$ bulunur.

11. $f(x^2+x)=2x^2+2x+2$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f(x^2+x)=2x^2+2x+2$ olduğuna göre

$f(x^2+x)=2.(x^2+x)+2$ olup bu ifadede x^2+x yerine x yazılırsa,

$f(x)=2.x+2$ bulunur.

12. $f:R\to R,\ f(m.n)=f(m).f(n)$ olduğuna göre $f(1)$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(m.n)=f(m).f(n)$ ifadesinde n = 1 alınırsa,

$f(m.1)=f(m).f(1)\Rightarrow f(m)=f(m).f(1)\Rightarrow f(1)=1$ bulunur.

13. $f:R\to R,\ f(x+1)=f(x)-x$ ve $f(1)=1$ olduğuna göre, $f(3)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x+1)=f(x)-x$ olmak üzere,

$x=1$ için $f(1+1)=f(1)-1\Rightarrow f(2)=1-1=0$ dır.

$x=2$ için $f(2+1)=f(2)-2\Rightarrow f(3)=0-2=-2$ dir.

14. $f(x+y)=f(x).f(y)$ ve $f(2)=5$ olduğuna göre $f(6)$ nın değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x+y)=f(x).f(y)$ ve $f(2)=5$ olmak üzere,

$f(2+2)=f(2).f(2)\Rightarrow f(4)=5.5=25$ tir.

$f(2+4)=f(2).f(4)\Rightarrow f(6)=5.25=125$ dir.

15. $f(x+2)+f(x-1)=3x+1$ olduğuna $f(3)-f(-3)$ kaçtır?

Çözüm:

$x=1$ için,

$f(1+2)+f(1-1)=3.1+1\Rightarrow f(3)+f(0)=4$ tür.

$x=-2$ için,

$f(-2+2)+f(-2-1)=3.(-2)+1\Rightarrow f(0)+f(-3)=-5$ tir

Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$f(3)+f(0)-f(0)-f(-3)=4-(-5)\Rightarrow f(3)-f(-3)=9$ olur.

16. $f(\frac{x}{2})=x.f(\frac{2}{x})+x^2+1$ olduğuna göre $f(2)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

Verilen eşitlikte x yerine önce 4, sonra da 1 yazalım.

$x=4$ için, $f(\frac{4}{2})=4.f(\frac{2}{4})+4^2+1\Rightarrow f(2)=4.f(\frac{1}{2})+17$

$x=1$ için, $f(\frac{1}{2})=1.f(\frac{2}{1})+1^2+1\Rightarrow f(\frac{1}{2})=f(2)+2$ dir.

Bu son eşitlik ilk eşitlikte yerine yazılırsa,

$f(2)=4.[f(2)+2]+17\Rightarrow f(2)=4.f(2)+25$ olup buradan,

$3f(2)=-25\Rightarrow f(2)=-\frac{25}{3}$ bulunur.

17. $f:R\to R,\ f(x+1)=x.f(x)$ ve $f(2)=5$ olduğuna göre $f(4)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x+1)=x.f(x)$ ve $f(2)=5$ olduğuna göre,

$x=2$ için, $f(3)=2.f(2)=2.5=10$ dur.

$x=3$ için, $f(4)=3.f(3)=3.10=30$ olur.

18. $A=[2,3)$, $f:A\to B,\ f(x)=2x+3$ fonksiyonu bire bir ve örtendir. Buna göre B kümesini bulunuz.

Çözüm:

$y = f(x) = 2x + 3$ ve $A = [2,3)$ ise

$A = \{x :\ x \in R,\ 2 \le x < 3\}$ olduğu için,

$2 \le x < 3 \Rightarrow 4 \le 2x < 6 \Rightarrow 7 \le 2x + 3 < 9$

$\Rightarrow 7 \le f(x) < 9$ olur.

Buna göre

$B = \{x :\ x \in R,\ 7 \le x < 9\} \Rightarrow B = [7,9)$ olur.

19. $f(x) = 3^{2x-1}$ olduğuna göre $f(3x)$ in $f(x)$ türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = 3^{2x-1} = \frac{3^{2x}}{3} \Rightarrow 3^{2x} = 3.f(x) \text{ tir.}$$

$$f(3x) = 3^{2.3x-1} = \frac{(3^{2x})^3}{3} = \frac{(3.f(x))^3}{3}$$

$$f(3x) = \frac{27.f^3(x)}{3} = 9.f^3(x) \text{ tir.}$$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ olduğuna göre $f(x+1)$ in $f(x)$ türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ifadesinde x in $f(x)$ türünden eşitini bulalım.

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow x = x.f(x) + f(x) \Rightarrow x - x.f(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow x.[1 - f(x)] = f(x) \Rightarrow x = \frac{f(x)}{1 - f(x)} \text{ tir.}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ ise } f(x+1) = \frac{x+1}{x+1+1} = \frac{x+1}{x+2} \text{ dir.}$$

Burada, x yerine $\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$ yazılırsa,

$$f(x+1) = \frac{x+1}{x+2} = \frac{\dfrac{f(x)}{1-f(x)} + 1}{\dfrac{f(x)}{1-f(x)} + 2} = \frac{\dfrac{f(x) + 1 - f()x}{1-f(x)}}{\dfrac{f(x) + 2 - 2.f(x)}{1-f(x)}}$$

$$f(x+1) = \frac{1}{1-f(x)} . \frac{1-f(x)}{-f(x)+2} = \frac{1}{2-f(x)} \text{ bulunur.}$$

21. $f(x) = mx + n$, $f^{-1}(4) = 5$, $f^{-1}(3) = 6$ olduğuna göre $m.n$ çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$$f^{-1}(4) = 5 \Rightarrow f(5) = 4 \Rightarrow 5m + n = 4$$

$$f^{-1}(3) = 6 \Rightarrow f(6) = 3 \Rightarrow 6m + n = 3 \text{ olur.}$$

Bu iki denklem birlikte çözülürse,

$$\left.\begin{array}{l} 5m + n = 4 \\ 6m + n = 3 \end{array}\right\} m = \text{-}1,\ n = 9 \text{ bulunur.}$$

Buna göre,

$m.n = (-1).9 = -9$ bulunur.

22. $f(x-1) = x^2 + 3x + a$ ve $f^{-1}(2) = 3$ olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?

Çözüm:

$$f^{-1}(2) = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \text{ dir.}$$

$f(x-1) = x^2 + 3x + a$ fonksiyonunda $x = 4$ yazılırsa,

$$f(4-1) = 4^2 + 3.4 + a \Rightarrow f(3) = 16 + 12 + a$$

$$\Rightarrow 2 = 16 + 12 + a \Rightarrow a = -26 \text{ olur.}$$

23. $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ in eşitini bulunuz.

Çözüm:

$y = f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{x+2}$

$\Rightarrow x+2 = (y+1)^3 \Rightarrow x = (y+1)^3 - 2$ dir.

O halde,

$f^{-1}(y) = (y+1)^3 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^3 - 2$ dir.

24. $f(\frac{x+1}{x^2+1}) = x+1$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ in eşitini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = y$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğu için

$f(\frac{x+1}{x^2+1}) = x+1$ ise $f^{-1}(x+1) = \frac{x+1}{x^2+1}$ olur.

Burada x yerine x – 1 yazılırsa,

$f^{-1}(x-1+1) = \frac{x-1+1}{(x-1)^2+1} = \frac{x}{x^2-2x+2}$ olur.

25. $f(2x+1) = \frac{x^2+3}{5}$ olduğuna göre $f(x)$ in eşitini bulunuz.

Çözüm:

$2x+1$ in tersi $\frac{x-1}{2}$ olduğu için $f(2x+1)$ de x yerine $\frac{x-1}{2}$ yazılırsa $f(x)$ bulunur.

$f(2x+1) = \frac{x^2+3}{5}$ ise,

$f(2.\frac{x-1}{2}+1) = \frac{(\frac{x-1}{2})^2+3}{5}$

$\Rightarrow f(x-1+1) = \frac{\frac{x^2-2x+1}{4}+3}{5}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-2x+1+12}{20} = \frac{x^2-2x+13}{20}$

bulunur.

26. $f: R-\{-1\} \to R-\{3\}$, ve $x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)}$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ in eşitini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ olduğu için,

$x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)} \Rightarrow x = \frac{y+2}{3-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}$ tir.

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $f: A \to A$,

27. $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,3), (5,1)\}$ olduğuna göre $(f \circ f \circ f)(3)$ kaçtır?

Çözüm:

$(3,5) \in f$ olduğundan $f(3) = 5$ tir.

$(5,1) \in f$ olduğundan $f(5) = 1$ dir.

$(1,2) \in f$ olduğundan $f(1) = 2$ dir.

Bu durumda,

$(f \circ f \circ f)(3) = f(f(f(3))) = f(f(5)) = f(1) = 2$ olur.

28. $f(x+2) = 5x+3$ ve $g(x-3) = 3x+1$ olduğuna göre, $(g \circ f)(3)$ ün değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x+2) = 5x+3$ ise $f(1+2) = 5.1+3 \Rightarrow f(3) = 8$ dir.

$g(x-3) = 3x+1$ ise $g(11-3) = 3.11+1 \Rightarrow g(8) = 34$ tür.

Buna göre,

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(8) = 34$ olur.

29. $f(x) = x^{2007} + x^{2008} + 5$ ve $g(x) = x^2 - 2x - 9$ olduğuna göre, $(f \circ g)(4)$ ün değeri kaçtır?

Çözüm:

$x = 4$ için $g(4) = 4^2 - 2.4 - 9 = -1$ dir.

$x = -1$ için $f(-1) = (-1)^{2007} + (-1)^{2008} + 5 = 5$ tir.

Buna göre,

$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-1) = 5$ olur.

30. $f(x) = 5^{x+2}$ ve $g(x) = x^2 + 4$ olduğuna göre,

$(f^{-1} \circ g \circ f)(-2)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x = 4$ için $f(-2) = 5^{-2+2} = 1$ dir.

$x = 1$ için $g(1) = 1^2 + 4 = 5$ tir.

$x = -2$ için $f(-1) = 5^{-1+2} = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = -1$ dir.

Buna göre,

$(f^{-1} \circ g \circ f)(-2) = f^{-1}(g(f(-2))) = f^{-1}(g(1))$

$= f^{-1}(5) = -1$

31. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ \dfrac{3 - x}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$ olduğuna göre $(f \circ f)(5)$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$x \geq 1$ için $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ dir.

$5 \geq 1$ olduğu için $f(5) = \dfrac{3 - 5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ dir.

$x < 1$ için $f(x) = 3x$ tir.

$-1 < 1$ olduğu için $f(-1) = 3.(-1) = -3$ tür.

Buna göre,

$(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(-1) = -3$ bulunur.

32. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 3 \\ 5 - 3x, & x < 3 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > -2 \\ x + 1, & x \leq -2 \end{cases}$

olduğuna göre, $(g \circ f)(2)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$2 < 3$ olduğu için $f(2) = 5 - 3.2 = -1$ dir.

$-1 \geq -2$ olduğu için $g(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ tür.

Buna göre,

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-1) = 3$ tür.

33. $(f \circ g)(x)(4x - 1)$ ve $g(x) = 2x + 3$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$(f \circ g) \circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ I = f$ dir.

$g(x) = 2x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$ dir.

$f(x) = [(f \circ g) \circ g^{-1}](x) = [f \circ g](g^{-1}(x))$

$f(x) = [f \circ g](\dfrac{x - 3}{2}) = 4.\dfrac{x - 3}{2} - 1 = 2x - 6 - 1 = 2x - 7$ dir.

Buna göre, $f(x) = 2x - 7$ dir.

34. $f^{-1}(3) = 0$, $g^{-1}(2) = 3$ ve $h^{-1}(0) = 1$ olduğuna göre, $(g \circ f \circ h)^{-1}(2)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$(g \circ f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ olduğu için,

$(g \circ f \circ h)^{-1}(2) = [h^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1}](2)$

$= h^{-1}[f^{-1}(g^{-1}(2))]$

$= h^{-1}[f^{-1}(3)] = h^{-1}(0) = 1$ bulunur.

35. $g(x) = 3x - 1$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$ ve $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm:

$g(x) = 3x - 1$ ise $g(2) = 3.2 - 1 = 5$ tir.

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$ ise $f(a) = \dfrac{2a+1}{a+5}$ tir.

$(g^{-1} \circ f)(a) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f(a)) = 2 \Rightarrow g^{-1}(\dfrac{2a+1}{a+5}) = 2$

$\Rightarrow g(2) = \dfrac{2a+1}{a+5} \Rightarrow \dfrac{2a+1}{a+5} = 5$

$\Rightarrow 5a + 25 = 2a + 1 \Rightarrow 3a = -24$

$\Rightarrow a = -8$ bulunur.

36. $f(x) = \dfrac{2x+u}{x+1}$ ve $(f \circ f)(x) = \dfrac{x-9}{3x-2}$ olduğuna göre u kaçtır?

Çözüm:

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{x-9}{3x-2}$ ise

$x = 0$ için $f(f(0)) = \dfrac{9}{2}$ dir.

$f(x) = \dfrac{2x+u}{x+1}$ ise $x = 0$ için $f(0) = \dfrac{2.0+u}{0+1} = u$ dur.

$x = u$ için $f(u) = \dfrac{2.u+u}{u+1} = \dfrac{3u}{u+1}$ dir.

Buna göre,

$f(f(0)) = \dfrac{9}{2} \Rightarrow f(u) = \dfrac{9}{2} \Rightarrow \dfrac{3u}{u+1} = \dfrac{9}{2}$ dir.

Bu eşitlikten,

$9u + 9 = 6u \Rightarrow 3u = -9 \Rightarrow u = -3$ tür.

37. $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$ ve $h(x) = x^3 + 2$ olduğuna göre, $\dfrac{(f.g - h)(-1)}{(f \circ g \circ h)(1)}$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$ ve $h(x) = x^3 + 2$
olduğu için,

$f(-1) = -1 + 3 = 2$, $g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$,

$h(-1) = (-1)^3 + 2 = 1$, $h(1) = 1^3 + 2 = 3$,

$g(3) = 3^2 - 1 = 8$, $f(8) = 8 + 3 = 11$ dir.

Buna göre,

$\dfrac{(f.g - h)(-1)}{(f \circ g \circ h)(1)} = \dfrac{f(-1).g(-1) - h(-1)}{f(g(h(1)))} = \dfrac{2.0 - 1}{f(g(3))}$

$= \dfrac{-1}{f(8)} = -\dfrac{1}{11}$ bulunur.

38. $f(x) = \dfrac{f^{-1}(x) - 2}{3}$ olduğuna göre, $(f \circ f)(2)$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$f^{-1} \circ f = I$ olduğundan,

$f(x) = \dfrac{f^{-1}(x) - 2}{3}$ eşitliğinde x yerine $f(x)$ yazılırsa,

$f(f(x)) = \dfrac{f^{-1}(f(x)) - 2}{3} = \dfrac{x-2}{3} \Rightarrow (f \circ f)(x) = \dfrac{x-2}{3}$ olur.

Bu son eşitlikte x yerine 2 yazılırsa,

$(f \circ f)(2) = \dfrac{2-2}{3} = 0$ bulunur.

39. $f^{-1}(2x+1) = g(3x-4)$ olduğuna göre $(f \circ g)(5)$ in değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(a) = b$ ise $f^{-1}(b) = a$ dır.

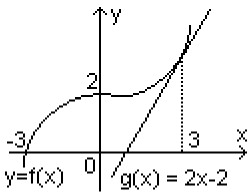
Buna göre,

$f^{-1}(2x+1) = g(3x-4) \Rightarrow f(g(3x-4)) = 2x+1$ dir.

$(f \circ g)(3x-4) = 2x+1$ ifadesinde x yerine 3 yazılırsa,

$(f \circ g)(3.3-4) = 2.3+1 \Rightarrow (f \circ g)(5) = 7$ bulunur.

40.



Yandaki şekilde $y = f(x)$ eğrisinin grafiği Ox eksenini -3 te, Oy eksenini 2 de kesmektedir. $g(x) = 2x - 2$ fonksiyonunun grafiğinin $f(x)$ eğrisine teğet olduğu noktanın apsisi 3 tür.

Buna göre $\dfrac{(g \circ f^{-1})(2)}{(f^{-1} \circ g)(3)}$ kaçtır?

Çözüm:

Verilenlere göre,

$f(0) = 2$ ise $f^{-1}(2) = 0$ dır.

$g(0) = 2.0 - 2 = -2$ dir.

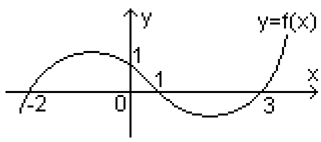
$g(3) = 2.3 - 2 = 4$ tür.

$f(3) = g(3) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3$ tür.

Buna göre,

$\dfrac{(g \circ f^{-1})(2)}{(f^{-1} \circ g)(3)} = \dfrac{g(f^{-1}(2))}{f^{-1}(g(3))} = \dfrac{g(0)}{f^{-1}(4)} = -\dfrac{2}{3}$ bulunur.

41.



Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(a+4) = 0$ olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $(-2,0)$, $(1,0)$, ve $(3,0)$ noktalarından geçtiği için,

$f(-2) = 0$, $f(1) = 0$ ve $f(3) = 0$ dır.

$f(a+4) = 0$ olduğuna göre,

$a+4 = -2$, $a+4 = 1$ veya $a+4 = 3$ tür.

$a+4 = -2 \Rightarrow a = -6$ dır.

$a+4 = 1 \Rightarrow a = -3$ tür.

$a+4 = 3 \Rightarrow a = -1$ dir.

Buna göre a nın alabileceği değerlerin toplamı,

$(-6) + (-3) + (-1) = -10$ dur.

44. $f : R^+ \to R$, $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x}$ ve $f(4) = 12$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$x=3$ için $f(3)=\frac{f(4)}{3}=\frac{12}{3}=4$ tür.

$x=2$ için $f(2)=\frac{f(3)}{2}=\frac{4}{2}=2$ dir.

42. $f(x)+f(x+1)=2x+3$ olduğuna göre $f(2)-f(0)$ kaçtır?

Çözüm:

$x=1$ için $f(1)+f(2)=5$ tir.

$x=0$ için $f(0)+f(1)=3$ tür.

Birinci ifadeden ikinci ifade çıkartılırsa,

$f(1)+f(2)-f(0)-f(1)=5-3 \Rightarrow f(2)-f(0)=2$ olur.

43. $a \neq b$ olmak üzere $f(\frac{ax-b}{bx-a})=x^2+x+1$ olduğuna göre $f(-1)+f(1)$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$f(\frac{ax-b}{bx-a})=x^2+x+1$ ifadesinde x yerine önce 1, sonra -1

yazılırsa,

$f(\frac{a-b}{b-a})=1^2+1+1 \Rightarrow f(-1)=3$ tür.

$f(\frac{-a-b}{-b-a})=(-1)^2-1+1 \Rightarrow f(1)=1$ dir.

Buna göre, $f(-1)+f(1)=3+1=4$ olur.

45. $f(a.b)=f(a)+f(b)$ ve $f(2)=7$ olduğuna göre $f(16)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

$f(a.b)=f(a)+f(b)$ olduğu için,

$f(16)=f(2.2.2.2)=f(2)+f(2)+f(2)+f(2)=28$ olur.

46. $f:R\to R$, $f(x+2)=f(x)+x$ ve $f(2)=1$ olduğuna göre, $f(102)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x+2)=f(x)+x$ ise $f(x+2)-f(x)=x$ tir.

Bu eşitlikte x yerine sırasıyla 2,4,…,98,100 yazacağız.

Sonra da bulduğumuz değerleri taraf tarafa toplayacağız.

$x=2$ için, $f(4)-f(2)=2$

$x=4$ için, $f(6)-f(4)=4$

$x=6$ için, $f(8)-f(6)=6$

. . .

$x=98$ için, $f(100)-f(98)=98$

$x=100$ için, $f(102)-f(100)=100$

+___________________

$f(102)-f(2)=2+4+6+..+98+100$

$f(102)-1=50.51$

$f(102=2550+1=2551$ bulunur.

47. $f:R\to R$, $f(2x+1)=\begin{cases} x-1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ 3-x, & x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ olduğuna göre $f(-1)+f(0)$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$-1<-\frac{1}{2}$ olduğu için, $f(2x+1)=3-x$ tir.

$f(2.(-1)+1)=3-(-1)$

$f(-1)=4$

$-\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ olduğu için, $f(2x+1) = x-1$ tir.

$$f(2.(-\frac{1}{2})+1) = -\frac{1}{2}-1)$$

$$f(0) = -\frac{3}{2} \text{ dir.}$$

$f(-1)+f(0) = 4-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ bulunur.

48. $f(2x+1) = 4x^2 - 3$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$2x+1$ in bileşke işlemine göre tersi $\frac{x-1}{2}$ olduğu için bu değer $f(2x+1) = 4x^2 - 3$ fonksiyonunda x yerine yazılırsa $f(x)$ bulunur.

$$f(2.\frac{x-1}{2}+1) = 4.(\frac{x-1}{2})^2 - 3$$

$$f(x-1+1) = 4.\frac{x^2-2x+1}{4} - 3$$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 3 = x^2 - 2x - 2$ bulunur.

49. $f(\frac{x^2+1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f(\frac{x^2+1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}$ ise,

$$f(x+\frac{1}{x}) = (x+\frac{1}{x})^2 - 2 + (x+\frac{1}{x}) \Rightarrow f(x) = x^2 + x - 2$$

50. $f: R \to R$, $f(x^2 - x) = x^2 + x + 3$ olduğuna göre $f(-\frac{1}{4})$ değerini bulunuz.

Çözüm:

$$x^2 - x = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bu değeri $f(x^2 - x) = x^2 + x + 3$ fonksiyonunda yazarsak,

$$f((\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow f(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+3$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{4}) = \frac{15}{4} \text{ olur.}$$

51. $f(\frac{x^2+1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$\frac{x+2}{2x-3}$ ün bileşke işlemine göre tersi $\frac{3x+2}{2x-1}$ dir.

$f(\frac{x+2}{2x-3}) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonunda x yerine $\frac{3x+2}{2x-1}$ yazılırsa $f(x)$ bulunur.

$$f\left(\frac{\frac{3x+2}{2x-1}+2}{2.\frac{3x+2}{2x-1}-3}\right) = \frac{\frac{3x+2}{2x-1}}{\frac{3x+2}{2x-1}+1} \Rightarrow f(x) = \frac{3x+2}{5x+1} \text{ olur.}$$

52. $f(x)$ doğrusal fonksiyonu için $f^{-1}(5) = 4$ ve $f^{-1}(7) = 3$ olduğuna göre, $f(9)$ kaçtır?

Çözüm:

$f^{-1}(5) = 4 \Rightarrow f(4) = 5$ tir.

$f^{-1}(7) = 3 \Rightarrow f(3) = 7$ dir.

$f(x)$ doğrusal fonksiyon olduğundan $f(x) = ax + b$ dir

$x = 4$ için $f(4) = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 5$ tir.

$x = 3$ için $f(3) = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 7$ dir.

Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$4a + b - 3b - b = 5 - 7 \Rightarrow a = -2$ bulunur.

$4a + b = 5 \Rightarrow 4.(-2) + b = 5 \Rightarrow b = 5 + 8 = 13$ bulunur.

Buna göre, $f(x) = ax + b = -2x + 13$ tür.

Bu durumda,

$f(9) = -2.9 + 13 = -18 + 13 = -5$ bulunur.

53. $f : (2,+\infty) \to (-1,+\infty)$ ve $f(x) = x^2 - 4x + 3$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f : (2,+\infty) \to (-1,+\infty)$ ise, $x > 2$, $y > -1$ dir.

$y = f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y + 1 = (x - 2)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{y+1} = |x - 2| \text{ tir.}$$

$x > 2$ olduğundan,

$\sqrt{y+1} = x - 2 \Rightarrow x = \sqrt{y+1} + 2$ bulunur.

O halde,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$ dir.

54. $f^{-1}(x + 4) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f^{-1}(x + 4) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1} \Rightarrow f(\dfrac{3x - 1}{2x + 1}) = x + 4$ tür.

$\dfrac{3x - 1}{2x + 1}$ ifadesinin bileşke işlemine göre tersi $\dfrac{-x - 1}{2x - 3}$ tür.

$f(\dfrac{3x - 1}{2x + 1}) = x + 4$ fonksiyonunda x yerine $\dfrac{-x - 1}{2x - 3}$ yazılırsa $f(x)$ bulunur.

$$f\left(\frac{3.\frac{-x-1}{2x-3} - 1}{2.\frac{-x-1}{2x-3} + 1}\right) = \frac{-x-1}{2x-3} + 4 \Rightarrow f(x) = \frac{7x - 13}{2x - 3} \text{ bulunur.}$$

55. $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 2 \\ -x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$ olduğuna göre $f^{-1}(-5)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$x \geq 2$ için $f(x) = -x - 3$ olduğundan,

$2 \geq 2$ olup, $f(2) = -2 - 3 = -5$ tir.

$f(2) = -5 \Rightarrow f^{-1}(-5) = 2$ bulunur.

56. $f(x) = 2^{x+2}$ olduğuna göre $f(\frac{x}{2})$ nin $f(x)$ türünden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = 2^{x+2} \Rightarrow 2^x.4 = f(x) \Rightarrow 2^x = \dfrac{f(x)}{4}$ tür.

$$f(\frac{x}{2}) = 2^{\frac{x}{2} + 2} = 4.2^{\frac{x}{2}} = 4.2^{\frac{1}{2}.x}$$

$$= 4.(2^x)^{\frac{1}{2}} = 4.\sqrt{2^x}$$

$$= 2.\sqrt{\frac{f(x)}{4}} = \sqrt{f(x)}$$

$f(\frac{x}{2}) = \sqrt{f(x)}$ olur.

KONU BİTMİŞTİR...
