KARTEZYEN ÇARPIM, BAĞINTI

Sıralı İkili

Herhangi iki nesne belli bir öncelik sırasına göre bir eleman gibi düşünülürse bu elemana sıralı ikili veya ikili denir.

Birinci bileşeni x, ikinci bileşeni y olan sıralı ikili (x,y) şeklinde yazılır.

İkili de sıra önemli olduğu için $(x,y) \neq (y,x)$ tir.

Kural

(x,y) ve (a,b) gibi iki sıralı ikili olmak üzere

$(x,y) = (a,b)$ ise $x = a$ ve $y = b$ dir.

Örnek:

$(x,\ 4) = (5,\ y)$ ise $x + y$ kaçtır?

Çözüm:

$(x,\ 4) = (5,\ y)$ ise tanım gereği birinci bileşenler birbirine ve ikinci bileşenler birbirine eşit olmak zorundadır.

Bu durumda $x = 5$ ve $y = 4$ olup, $x + y = 5 + 4 = 9$ dur.

Örnek:

$(x + 4,\ 8) = (5,\ y + 5)$ ise x ve y kaçtır?

Çözüm:

$x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$ ve $y + 5 = 8 \Rightarrow y = 3$ bulunur.

Örnek:

$(11,\ 2x + 3y) = (3x + y,\ 12)$ ise (x,y) sıralı ikilisi nedir?

Çözüm:

$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 11 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}\right\}$ sistemi çözülürse, $x = 3$ ve $y = 2$ olur.

İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere birinci bileşen A dan, ikinci bileşen B den alınarak elde edilen tüm sıralı ikililerden oluşan kümeye A ile B kümelerinin **kartezyen çarpımı** denir ve $A \times B$ biçiminde gösterilir.

Bu durumda

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ dir.

Örnek:

$A = \{1,\ 2\}$ ve $B = \{3,\ 5\}$ ise $A \times B$ kümesini liste yöntemiyle yazalım.

Çözüm:

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ olduğundan,

$A \times B = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)\}$ dir.

Örnek:

$A = \{1,\ 2\}$ ve $B = \{3,\ 5\}$ ise $B \times A$ kümesini liste yöntemiyle yazalım.

Çözüm:

$B \times A = \{(x,y) \mid x \in B \text{ ve } y \in A\}$ olduğundan,

$B \times A = \{(3,1), (3,2), (5,1), (5,2)\}$ dir.

Sonuç

A ve B gibi birbirinden farklı ve boş olmayan iki kümenin kartezyen çarpımları için $A \times B \neq B \times A$ dir.

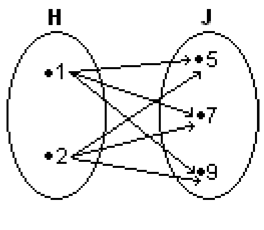
Örnek:

$H = \{1,2\}$ ve $J = \{5,7,9\}$ kümeleri için $H \times J$ kartezyen çarpım kümesini üç farklı yöntemle gösterelim.

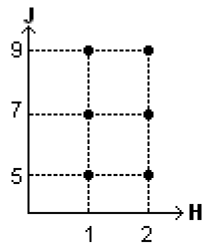
Çözüm:

Liste yöntemiyle gösterimi,

$H \times J = \{(1,5),(1,7),(1,9),(2,5),(2,7),(2,9)\}$ olur.



H x J nin şeması



H x J nin grafiği

Örnek:

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,b),(3,b)\}$ kümesi için A ve B kümelerini bulunuz.

Çözüm:

$A \times B$ kartezyen çarpımında sıralı ikililerin birinci bileşenleri A ya, ikinci bileşenleri B ye ait olduğundan

$A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{a,b\}$ dir.

Uyarı

A ve B kümeleri verildiğinde;

a. Her iki kümenin elemanları da sayılamaz (sonsuz) çoklukta ise $A \times B$ ve $B \times A$ nın grafiği bir alan oluşturur.

b. A nın elemanları sayılamaz, B nin elemanları sayılabilir çoklukta ise $A \times B$ nin grafiği x eksenine paralel doğrulardır.

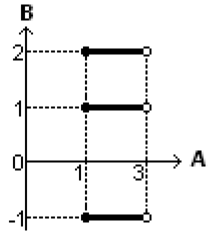
c. A nın elemanları sayılabilir, B nin elemanları sayılamaz çoklukta ise $A \times B$ nin grafiği y eksenine paralel doğrulardır.

Örnek:

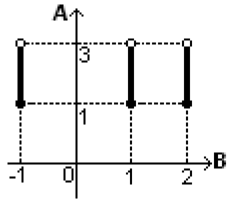
$A = \{x \ / \ x \in R,\ 1 \le x < 3\}$ ve $B = \{-1,1,2\}$ kümeleri için $A \times B$ ve $B \times A$ nın grafiğini çizelim.

Çözüm:

A nın elemanları sayılamaz, B nin elemanları sayılabilir çoklukta olduğundan $A \times B$ nin grafiği x eksenine paralel doğrulardır.



AxB nin grafiği



BxA nin grafiği

B nin elemanları sayılabilir, A nın elemanları sayılamaz çoklukta olduğundan $B \times A$ nın grafiği y eksenine paralel doğrulardır.

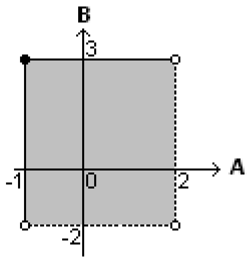
Örnek:

$A = \{x \ / \ x \in R,\ -1 \le x < 2\}$ ve

$B = \{x \ / \ x \in R,\ -2 < x \le 3\}$ kümeleri için $A \times B$ nin grafiğini çizelim.

Çözüm:

$A \times B$ nin grafiği köşeleri $(-1,-2),(2,-2),(2,3),(-1,3)$ olan dikdörtgensel bölgedir.



AxB nin grafiği

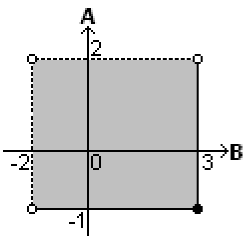
$x = 2$ doğrusu üzerindeki noktalar A'ya ait olmadığından, $y = -2$ doğrusu üzerindeki noktalar B'ye ait olmadığından kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Her iki kümenin elemanları da sayılamaz (sonsuz) çoklukta olduğundan $A \times B$ nin grafiği bir alan oluşturur.

Örnek:

$A = \{x \ / \ x \in R,\ -1 \le x < 2\}$ ve

$B = \{x \ / \ x \in R,\ -2 < x \le 3\}$ kümeleri için $B \times A$ nın grafiğini çizelim.

Çözüm:



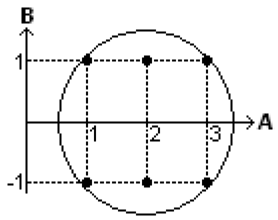
BxA nın grafiği

$x = -2$ doğrusu üzerindeki noktalar B'ye ait olmadığından, $y = 2$ doğrusu üzerindeki noktalar A'ya ait olmadığından kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Her iki kümenin elemanları da sayılamaz (sonsuz) çoklukta olduğundan $B \times A$ nın grafiği bir alan oluşturur.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{-1,1\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesinin noktalarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin düzlemde gösterelim.

Çözüm:



AxB nin grafiği

$A \times B$ kümesinin noktalarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yanda gösterilmiştir.

Kartezyen Çarpımın Eleman Sayısı

A ve B gibi boş olmayan iki küme, $s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olmak üzere

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ ve $s(B \times A) = s(B) \cdot s(A)$ dır.

Örnek :

$A = \{1,2\}$ ve $B = \{a,b,c\}$ kümeleri için $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

$A \times B$ bulunursa
$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,a),(2,b),(2,c)\}$ elde edilir.

$A \times B$ elemanlarını sayarsak 6 olduğunu görürüz. Bu durumda eleman sayısı, yani $s(A \times B) = 2.3 = 6$ olur.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ ve $B = \{a,b,c,d\}$ ise $s(A \times B)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A) = 5$ ve $s(B) = 4$ olduğundan
$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 5 \cdot 4$ bulunur.

Kartezyen Çarpım İşleminin Özellikleri

1. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

5. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

Örnek:

$s(A) = 4$ ve $s(B \cup C) = 7$ olduğuna göre $(A \times B) \cup (A \times C)$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

$$s[(A \times B) \cup (A \times C)] = s[Ax(B \cup C)]$$

$$= s(A).s(B \cup C) = 4.7 = 28$$

Örnek:

$A = \{1,b,c,4\}$, $B = \{b,c,4,e,f,g,k,l\}$, $C = \{c,4,e,r\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $(A \times B) \cap (A \times C)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

$s(A) = 5$ tir.
$B \cap C = \{c,4,3\}$ olup $s(B \cap C) = 3$ olduğundan,

$$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = s[A \times (B \cap C)]$$

$$= s(A).s(B \cap C) = 4.3 = 12$$

Bağıntı

Birbirinden farklı A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; $A \times B$ nin her alt kümesine, A dan B ye **bağıntı** denir. Bağıntılar $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ gibi semboller ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{1,3\}$ ve $B = \{a,b\}$ kümeleri için

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(3,a),(3,b)\}$ olur.

Kartezyen çarpımın her bir alt kümesi A dan B ye bir bağıntıdır. $A \times B$ nin eleman sayısı 4 ve 4 elemanlı bir kümenin bütün alt kümeleri sayısı $2^4 = 16$ olduğu için A dan B ye 16 tane bağıntı tanımlanabilir. Bunlardan bir kaçı

$\beta_1 = \{(1,a),(3,b)\}$

$\beta_2 = \{(1,b),(1,a)\}$

$\beta_3 = \{(1,a),(3,a),(3,b)\}$ dır.

$\beta_4 = \{(1,a),(1,b),(3,1),(3,a),(3,b)\}$ bağıntısı $A \times B$ nin bir alt kümesi değildir. Çünkü β_4 bağıntısının $(3,1)$ elemanı $A \times B$ nin elemanı değildir.

Yani $\beta_4 = \{(1,a),(1,b),(3,1),(3,a),(3,b)\} \not\subset A \times B$ dir. β_4 bir bağıntı değildir.

Uyarı

A ve B kümeleri için A dan B ye tanımlanan β bağıntısı varsa $\beta : A \to B$ veya $A \xrightarrow{\beta} B$

biçiminde gösterilir.

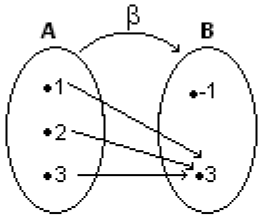
$(x,y) \in \beta$ ise $x\beta y$ veya $\beta(x) = y$ şeklinde gösterilir.

Örnek:

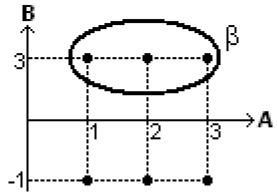
$A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{-1,3\}$ olmak üzere, $\beta : A \to B$ bağıntısı $\beta = \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B \text{ ve } x \le y\}$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre β bağıntısının elemanlarını yazarak grafiğini çizelim.

Çözüm:

$A \times B = \{(1,-1),(1,3),(2,-1),(2,3),(3,-1),(3,3)\}$ olup, bu sıralı ikililerden birinci terimi ikinci teriminden küçük olanlar β bağıntısının elemanları olurlar. Buna göre,



β nın şeması



β nın grafiği

$\beta = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$ tür. $1\beta 3$, $2\beta 3$, $3\beta 3$ olup β bağıntısının şema ve grafiği yukarıda verilmiştir.

Örnek:

$\beta = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \times R, |x| = 2 \text{ ve } |y| < 1\}$ bağıntısının grafiğini analitik düzlemde gösteriniz.

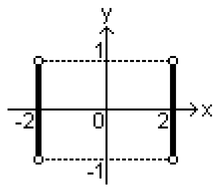
Çözüm:

$\beta = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \times R, |x| = 2 \text{ ve } |y| < 1\}$ bağıntısının elemanları $R \times R$ nin alt kümesi olan (x,y) şeklindeki sıralı ikililerden oluştuğuna göre,

$|x| = 2 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -2$ dir.

$|y| = 1 \Rightarrow -1 < y < 1$ dir.

$\beta = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \times R, |x| = 2 \text{ ve } |y| < 1\}$ olmak



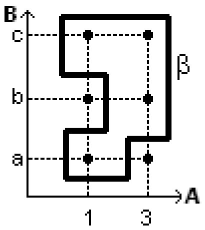
üzere β bağıntısının grafiği y eksenine paralel doğru doğrulardan oluşur.

Örnek:

$A = \{1,3\}$ ve $B = \{a,b,c\}$ olmak üzere $\beta : A \to B$ bağıntısı $\beta = \{(1,a),(1,c),(3,b),(3,c)\}$ şeklinde tanımlanan β bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$ olup, bu sıralı ikililerden $\{(1,a),(1,c),(3,b),(3,c)\}$ ikilileri β bağıntısının elemanlarıdır.



Buna göre, β nın grafiği yanda verilmiştir.

Örnek:

$A = \{x : x \in Z,\ x^2 < 10\}$ ve

$B = \left\{ x : x \in Z^+, \frac{15}{x} = k,\ k \in Z \right\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye tanımlanabilen bütün bağıntıların sayısı kaçtır?

Çözüm:

$A = \{x : x \in Z,\ x^2 < 10\}$ olduğu için karesi 10 dan küçük olan x tamsayıları, $-3,-2,-1,0,1,2,3$ tür.

Buna göre, $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ ve $s(A) = 7$ dir.

$B = \left\{ x : x \in Z^+, \frac{15}{x} = k,\ k \in Z \right\}$ olduğu için 15 i tam bölen pozitif x tam sayıları, $1,3,5,15$ tir.

Buna göre, $B = \{1,3,5,15\}$ ve $s(B) = 4$ tür.

A dan B ye tanımlanabilen bütün bağıntıların sayısı, $A \times B$ kümesinin bütün alt kümeleri sayısına eşittir.

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 7.4 = 28$ olup

A dan B ye tanımlanabilen bütün bağıntıların sayısı,

$2^{s(AxB)} = 2^{28}$ tanedir.

Sonuç

$s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olmak üzere A dan B ye tanımlanabilen bütün bağıntıların sayısı, $2^{m.n}$ dir.

Örnek:

$s(A) = 3$ ve $s(B) = 2$ olmak üzere A dan B ye tanımlanabilen bütün bağıntıların sayısı, $2^{3.2} = 64$ tür.

Örnek:

$s(A) = 3$ ve $s(B) = 4$ olduğuna göre A dan B ye tanımlanacak tüm bağıntılardan kaç tanesi 3 elemanlıdır?

Çözüm:

$s(A) = 3$ ve $s(B) = 4$ ise $s(A \times B) = 3.4 = 12$ dir.
A dan B ye tanımlanacak 3 elemanlı bağıntıların sayısı $A \times B$ kümesinin 3 elemanlı alt kümeleri sayısına eşittir. Buna göre 12 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı,

$$C(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!.3!} = \frac{12.11.10}{6} = 220 \text{ dir.}$$

Tanım

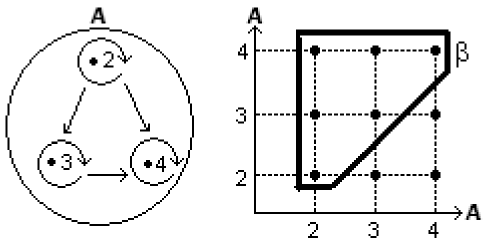
$A \times A$ nın her alt kümesine ise A dan A ya bir bağıntı veya kısaca A da bir bağıntı denir.

Örnek:

$A = \{2,3,4\}$ kümesi veriliyor. A da tanımlı $\beta = \{(x,y) \mid x \le y\}$ bağıntısını liste şeklinde yazarak şema ve grafiğini çiziniz.

Çözüm:

β bağıntısı A da tanımlı olduğundan $A \times A$ kümesinin elemanlarından birinci bileşenleri ikinci bileşenlerine eşit veya birinci bileşenleri ikinci bileşenlerinden küçük olan ikililer β bağıntısının elemanı olurlar. Buna göre,
$\beta = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ dır.



β nın şeması β nın grafiği

Bağıntının Tersi (Ters Bağıntı)

Bir bağıntının tersi, bağıntının sıralı ikililerinin birinci ve ikinci bileşenlerinin yer değiştirmesi ile elde edilir.

Boş olmayan A ve B kümeleri için A dan B ye verilen

$\beta = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ bağıntısının B den A ya

$\beta^{-1} = \{(y,x) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ bağıntısına β **bağıntısının tersi** veya **ters bağıntısı** denir.

$\beta : A \to B$ ise $\beta^{-1} : B \to A$ dır.

$\beta(x) = y$ ise $\beta^{-1}(y) = x$ tir.

Örnek:

$A = \{1,3,5\}$ ve $B = \{a,b\}$ kümeleri için A dan B ye;
$\beta = \{(1,a),(1,b),(3,a),(5,b)\}$ bağıntısının tersini bulunuz.

Çözüm:

$\beta = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ nın tersi

$\beta^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \beta\}$ olacağından;

$\beta = \{(1,a),(1,b),(3,a),(5,b)\}$ bağıntısının tersi

$\beta^{-1} = \{(a,1),(b,1),(a,3),(b,5)\}$ olacaktır.

Örnek :

Tanımlı kümeler A ve B için A dan B ye bir bağıntı
$\beta = \{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8),(9,10)\}$ ise β bağıntısının tersini bulunuz.

Çözüm:

$\beta = \{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8),(9,10)\}$ bağıntısının tersi

$\beta^{-1} = \{(2,1),(4,3),(6,5),(8,7),(10,9)\}$ olur.

Örnek :

$\beta = \{(x,y) \mid 3x + 2y = 11\}$ ve $\alpha = \{(x,y) \mid x + y = 4\}$

olduğuna göre $\beta^{-1} \cap \alpha$ yı bulunuz.

Çözüm:

$\beta = \{(x,y) \mid 3x + 2y = 11\}$ ise $\beta^{-1} = \{(y,x) \mid 3x + 2y = 11\}$

$\alpha = \{(x,y) \mid x + y = 4\}$ olduğuna göre $\beta^{-1} \cap \alpha$ yı bulmak için $3x + 2y = 11$ ve $x + y = 4$ denklemlerini birlikte çözmeliyiz.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 11 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right\} \; x = 3 \text{ ve } y = 1 \text{ bulunur.}$$

$\beta^{-1} \cap \alpha = \{(1,3)\}$ tür.

Bağıntının Özellikleri

Şimdiye kadar A dan B ye veya A da tanımlanan bağıntıları inceledik. Şimdi A da tanımlanan bağıntılara ait özellikleri inceleyeceğiz.

1. Yansıma Özelliği

β bağıntısı A da tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer her $x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ ise β bağıntısının **yansıma özelliği** vardır, diğer bir ifade ile β **yansıyandır** denir.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanan

$\beta = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ bağıntısı,

$1 \in A$ için $(1,1) \in \beta$,

$2 \in A$ için $(2,2) \in \beta$,

$3 \in A$ için $(3,3) \in \beta$ olduğundan yansıyandır.

Örnek:

$A = \{a,b,c,d\}$ kümesinde tanımlanan

$\beta = \{(a,c),(a,a),(c,d,),(b,d),(c,c)\}$ bağıntısı,

$b \in A$ için $(b,b) \notin \beta$ ve $d \in A$ için $(d,d) \notin \beta$ olduğundan yansıyan değildir.

Örnek:

$A = \{3,7,9\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısı yansıyandır. Buna göre, kaç farklı β bağıntısı tanımlanabilir?

Çözüm:

$A \times A = \{(3,3),(7,7),(9,9),(3,7),(3,9),...\}$ olmak üzere

$s(A \times A) = 3.3 = 9$ dur.

Yazılacak olan β da bu 9 elemandan $(3,3),(7,7),(9,9)$ kesinlikle olmalıdır. Geriye kalan $9 - 3 = 6$ elemanla

$2^6 = 64$ tane bağıntı (alt küme) yazılır.

Bu 64 tane bağıntının her birine $(3,3),(7,7),(9,9)$ elemanları yazılırsa 64 tane bağıntının her biri yansıyan olur.

Sonuç

$s(A) = n$ olmak üzere A kümesinde yazılabilecek tüm

yansıyan bağıntıların sayısı $2^{n^2 - n}$ tanedir.

2. Simetri Özelliği

β bağıntısı A da tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer <u>her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ ise β bağıntısının **simetri özeliği** vardır, diğer bir ifade ile β **simetriktir.**

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanan $\beta = \{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ bağıntısı simetrik değildir. Çünkü $(1,2) \in \beta$ olduğu halde $(3,1) \notin \beta$ dır.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanan

$\beta = \{(2,1),(2,2),(1,2),(1,3),(3,1)\}$ bağıntısı yansıyan değildir ama simetriktir.

Örnek:

$K = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanan β bağıntısı yansıyandır fakat simetrik değildir. Buna göre β nın eleman sayısının en küçük değerini bulalım.

Çözüm:

$K \times K = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),...\}$ dır.

β yansıyan ise β da $(1,1),(2,2),(3,3)$ kesinlikle olmalıdır.

$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ bağıntısı hem yansıyandır. Hem simetriktir.

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ bağıntısı yansıyandır. Fakat simetrik değildir.

Buna göre K kümesinde tanımlı, yansıyandır fakat simetrik olmayan bir bağıntının eleman sayısı en az 4 tür.

3. Ters Simetri Özelliği

β bağıntısı A da tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer $x \neq y$ iken <u>her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ ise β bağıntısının **ters simetri özeliği** vardır, diğer bir ifade ile β **ters simetriktir.**

β bağıntısında (x,x) şeklindeki elemanların olması β bağıntısının ters simetri özeliğini bozmaz.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanan

$\beta = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $\alpha = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2)\}$

$\delta = \{(1,1),(2,2),(1,3),(3,2),(3,1)\}$ bağıntılardan hangileri için ters simetri özeliğine sahiptir?

Çözüm:

Ters simetri özeliği için <u>her</u> $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \notin \beta$ olması gerekir. Ayrıca β bağıntısında (x,x) şeklindeki elemanların olması β bağıntısının ters simetri özeliğini bozmaz.

Buna göre verilen bağıntılardan,

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ olduğundan β ters simetriktir.

<u>Her</u> $(x,y) \in \alpha$ için $(y,x) \notin \alpha$ olduğundan α ters simetriktir.

Fakat $(1,3) \in \delta$ iken $(3,1) \in \delta$ olduğundan δ ters simetrik değildir.

Örnek:

$A = \{a,b,c\}$ kümesinde tanımlanan $\beta = \{(a,b),(b,a),(c,c)\}$ bağıntısı ters simetrik değildir.

Çünkü $(a,b) \in \beta$ iken $(b,a) \in \beta$ dır.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanan $\beta = \{(3,3),(2,1),(1,3)\}$ bağıntısı ters simetriktir.

Örnek:

$A = \{a,b,c\}$ kümesinde tanımlanan $\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ bağıntısı yansıma, simetri, ters simetri özelliklerine sahiptir.

Örnek:

$A = \{a,b,c\}$ kümesinde tanımlanan
$\beta = \{(a,a),(a,c),(b,a),(c,a)\}$ bağıntısı,
simetrik değildir. Çünkü $(b,a) \in \beta$ iken $(a,b) \notin \beta$ dır.

Ters simetrik değildir. Çünkü $(a,c) \in \beta$ iken $(c,a) \in \beta$ dır.

4. Geçişme Özelliği

β bağıntısı A da tanımlı bir bağıntı olsun.

Her $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise β bağıntısının **geçişme özelliği** vardır, diğer bir ifade ile β **geçişken** bir bağıntıdır.

Örnek :

$A = \{1,3,5\}$ kümesinde tanımlanan $\beta = \{(1,3),(3,5),(3,3)\}$ bağıntısı geçişken değildir.

Çünkü $(1,3) \in \beta$ ve $(3,5) \in \beta$ iken $(1,5) \notin \beta$ dır.

Örnek :

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan
$\beta = \{(1,2),(2,3),(1,3),(4,5)\}$ bağıntısı geçişken midir?

Çözüm:

$\beta = \{(1,2),(2,3),(1,3),(4,5)\}$ bağıntısı geçişken bağıntıdır. Çünkü,

$(1,2) \in \beta$ ve $(2,3) \in \beta$ için $(1,3) \in \beta$.

$(2,3) \in \beta$ için 3 ile başlayan sıralı ikili yok.

$(1,3) \in \beta$ için 3 ile başlayan sıralı ikili yok.

$(4,5) \in \beta$ için 5 ile başlayan sıralı ikili yok.

Örnek :

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\beta = \{(1,2)\}$ bağıntısı geçişken midir?

Çözüm:

$(1,2) \in \beta$ için 2 ile başlayan sıralı ikili olmadığından geçişkendir.

Örnek :

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan
$\beta = \{(1,3),(3,4),(1,4),(2,3)\}$ bağıntısı geçişken midir?

Çözüm:

$(2,3) \in \beta$ ve $(3,4) \in \beta$ için $(2,4) \notin \beta$ dir.

O halde β bağıntısı geçişken bağıntı değildir.

Örnek :

$A = \{2,4,6,8\}$ kümesi üzerinde tanımlanan
$\beta = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8)\}$ bağıntısı yansıma, simetri, ters simetri, geçişme özelliklerinin hepsini sağlar.

Örnek :

Reel sayılar kümesinde tanımlanan $\beta = \{(x,y) /\ x+1=y\}$ bağıntısını inceleyelim:

$\beta = \{(x,y) /\ x+1=y\}$ ise, β bağıntısındaki ikililerin birinci bileşenlerinin 1 fazlası ikinci bileşene eşittir.

β daki ikililerden bazıları (-2,-1), (-1,0), (0,1), (1,2) dir.

β bağıntısı yansıyan değildir.

Çünkü <u>her</u> $x \in A$ için $(x,x) \notin \beta$ dır.

β bağıntısı simetrik değildir.

Çünkü <u>her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ dır.

β bağıntısı ters simetriktir.

Çünkü $x \neq y$ iken <u>her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ dır.

β bağıntısı geçişken değildir.

Çünkü <u>her</u> $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \notin \beta$ dır.

Bağıntı Çeşitleri

Sıralama Bağıntısı

β bağıntısı A da tanımlı bir bağıntı olsun. β bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özelikleri varsa β bağıntısına, A üzerinde bir **sıralama bağıntısı** denir.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ da tanımlı $\beta = \{(x,y) \mid x \geq y\}$ bağıntısının sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

β bağıntısı elamanları ile yazılırsa:

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), \\ (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5) \end{array} \right\} \text{ olur.}$$

β bağıntısının sıralama bağıntısı olması için yansıma, ters-simetri ve geçişme özeliklerinin olması gerekmektedir. Bu durumda;

Yansıma özeliği:

<u>Her</u> $x \in A$ için $x \geq x$ olduğundan $(x,x) \in \beta$ dır. β bağıntısı yansıyan bağıntıdır.

Ters simetri özeliği:

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ olduğundan β bağıntısı ters-simetrik bağıntıdır.

Geçişme özeliği:

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ için $x \geq y$ ve $y \geq z$ olup $x \geq z$ olacağından $(x,z) \in \beta$ olup β bağıntısı geçişken bağıntıdır.

β bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından,A da tanımlı β bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek:

$A = \{1,2,4\}$ da tanımlı $\beta = \left\{(x,y) \middle| \ \frac{y}{x} = n \text{ ve } n, x, y \in Z\right\}$ bağıntısının sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

β bağıntısına ait (x,y) ikilisindeki x sayısı y sayısını tam böldüğüne ve $A = \{1,2,4\}$ olduğuna göre

$\beta = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (4,4)\}$ olur.

Yansıma özeliği:

<u>Her</u> $x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ dır. β bağıntısı yansıyan bağıntıdır.

Ters simetri özeliği:

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ olduğundan β bağıntısı ters-simetrik bağıntıdır.

Geçişme özeliği:

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ için $(x,z) \in \beta$ olup β bağıntısı geçişken bağıntıdır.

β bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından, A da tanımlı β bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek:

$A = \{1, 5, 7\}$ da tanımlı $\beta = \{(1,1), (1,5), (5,5), (7,7)\}$ bağıntısı , yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından, A da tanımlı β bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Tam Sıralama Bağıntısı

β bağıntısı A da tanımlı bir sıralama bağıntısı olsun. A nın her elemanı birbirine β bağıntısı ile bağlı ise, bağıntıya **tam sıralama bağıntısı** denir.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ da tanımlı $\beta = \{(x,y) \mid x \geq y\}$ bağıntısının tam sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

A da tanımlı β bağıntısının sıralama bağıntısı olduğunu göstermiştik. β bağıntısının tam sıralama bağıntısı olabilmesi için elemanların birbirine bağlı olması gerekmektedir.

Burada A nın elemanlarına bakılırsa;

$5 \to 4$, $4 \to 3$, $3 \to 2$ ve $2 \to 1$ elemanları $x \geq y$ bağıntısı ile bağlıdır.

Dolayısıyla A kümesinin elemanları birbirine,

$5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ biçiminde bağlanabiliyor.

A da tanımlı β bağıntısı, tam sıralama bağıntısıdır.

Kısmi Sıralama Bağıntısı

β bağıntısı A da tanımlı bir sıralama bağıntısı olsun. A nın bazı elemanları birbirine β bağıntısı ile bağlı değilse, bağıntıya **kısmi sıralama bağıntısı** denir.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ da tanımlı $\beta = \{(x,y) : x \mid y\}$ bağıntısının kısmi sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

β nın sıralama bağıntısı olduğunu göstermek gerekir, β liste şeklinde yazılırsa:

$\beta = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$ dır.

Yansıma özeliği:

Her $x \in A$ için $x \mid x$ olduğundan $(x, x) \in \beta$ dır. β yansıyandır.

Ters-simetri özeliği:

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ olduğundan β bağıntısı ters-simetriktir.

Geçişme özeliği:

Her $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ için $x \mid y$ ve $y \mid z$ ise $x \mid z$ olup $(x, z) \in \beta$ olacağından β geçişken bağıntıdır.

A da tanımlı β bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Burada A nın elemanlarına bakılırsa;
$1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 3$ ve $4 \to 4$ fakat 2 ile 3 elemanları arasında bir bağlantı yoktur.

Bu durumda bağıntı kısmi sıralama bağıntısı olur.

Denklik Bağıntısı

β, A da tanımlı bir bağıntı olmak üzere, β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelikleri varsa β bağıntısına, A üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

Denklik, $\equiv$ sembolü ile gösterilir. $(a, b) \in \beta$ için β denklik bağıntısı ise $a \equiv b$ dır. Bu $a \equiv b$, "**a denk b**" diye okunur.

Örnek:

$A = \{1, 5, 7\}$ da tanımlı $\beta = \{(1,1), (1,5), (5,5), (7,7), (5,1)\}$ bağıntısını yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından β , A da denklik bağıntısıdır.

Örnek:

Üçgenler kümesinde tanımlanan eşlik bağıntısının, bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Bağıntının denklik bağıntısı olabilmesi için yansıma, simetri ve geçişme özeliği olması gerekir.

Yansıma özeliği:

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ dir. Her üçgen kendisine benzer. Yansıma özeliği vardır.

Simetri özeliği:

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ ise $\overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ dir. Simetri özeliği vardır.

Geçişme özeliği:

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ ve $\overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{KLM}$ ise $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{KLM}$ dir.
Geçişme özeliği vardır.

O halde üçgenler kümesinde tanımlanan eşlik bağıntısının, bir denklik bağıntısıdır.

Örnek:

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinde tanımlı
$\beta = \{(x,y) : 4|(x-y)\}$ bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

A da tanımlanan β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özeliğinin olduğunu göstermek gerekmektedir.

Yansıma özeliği:

<u>Her</u> $x \in A$ için $x - x = 0$, sıfır (0), 4 ile bölündüğünden $(x,x) \in \beta$ dır. β yansıyandır.

Simetri özeliği:

<u>Her</u> $x, y \in A$ için $x - y$, 4 ile bölünürse; $y - x$ de 4 ile bölünür.

$k \in Z$ olmak üzere $x - y = 4k$ ise $y - x = -4k$ dır.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ dır. β simetriktir.

Geçişme özeliği:

$\forall x, y, z \in A$ için $4|(x-y)$ ve $4|(y-z)$ ise $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ dır.

$(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ ise $x - y = 4k$ ve $y - z = 4m$

$\Rightarrow (x-y) + (y-z) = 4k + 4m$

$\Rightarrow x - y + y - z = 4(k+m)$

$\Rightarrow x - z = 4n \Rightarrow (x,z) \in \beta$

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ için $(x,z) \in \beta$ olup β geçişkendir.

β , A da yansıyan, simetrik ve geçişken bir bağıntı olduğundan denklik bağıntısıdır.

Örnek:

Tamsayılar kümesinde tanımlanan $\beta = \{(x,y) : 5|(x-y)\}$ bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özeliğinin olduğunu göstermek gerekmektedir.

Yansıma özeliği:

<u>Her</u> $x \in A$ için $x - x = 0$, sıfır (0), 5 ile bölündüğünden $(x,x) \in \beta$ dır. β yansıyandır.

Simetri özeliği:

<u>Her</u> $x, y \in A$ için $x - y$, 5 ile bölünürse; $y - x$ de 5 ile bölünür.

$k \in Z$ olmak üzere $x - y = 5k$ ise $y - x = -5k$ dır.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ dır. β simetriktir.

Geçişme özeliği:

$\forall x, y, z \in A$ için $5|(x-y)$ ve $5|(y-z)$ ise $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ dır.

$(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ ise $x - y = 5k$ ve $y - z = 5m$

$\Rightarrow (x-y)+(y-z)=5k+5m$

$\Rightarrow x-y+y-z=5(k+m)$

$\Rightarrow x-z=5n \Rightarrow (x,z)\in\beta$

Her $(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta$ için $(x,z)\in\beta$ olup β geçişkendir.

β, yansıyan, simetrik ve geçişken bir bağıntı olduğundan denklik bağıntısıdır.

Denklik Sınıfları

β, A da bir denklik bağıntısı olmak üzere; β, A nın bir x elemanına denk olan tüm y elemanlarının kümesine x in **denklik sınıfları** denir ve $\bar{x}$ biçiminde gösterilir.

$$\bar{x}=\{y \mid y\in A,\ (x,y)\in\beta\} \text{ dır.}$$

Örnek:

$A=\{0,1,2,3,4\}$ de tanımlanan $\beta=\{(x,y):3 \mid (x-y)\}$ bağıntısı denklik bağıntısı ise denklik sınıflarını bulunuz.

Çözüm:

β nın denklik bağıntısı olabilmesi için yansıma, simetri ve geçişme özeliklerinin olması gerekir.

β elemanlarıyla yazılırsa:

$$\beta=\left\{\begin{matrix}(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\\(0,3),(1,4),(3,0),(4,1)\end{matrix}\right\}$$

Yansıma özelliği.

Her $x\in A$ için $x-x=0$, sıfır (0), 3 ile bölündüğünden $(x,x)\in\beta$ dır. β yansıyandır.

Simetri özeliği:

Her $x,y\in A$ için $x-y$, 3 ile bölünürse; $y-x$ de 3 ile bölünür.

$k\in Z$ olmak üzere $x-y=3k$ ise $y-x=-3k$ dır.

Her $(x,y)\in\beta$ için $(y,x)\in\beta$ dır. β simetriktir.

Geçişme özeliği:

$\forall x,y,z\in A$ için $3 \mid (x-y)$ ve $3 \mid (y-z)$ ise $(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta$ dır.

$(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta$ ise $x-y=3k$ ve $y-z=3m$

$\Rightarrow (x-y)+(y-z)=3k+3m$

$\Rightarrow x-y+y-z=3(k+m)$

$\Rightarrow x-z=3n \Rightarrow (x,z)\in\beta$

Her $(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta$ için $(x,z)\in\beta$ olup β geçişkendir.

Böylece β nın denklik bağıntısı olduğu gösterilmiş oldu.

Denklik sınıflarını bulalım.

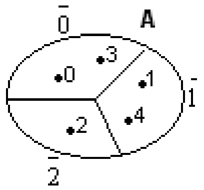
0 a bağlı elemanlar: 0 ve 3 olup $\bar{0}=\{0,3\}$ tür.

1 e bağlı elemanlar: 1 ve 4 olup $\bar{1}=\{1,4\}$ tür.

2 ye bağlı elemanlar: 2 olup $\bar{2}=\{2\}$ dir.

3 e bağlı elemanlar: 3 ve 0 olup $\bar{3}=\{3,0\}$ dır.

4 e bağlı elemanlar: 4 ve 1 olup $\bar{4}=\{4,1\}$ dir.



$\bar{0}=\bar{3}$ ve $\bar{1}=\bar{4}$ olduklarına dikkat ediniz. Bu durumda denklik sınıfları $\bar{0}$, $\bar{1}$ ve $\bar{2}$ dir. Bu denklik sınıfları şema ile gösterilirse, aşağıdaki gibi olur.

Örnek:

$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinde tanımlı $\beta=\{(x,y):4 \mid (x-y)\}$ bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu gösterip oluşan denklik sınıflarını yazınız..

Çözüm:

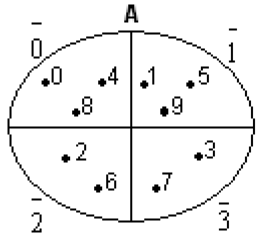
A da tanımlanan β bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu daha önceki örneklerde göstermiştik.

Oluşan denklik sınıfları,

$\bar{0} = \{0,4,8\}$, $\bar{1} = \{1,5,9\}$, $\bar{2} = \{2,6\}$, $\bar{3} = \{3,7\}$,

$\bar{4} = \{0,4,8\}$, $\bar{5} = \{1,5,9\}$, $\bar{6} = \{2,6\}$, $\bar{7} = \{3,7\}$,

$\bar{8} = \{0,4,8\}$, $\bar{9} = \{1,5,9\}$ dur.



$\bar{0} = \bar{4} = \bar{8}$, $\bar{1} = \bar{5} = \bar{9}$, $\bar{2} = \bar{6}$, $\bar{3} = \bar{7}$ olup A kümesi yandaki gibi denklik sınıflarına ayrılmış olur.

Çözümlü Sorular

1. $(2x,\ 8) = (6,\ x + y)$ ise y kaçtır?

Çözüm:

$(2x,\ 8) = (6,\ x + y)$ ise $2x = 6$ ve $x + y = 8$ dir.

$\Rightarrow x = 3$ ve $3 + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 3 = 5$ bulunur.

2. $A = \{x \mid x \in Z,\ |x| \le 3\}$ ve $B = \{x \mid x \in Z,\ -2 \le x < 1\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

$A = \{x \mid x \in Z,\ |x| \le 3\} = \{x \mid x \in Z,\ -3 \le x \le 3\}$

$= \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ tür.

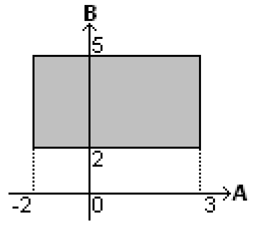
$B = \{x \mid x \in Z,\ -2 \le x < 1\} = \{-2,-1,0\}$ dır.

$s(A \times B) = s(A).s(B) = 7.3 = 21$ bulunur.

3. $A = \{x \mid x \in R,\ -2 \le x \le 3\}$ ve $B = \{x \mid x \in R,\ 2 \le x \le 5\}$ olduğuna göre $A \times B$ kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsünün belirttiği alan kaç birim karedir?

Çözüm:

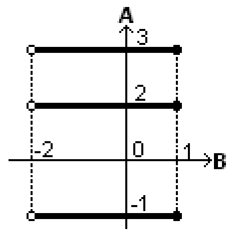
$A = [-2,3]$ ve $B = [2,5]$ olmak üzere $A \times B$ kümesini oluşturan noktalar yandaki şekilde taralı bölgedir. Şekildeki taralı alan $3.5 = 15\ br^2$ olduğuna göre $A \times B$ kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsünün belirttiği alan $15\ br^2$ dir.



AxB nın grafiği

4. $A = \{-1,2,3\}$ ve $B = \{x \mid x \in R,\ -2 < x \le 1\}$ kümeleri veriliyor. $B \times A$ kümesinin grafiğini çiziniz.

Çözüm:

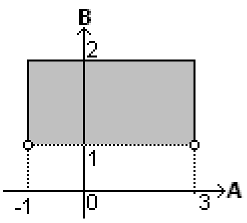


BxA nın grafiği

$B \times A$ kartezyen çarpımında B kümesinin elemanları sayılamaz çoklukta, A kümesinin elemanları sayılabilir çoklukta olduğundan $B \times A$ nın grafiği x eksenine paralel doğrulardan oluşur.

5. $A = (1,2]$ ve $B = [-1,5]$ olmak üzere $B \times A$ kümesinin grafiğini çiziniz.

Çözüm:



BxA nın grafiği

$B \times A$ kümesinin grafiği çizilirken B kümesinin elemanları x değerlerini, A kümesinin elemanları y değerlerini oluşturur.

İki kümenin de elemanları sayılamaz çoklukta olduğundan grafik alan belirtir.

Grafik çizilirken $x = -1$ ile $x = 3$ ve $y = 1$ ile $y = 2$ doğruları çizilir. ($y = 1$ doğrusu kesik noktalı çizilir. Çünkü 1, A kümesinin sınırı, fakat elemanı değildir.)

Meydana gelen dikdörtgenin alanı bize $B \times A$ kümesinin grafiğini verir.

6. $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{1,5\}$ olduğuna göre, $B\times(A\cap C)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

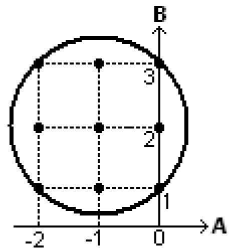
Çözüm:

$A\cap C=\{1\}$ ve $B=\{2,3\}$ olduğuna göre,

$s[B\times(A\cap C)]=s(A).s(B\cap C)=1.2=2$ dir.

7. $A=\{-2,-1,0\}$ ve $B=\{1,2,3\}$ olduğuna göre $A\times B$ kümesinin noktalarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı kaç birimdir?

Çözüm:



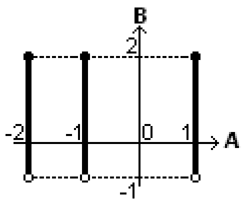
$A\times B$ nin grafiği yanda çizilmiştir. Bu 9 noktayı dışarıda bırakmayan en küçük çember çizilmiştir. çemberin yarıçapı $(-2,3)$ ile $(0,1)$ noktaları veya $(-2,1)$ ile $(0,3)$ noktaları arasındaki uzaklığın yarısıdır.

$(-2,3)$ ile $(0,1)$ noktalarının uzaklığının yarısı,

$$\frac{\sqrt{(-2-0)^2+(1-3)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \text{ dir.}$$

O halde çemberin yarıçapı $\sqrt{2}$ birimdir.

8.



$A\times B$ nin grafiği yanda verilmiştir. Buna göre A kümesinin elemanlarını yazınız.

Çözüm:

$A\times B$ nin elemanları (x,y) şeklindeki ikililerdir.

A kümesinin elemanları x ekseninde gösterilir.

Buna göre x ekseninde verilen değerler $-2,-1,1$ olup $A=\{-2,-1,1\}$ dir. Ayrıca grafikte verilen doğrular A x eksenine dik olduğundan A kümesi sonlu elemanlıdır.

9. $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{d,e,f\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye tanımlanabilen tüm bağıntı sayısı kaçtır?

Çözüm:

$s(A\times B)=s(A).s(B)=3.3=9$ olup A dan B ye bağıntı sayısı demek $A\times B$ nin alt küme sayısı demektir.

Buna göre, A dan B ye tanımlanabilen tüm bağıntı sayısı,

$2^{s(A\times B)}=2^9=512$ dir.

10. $A=\{3,5\}$ kümesi veriliyor. A dan B ye tanımlana bilen bağıntı sayısı 64 olduğuna göre B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

A dan B ye bağıntı sayısı demek $A\times B$ nin alt küme sayısı demektir. Buna göre, A dan B ye tanımlanabilen tüm bağıntı sayısı,

$2^{s(A\times B)}=64\Rightarrow 2^{s(A).s(B)}=2^6$ olup,

$s(A).s(B)=6\Rightarrow 2.s(B)=6\Rightarrow s(B)=3$ bulunur.

11. $\beta=\{(3,7),(2,8),(-1,1),(2,0),(4,3)\}$ bağıntısının ters bağıntısı olan β^{-1} bağıntısının elemanlarını yazınız.

Çözüm:

$\beta^{-1}=\{(7,3),(8,2),(1,-1),(0,2),(3,4)\}$ tür.

12. $\beta_1=\{(x,y)|x,y\in R,\ x+y=10\}$ ve

$\beta_2=\{(x,y)|x,y\in R,\ 3y=x+2\}$ bağıntıları veriliyor.

$\beta_1\cap\beta_2^{-1}$ yi bulunuz.

Çözüm:

$\beta_2=\{(x,y)|x,y\in R,\ 3y=x+2\}$ ise

$\beta_2^{-1}=\{(x,y)|x,y\in R,\ 3x=y+2\}$ dir.

$\beta_1 \cap \beta_2^{-1}$ yi bulmak için $x + y = 10$ ve $3x = y + 2$ denklemlerinin ortak çözümü yapılır.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 3x = y + 2 \end{array}\right\} x = 3 \text{ ve } y = 7 \quad \text{olup } \beta_1 \cap \beta_2^{-1} = \{(3,7)\}$$

bulunur.

13. $s(B \cap C) = 15$, $s(A \times B) = 20$ ve $s[(A \times B) \cap (A \times C)] = 60$ olduğuna göre, $s(B)$ kaçtır?

Çözüm:

$(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$ ve $s(B \cap C) = 15$ olduğu için,

$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = s[A \times (B \cap C)] = s(A).s(B \cap C)$

$60 = s(A).15 \Rightarrow s(A) = 4$ tür.

$s(A \times B) = 20 \Rightarrow s(A).s(B) = 20 \Rightarrow 4.s(B) = 20$

$\Rightarrow s(B) = 5$ bulunur.

14. $A \times B = \{(a,2), (b,1), (3,2), (b,2), (3,1), (a,1)\}$ ve $B \times C = \{(1,a), (2,1), (2,a), (1,1)\}$ olduğuna göre $(A \times B) - (B \times C)$ kümesi kaç elemanlıdır?

Çözüm:

$A \times B = \{(a,2), (b,1), (3,2), (b,2), (3,1), (a,1)\}$ ise,

$A = \{a,b,3\}$ ve $B = \{1,2\}$ dir.

$B \times C = \{(1,a), (2,1), (2,a), (1,1)\}$ ise, $C = \{a,1\}$ dir.

Buna göre, $A - C = \{b,3\}$ olup $s(A - C) = 2$ dir.

$s[(A \times B) - (B \times C)] = s[(A - C) \times B]$

$= s(A - C).s(B) = 2.2 = 4$ bulunur.

15. $A = \{1,3,5,7\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x,y) \mid y > x\}$ bağıntısı hangi özelliklere sahiptir?

Çözüm:

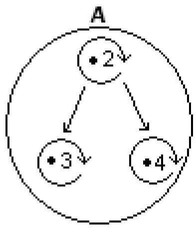
$\beta = \{(1,3), (1,5), (1,7), (3,5), (3,7), (5,7)\}$ bağıntısı,

<u>Her</u> $x \in A$ için $(x,x) \notin \beta$ dır. β bağıntısı yansıyan değildir.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ dır. β simetrik değildir.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ için $(x,z) \in \beta$ olduğundan β geçişken bağıntıdır.

16.



$A = \{2,3,4\}$ kümesinde tanımlanan β bağıntısının şeması yanda verilmiştir. Buna göre β bağıntısı yansıma, simetri, ters simetri, geçişme özelliklerinden hangisi yada hangilerini sağlar?

Çözüm:

Verilen şemaya göre

$\beta = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}$ tür.

<u>Her</u> $x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ dır. β bağıntısı yansıyandır.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ dır. β simetrik değildir.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ dır. β ters simetriktir.

<u>Her</u> $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ için $(x,z) \notin \beta$ olduğu

gösterilemediği için β geçişken bağıntıdır.

17. $(3^{x-1}, 2^{y+1}) = (1, \frac{1}{2})$ olduğuna göre $x - y$ kaçtır?

Çözüm:

$(3^{x-1}, 2^{y+1}) = (1, \frac{1}{2})$ ise $3^{x-1} = 1$ ve $2^{y+1} = \frac{1}{2}$

$3^{x-1} = 1 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir.

$2^{y+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{y+1} = 2^{-1} \Rightarrow y+1=-1 \Rightarrow y=-2$ dir.

Buna göre, $x-y = 1-(-2) = 3$ bulunur.

18. $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$ ve $B \times C = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}$ olduğuna göre $A \times C$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$ ise

$A = \{1,2\}$ ve $B = \{2,3\}$ tür.

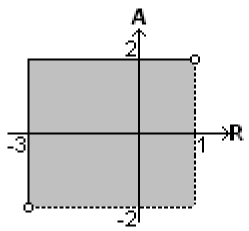
$B \times C = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}$ ise $C = \{5,6\}$ dır.

$A = \{1,2\}$ ve $C = \{5,6\}$ ise

$A \times C = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$ olur.

19. $R = [-3,1)$ ve $A = (-2,2]$ olmak üzere $R \times A$ kümesinin grafiğini çiziniz.

Çözüm:



$R \times A$ kümesinin grafiği çizilirken R kümesinin elemanları x değerlerini, A kümesinin elemanları da y değerlerini oluşturur.

Grafik çizilirken $x=-3$ ile $x=1$ doğruları ve $y=2$ ile $y=-2$ doğruları çizilir. Oluşan dikdörtgenin alanı istenen grafiktir.

Burada $x=1$ ve $y=-2$ doğruları çizilirken doğru kesikli çizgi şeklinde çizilir. Çünkü $1 \notin R$ ve $-2 \notin A$ dır.

20. $M = \{-2,-1,0\}$ ve $N = \{a,b\}$ olduğuna göre N den M ye tanımlanabilen tüm bağıntıların sayısı kaçtır?

Çözüm:

N den M ye tanımlanan bağıntı demek $N \times M$ nin alt kümeleri sayısı demektir.

$s(N \times M) = s(N).s(M) = 2.3 = 6$ olup $N \times M$ nin alt kümeleri sayısı, $2^6 = 64$ olduğundan N den M ye tanımlanabilen tüm bağıntıların sayısı 64 tür.

21. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$ ve $\beta = \{(x,y) | x \in A \text{ ve } y \in B,\ x = 2y-1\}$ olduğuna göre β bağıntısının tersini bulunuz.

Çözüm:

$\beta = \{(1,1),(3,2)\}$ olup $\beta^{-1} = \{(1,1),(2,3)\}$ tür.

24. $A = \{0,1,2\}$ kümesinde $\beta = \{(0,2),(1,5),(2,7)\}$ bağıntısı tanımlanmıştır. Buna göre $\beta(0)+\beta(2)$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\beta = \{(0,2),(1,5),(2,7)\}$ olduğuna göre,

$(0,2) \in \beta \Rightarrow \beta(0) = 2$ dir.

$(2,7) \in \beta \Rightarrow \beta(2) = 7$ dir.

$\beta(0)+\beta(2) = 2+7 = 9$ bulunur.

25. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı, $\beta = \{(x,y) | (x-y).(x+y)-x+y = 0,\ x,y \in R\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Buna göre 5 in denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm:

5 in denklik sınıfı $\bar{5} = \{y | y \in R \text{ ve } (5,y) \in \beta\}$ olur.

$\beta = \{(x,y) | (x-y).(x+y)-x+y = 0,\ x,y \in R\}$ olmak üzere

$x = 5$ ise,

$(5-y).(5+y)-5+y = 0 \Rightarrow (5-y).(5+y)-(5-y) = 0$

$\Rightarrow (5-y).(5+y-1) = 0 \Rightarrow (5-y).(4+y) = 0$

$\Rightarrow 5-y=0$ veya $4+y=0$

$\Rightarrow y=5$ veya $y=-4$ tür.

Buna göre $\bar{5}=\{-4,5\}$ tir.

22. $A=\{0,1,2,3,8\}$ kümesinde $\beta=\{(x,y) \mid y=2^x, x,y \in A\}$ bağıntısı tanımlanıyor. Buna göre β^{-1} bağıntısını yazınız.

Çözüm:

$A=\{0,1,2,3,8\}$ olmak üzere $y=2^x, x,y \in A$ ise,

$x=0$ ise $y=2^0=1 \in A$,

$x=1$ ise $y=2^1=2 \in A$

$x=3$ ise $y=2^3=8 \in A$ olup

$\beta=\{(0,1),(1,2),(3,8)\}$ dir. Buna göre

$\beta^{-1}=\{(1,0),(2,1),(8,3)\}$ tür.

23. $A=\{1,3,4\}$ ve $B=\{2,3,4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A dan A ya tanımlanan bağıntılardan kaçı, B den B ye tanımlanan bağıntılara eşittir?

Çözüm:

$A \times A$ kümesinin her alt kümesine A dan A ya bağıntı denir.

$A \times A=\{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$

$B \times B$ kümesinin her alt kümesine B den B ye bağıntı denir.

$B \times B=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$(A \times A) \cap (B \times B)=\{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

$s[(A \times A) \cap (B \times B)]=4$ olduğuna göre A dan A ya tanımlanan bağıntılardan $2^4=16$ tanesi, B den B ye tanımlanan bağıntılara eşittir.

26. $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısı yansıyandır; ancak simetrik ve ters simetrik değildir. Buna göre β bağıntısı en az kaç elemanlıdır?

Çözüm:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısı yansıyan ise $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$ ikilileri β bağıntısının elemanlarıdır.

Bu bağıntının simetrik olmaması için herhangi bir ikilinin eklenmesi gerekir. Örneğin $(1,3)$ ikilisini ekleyelim bu durumda $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3)\}$ ikilileri β bağıntısının elemanları olur.

Bu bağıntı simetri özelliğini sağlamaz, fakat ters simetri özelliğini sağlar. Buna göre ters simetri özelliğinin sağlanmaması için $(3,1)$ ikilisi de β bağıntısına eklenmelidir.

Bu durumda $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1)\}$ ikilileri β bağıntısının elemanları olur.

Bu durumda simetri özelliği sağlanacağından yeni bir ikilinin daha eklenmesi gerekir. Örneğin $(4,5)$ ikilisini ekleyelim.

Buna göre oluşan

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(4,5)\}$ bağıntısı yansıma özelliğine sahip fakat hem simetri, hem de ters simetri özelliğine sahip değildir.

Buna göre, 5 elemanlı A kümesinde tanımlanan yansıyan; ancak simetrik ve ters simetrik olmayan bir bağıntı en az 8 elemanlı olmalıdır.

KONU BİTMİŞTİR…