KÜMELER

Küme Kavramı

İyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğuna küme denir. Bir kümenin belirtilebilmesi için kümeyi oluşturan nesnelerin herkes tarafından anlaşılması ve belli bir anlam olması gerekir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine kümenin elemanı denir.

Kümeler A,B,C,… gibi büyük harflerle gösterilir.

Bir x nesnesi bir A kümesine ait ise $x \in A$ biçiminde yazılır.

Bir y nesnesi bir A kümesine ait değilse $y \notin A$ biçiminde yazılır.

Bir kümedeki nesnelerin sayısına kümenin eleman sayısı denir ve $s(A)$ ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{a, \Delta, \text{Ali}, 9, 10\}$ kümesini göz önüne alalım.

A kümesinin elemanlarından biri a dır. Bu durumda $a \in A$ dır.

A kümesinin elemanları içinde 5 yoktur. Bu durumda $5 \notin A$ dır.

A kümesi 5 tane elemana sahip olduğundan $s(A) = 5$ tir.

Uyarı

Kümelerin elemanlarının yerini değiştirmek, kümeyi değiştirmez. Kümede bir eleman bir defa yazılır.

Kümelerin Gösterilişi

1. Liste Yöntemi ile Gösterme

Kümenin elemanları sıra önemli olmaksızın $\{.......\}$ biçimindeki parantezin içine, aralarına virgül konularak yazılırsa, buna "liste biçiminde gösterme" denir.

Örnek:

"SAKARYA" sözcüğündeki harflerin oluşturduğu kümeyi liste biçiminde yazalım.

Çözüm:

Kümeyi A ile gösterelim. $A = \{S, A, K, R, Y\}$ dir.

Kümelerde her eleman bir defa yazılır, tekrarlanmaz. Bunun için üç tane A dan bir tane alındı.

A kümesi 5 tane elemana sahip olduğundan $s(A) = 5$ tir.

Örnek:

$B = \{a, b, c, \{a, b\}, \{c\}\}$ kümesini eleman sayısını bulunuz.

Çözüm:

$A = \{a, b, c, \{b\}, \{a, b\}\}$ kümesinin elemanlarını yazalım

$a \in A$, $b \in A$, $\{b\} \in A$, $\{a, b\} \in A$ olup $s(A) = 4$

2. Ortak Özellik Yöntemi

Kümenin elemanları belli bir özelliği sağlıyorsa, bu özelliğe ortak özellik denir. Küme ortak olan bu özellikle gösterilebilir.

Örnek:

$B = \{\text{pazar, pazartesi, persembe}\}$ kümesi verilsin.

B kümesinin elemanları arasında ortak olan özellik, her birinin haftanın p ile başlayan günü olmasıdır. B kümesinin elemanlarını x ile gösterirsek verilen küme,

$B = \{x / x \text{, haftanin p ile baslayan günleri}\}$ biçiminde yazılabilir.

Bu B kümesi "x lerden oluşur, öyle ki x, haftanın p ile başlayan bir günüdür"

Örnek:

4'ten küçük doğal sayıların kümesini ortak özelliklerine göre,

$A = \{x / x \text{, 4' ten küçük dogal sayi}\}$ veya

$A = \{x / x < 4 \text{ ve } x \in N\}$ şeklinde yazılabilir.

Bu A kümesi "x lerden oluşur, öyle ki x, 4'ten küçük ve x doğal sayıdır"

Örnek:

$B = \{x / x \text{ ,tamsayi ve } 0 \leq x < 10\}$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

0 dan 10'a kadar olan tam sayılar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sayılarıdır.

O halde $s(B) = 10$ dur.

Örnek:

$A = \{x / x \in Z \text{ ve } 3x - 1 = 5\}$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

$3x - 1 = 5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

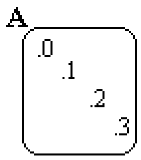
$A = \{x / x \in Z \text{ ve } 3x - 1 = 5\} = \{2\}$ dir.

O halde $s(A) = 1$ dir.

3. Venn Şeması İle Gösterim

Kümenin bütün elemanları önlerine birer nokta konularak kapalı bir eğri içine yazılır. Eğri herhangi bir şekilde olabilir; elips, çember, dikdörtgen gibi.

Örnek:



Yandaki venn şemasına göre,

$2 \in A$, $3 \in A$, $8 \notin A$, $10 \notin A$

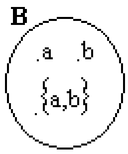
A kümesinin eleman sayısı,

$s(A) = 4$ tür.

Örnek:

$B = \{a, b, \{a, b\}\}$ kümesini venn şeması ile gösterelim.

Çözüm:



$s(B) = 3$ tür.

$a \in B$, $b \in B$, $\{b\} \notin A$, $\{a, b\} \in A$

Eşit Kümeler - Denk Kümeler

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir. A kümesi B kümesine eşit ise $A = B$ biçiminde gösterilir. Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir. A kümesi B kümesine denk ise $A \equiv B$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{b, c, a\}$ kümeleri aynı elemanlardan oluştuğu için $A = B$ dir.

Örnek:

$K = \{0,2,4,6,8\}$ ve $M = \{x /\ 0 \leq x < 9 \text{ ve x çift sayı}\}$ kümeleri veriliyor. M kümesi liste biçiminde yazılırsa,

$M = \{0,2,4,6,8\}$ olup K ile M kümeleri aynı elemanlardan oluştuğu için $K = M$ dir.

Örnek:

$M = \{x /\ 3x + 6 = 12,\ x \in N\}$ ve

$N = \left\{x /\ \dfrac{x+1}{3} = 1,\ x \in N\right\}$ kümeleri veriliyor.

$3x + 6 = 12$ ise $3x = 6$ olup $x = 2$ dir.

O halde, $M = \{2\}$ elde edilir.

$\dfrac{x+1}{3} = 1$ ise $x + 1 = 3$ olup $x = 2$ dir.

O halde, $N = \{2\}$ elde edilir. M ile N kümeleri aynı elemanlardan oluştuğu için $M = N$ dir.

Örnek:

$A = \{x / |x| < 3 \text{ ve } x \in Z\}$, $B = \{x / x^2 < 9 \text{ ve } x \in Z\}$ kümelerini inceleyelim.

Mutlak değeri 3 ten küçük olan tam sayılar -2,-1,0,1,2 olduğundan $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ dir.

Karesi 9 dan küçük olan tamsayılar -2,-1,0,1,2 olduğundan $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ dir.

A ile B kümeleri aynı elemanlardan oluştuğu için $A = B$ dir.

Örnek:

$D = \{1,7,5,2x-1\}$ ve $E = \{3,1,y-1,5\}$ kümeleri veriliyor. $D = E$ olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$D = E$ olduğuna göre D ile E kümeleri aynı elemanlardan oluşmuştur. Buna göre

$2x - 1 = 3$ ve $y - 1 = 3$ olmalıdır.

$2x - 1 = 3$ ise $2x = 4 \Rightarrow x = 2$ dir.

$y - 1 = 3$ ise $y = 4$ tür.

O halde $x + y = 2 + 4 = 6$ bulunur.

Sonlu Küme-Sonsuz Küme

Eleman sayısı bir doğal sayıya eşit olan kümeye sonlu küme denir. Sonlu kümelerin eleman sayısı belirtilebilir.

Eleman sayısı belirtilemeyen kümelere sonsuz küme denir. Sonsuz kümelerin eleman sayısı doğal sayılar ile gösterilemez.

Örnek:

Sınıfınızdaki öğrencilerin kümesi sonlu kümedir.

$M = \{x / x < 50 \text{ ve x dogal sayi}\}$ kümesi sonlu kümedir.

Bir doğruyu oluşturan noktaların kümesi sonsuz kümedir.

$N = \{x / x^2 > 0 \text{ ve x dogal sayi}\}$ kümesi sonsuz kümedir.

Boş Küme

Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme $\{\ \}$ veya ϕ şeklinde gösterilir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır. Boş kümenin eleman sayısı doğal sayılar ile belirtilebildiğinden sonlu kümedir.

Örnek:

$A = \{x / 4 < x^2 < 8 \text{ ve x dogal sayi}\}$ kümesi boş kümedir.

Çünkü hiçbir tam sayının karesi 4 ten büyük ve 8 den küçük olamaz.

Uyarı

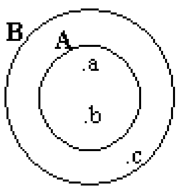
$\{\phi\}$ ve $\{0\}$ kümeleri boş küme değildir. Bu kümeler birer elemana sahiptir.

Alt Küme

Bir A kümesinin bütün elemanları bir B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir. $A \subset B$ veya $B \supset A$ biçiminde yazılır.

Eğer A kümesi, B kümesinin alt kümesi değilse bu $A \not\subset B$ biçiminde yazılır.

Örnek:



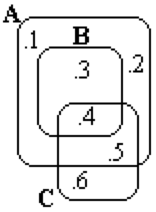
$A = \{a,b\}$ ve $B = \{b,c,a\}$ kümeleri verilsin.

A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise $A \subset B$ dir. A ile B kümelerinin venn şeması ile gösterilişi yandaki gibidir.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4\}$ ve $C = \{4,5,6\}$ kümelerini venn şemasıyla göstererek inceleyelim.

Çözüm:

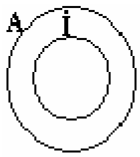


$B \subset A$, $B \not\subset C$

$C \not\subset B$, $C \not\subset A$

$A \supset B$, $B \not\subset C$

Örnek:



A kümesi Almanca bilenlerin kümesi ve İ kümesi İngilizce bilenlerin kümesini göstermek üzere, yandaki şekle göre İngilizce bilen herkes Almanca biliyor. Fakat Almanca bilen herkes İngilizce bilmiyor. Yani $İ \subset A$ dır.Fakat $A \not\subset İ$ dir.

Örnek:

$A = \{1, \{2\}, 3, 4, \{5,6\}, \{5\}\}$ kümesi veriliyor.

Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

I. $s(A) = 6$ II. $\{5,6\} \subset A$

II. $\{1\} \subset A$ IV. $\{3,4\} \subset A$

V. $\{\{2\}, \{5\}\} \subset A$ VI. $\{5\} \subset A$

Çözüm:

I. $s(A) = 6$ doğrudur.

II. $\{5,6\} \subset A$ olması için $5,6 \in A$ olması gerekir. $5,6 \notin A$ olduğundan $\{5,6\} \subset A$ yanlıştır.

III. $1 \in A$ olduğundan $\{1\} \subset A$ doğrudur.

IV. $3,4 \in A$ olduğundan $\{3,4\} \subset A$ doğrudur.

V. $\{2\}, \{5\} \in A$ olduğundan $\{\{2\}, \{5\}\} \subset A$ doğrudur.

VI. $5 \notin A$ olduğundan $\{5\} \subset A$ yanlıştır.

Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinin bütün alt kümelerini yazalım.

Çözüm:

$A = \{1,2,3\}$ kümesinin alt kümeleri,

0 elemanlı alt kümeler; $A_1 = \{\ \}$,

1 elemanlı alt kümeler; $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{3\}$

2 elemanlı alt kümeler; $A_5 = \{1,2\}$, $A_6 = \{1,3\}$,
$A_7 = \{2,3\}$

3 elemanlı alt kümeler; $A_8 = \{1,2,3\}$ olmak üzere A kümesinin 8 tane alt kümesi vardır.

Sonuç

1. Boş küme her kümenin alt kümesidir.

2. Her küme kendisinin alt kümesidir.

Örnek:

$B = \{1, \{2\}\}$ kümesinin bütün alt kümelerini yazalım.

Çözüm:

$B = \{1, \{2\}\}$ kümesinin alt kümeleri,

0 elemanlı alt kümeler; $B_1 = \{\ \} = \phi \subset B$,

1 elemanlı alt kümeler; $B_2 = \{1\} \subset B$, $B_3 = \{\{2\}\} \subset B$

2 elemanlı alt kümeler; $B_4 = \{1, \{2\}\} = B \subset B$ olmak üzere B kümesinin 4 tane alt kümesi vardır.

Alt Kümeye Ait Özellikler

1. $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$ dir.

2. $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

3. elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n dir.

4. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$ dir.

Örnek:

$B=\{1,\{2,3,4\},\{5,6\},\{\{7,8\}\}\}$ kümesinin alt küme sayısını bulunuz.

Çözüm:

$B=\{1,\{2,3,4\},\{5,6\},\{\{7,8\}\}\}$ ise $s(B)=4$ olduğundan B kümesinin alt küme sayısı,

$2^4=2.2.2.2=16$ dır.

Örnek:

$A=\{\phi,a,\{b\},c,\{dc\}\}$ kümesinin alt küme sayısını bulunuz.

Çözüm:

$s(A)=5$ olduğundan A kümesinin alt küme sayısı,

$2^5=2.2.2.2.2=32$ dir.

Örnek:

Alt küme sayısı 64 olan kümenin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

n elemanlı kümenin alt küme sayısı; 2^n dir.

$64=2^n$ olduğundan $2^n=2^6$ eşitliğinden $n=6$ bulunur.

Demek ki küme 6 elemanlıdır.

Örnek:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 3 elemanı bulunmaz?

Çözüm:

Alt kümelerde 3 elemanı olmayacağı için diğer elemanlardan oluşan $A=\{1,2,4,5\}$ kümesinin elemanları ile

$2^4=16$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin hiç birinde 3 elemanı bulunmaz.

Örnek:

$A=\{1,2,3,4\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde mutlaka 3 elemanı bulunur?

Çözüm:

Alt kümelerde 3 elemanı bulunacağı için diğer elemanlardan oluşan $A=\{1,2,4\}$ kümesinin elemanları ile $2^3=8$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin hiç birinde 3 elemanı bulunmaz. Bu alt kümeleri yazalım.

$\{\ \}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$

Bu kümelerin her birine 3 elemanı eleman olarak eklenirse,

$\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{4,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,4,3\}$, $\{2,4,3\}$,

$\{1,2,4,3\}$

alt kümeleri elde edilir. Bu 8 tane alt kümede mutlaka 3 elemanı bulunur.

Örnek:

$B=\{1,2,a,b\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde b elemanı bulunmaz?

Çözüm:

Alt kümelerde b elemanı olmayacağı için diğer elemanlardan oluşan $B=\{1,2,a\}$ kümesinin elemanları ile

$2^3=8$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin hiç birinde b elemanı bulunmaz.

Örnek:

Yasemin, Nazlı, Merve üç öğrencidir. Bu üç öğrenciden içerisinde Yaseminin mutlaka bulunacağı kaç farklı seçim yapılabilir?

Çözüm:

Seçimlerde Yasemin mutlaka bulunacağı için diğer iki öğrenci ile $2^2 = 4$ farklı seçim yapılabilir. Bu seçimlerin hiç birinde Yasemin yoktur. Bu seçimleri yazalım.

$\{\ \}$, $\{\text{Nazlı}\}$, $\{\text{Merve}\}$, $\{\text{Nazlı}, \text{Merve}\}$

Bu seçimlerin her birine Yasemin eleman olarak eklenirse,

$\{\text{Yasemin}\}$, $\{\text{Nazlı}, \text{Yasemin}\}$, $\{\text{Merve}, \text{Yasemin}\}$ seçimleri elde edilir. Bu 4 tane seçimde Yasemin mutlaka bulunur.

Örnek:

4 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

Çözüm:

4 elemanlı bir küme $B = \{1,2,a,b\}$ olsun. Bu kümenin 2 elemanlı olan bütün alt kümeleri,

$\{1,2\}$, $\{1,a\}$, $\{1,b\}$, $\{2,a\}$, $\{2,b\}$, $\{a,b\}$ olmak üzere 6 tanedir.

Kısa yoldan 4 elemanlı 2 elemanlı alt kümeleri sayısı,

$$C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!.2!} = \frac{24}{2.2} = 6 \text{ dır.}$$

Örnek:

7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

Çözüm:

7 elemanlı 3 elemanlı alt kümeleri sayısı,

$$C(7,3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!.3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.6} = 35 \text{ tir.}$$

Örnek:

İki kümenin alt küme sayılarının toplamı 160 tır. Bu iki kümenin eleman sayıları farkı 2 ise, eleman sayıları toplamı kaçtır?

Çözüm:

$s(A) = n$ ve $s(B) = n + 2$ olsun.

İki kümenin alt küme sayılarının toplamı 160 ise,

$$2^n + 2^{n+2} = 160 \Rightarrow 2^n + 4.2^n = 160$$

$$\Rightarrow 5.2^n = 160 \Rightarrow 2^n = 32$$

$$\Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5 \text{ tir.}$$

Buna göre $s(A) = n = 5$ ve $s(B) = n + 2 = 5 + 2 = 7$ dir

$s(A) + s(B) = 5 + 7 = 12$ bulunur.

Örnek:

$A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur?

Çözüm:

3 elemanlı alt kümelerinin içinde a elemanı bulunacağına göre $\{b,c,d,e\}$ kümesinden iki eleman seçilmelidir.

O halde,

$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,d,e\}$

İçinde a elemanı bulunduran 3 elemanlı alt küme sayısı 6 dır.

Ya da, $\{b,c,d,e\}$ kümesinden iki elemanı seçilmesi ile 2 elemanlı alt küme sayısı aynıdır.

O halde,

$$C(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!.2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 5 elemanı bulunur?

Çözüm:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin alt kümelerinde 5 elemanının bulunması istenildiğinden kümeden 5 elemanı alınırsa, $\{1,2,3,4\}$ kümesi elde edilir.

Bu yeni kümenin alt küme sayısı $2^4 = 16$ dır.

O halde, 5 elemanını içinde bulunduran alt küme sayısı 16 dır.

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a bulunur ve b bulunmaz?

Çözüm:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinde a elemanının bulunması ve b elemanının bulunmaması istenildiğinden kümeden a ve b elemanı alınırsa $\{c, d, e\}$ kümesi elde edilir.

Bu yeni kümenin alt küme sayısı $2^3 = 8$ dir.

O halde a elemanını içinde bulundurup b elemanının içinde bulundurmayan alt küme sayısı 8 dir.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 elemanı bulunur?

Çözüm:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinde 1 ve 2 elemanı bulunacağından diğer 2 eleman $\{3,4,5,6\}$ kümesinden seçilmelidir.

O halde $\{3,4,5,6\}$ kümesinden oluşturulabilecek 2 elemanlı alt küme sayısı,

$C(4,2) = \dfrac{4!}{(4-2)!.2!} = \dfrac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6$ dır.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde hem 1 hem de 2 elemanı bulunur?

Çözüm:

Alt kümelerde 1 ve 2 elemanı mutlaka bulunacağı için diğer elemanlardan oluşan $\{3,4,5,6\}$ kümesinin elemanları ile $2^4 = 16$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin hiç birinde 1 ve 2 elemanı bulunmaz.

Bu kümelerin her birine 1 ve 2 elemanı eleman olarak eklenirse, 16 tane alt kümede mutlaka 1 ve 2 elemanı bulunur.

Öz Alt Küme

Bir kümenin kendisi hariç diğer bütün alt kümelerine öz alt küme denir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ kümesinde,

ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

kümelerinin her birisi A kümesinin alt kümeleridir.

Bunlardan,

ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ kümeleri A kümesinin öz alt kümeleridirler.

Sonuç

n elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısı $2^n - 1$ dir.

Örnek:

5 elemanlı bir kümenin $2^5 - 1 = 31$ tane öz alt kümesi vardır.

Örnek:

63 tane öz alt kümesi bulunan bir küme kaç elemanlıdır?

Çözüm:

Kümenin eleman sayısı n olsun. Bu durumda,

$2^n - 1 = 63 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$ bulunur.

Örnek:

127 tane öz alt kümesi bulunan bir küme kaç elemanlıdır?

Çözüm:

Kümenin eleman sayısı n olsun.

Bu durumda,

$2^n - 1 = 127 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$ bulunur.

Örnek:

$A = \{a, b, \{c, \{b\}\}, \{a, b\}\}$ kümesinin öz alt küme sayısını bulunuz.

Çözüm:

$s(A) = 4$ olduğundan A kümesinin öz alt küme sayısı,

$2^4 - 1 = 2.2.2.2 - 1 = 16 - 1 = 15$ tir.

Örnek:

Bir kümenin 33 tane öz alt kümesi olabilir mi?

Çözüm:

Kümenin 33 tane öz alt kümesi olsa idi, $2^n - 1 = 33$ olurdu.

$2^n - 1 = 33 \Rightarrow 2^n = 34$ olup 34 sayısı 2 nin kuvveti olmadığı için bu mümkün değildir.

O halde bir kümenin öz alt küme sayısı 33 olamaz.

Örnek:

Bir A kümesinin alt küme sayısı ile öz alt küme sayısı toplamı 1023 ise, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ olsun. Bu durumda,

$2^n + 2^n - 1 = 1023 \Rightarrow 2^n + 2^n = 1024$

$\Rightarrow 2.2^n = 1024 \Rightarrow 2^n = 512$

$\Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$ bulunur.

Kuvvet Kümesi

Bir kümenin bütün alt kümelerini içine alan kümeye kuvvet kümesi denir. Bir A kümesinin kuvvet kümesi P(A) ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin bütün alt kümeleri,

ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ dir.

A kümesinin kuvvet kümesi

$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ dir.

$s(P(A)) = 2^3 = 8$ dir.

Örnek:

A nın kuvvet kümesinin eleman sayısı ile B nin kuvvet kümesinin eleman sayısının toplamı 80 ise,

$s(A) + s(B)$ kaçtır?

Çözüm:

A nın eleman sayısı $s(A) = n$ ve B nin eleman sayısı $s(B) = m$ olsun.

A nın kuvvet kümesinin eleman sayısı, 2^n dir.

B nin kuvvet kümesinin eleman sayısı, 2^m dir.

Bu durumda,

$2^n + 2^m = 80$ olup bu eşitliğin sağlanabilmesi $n = 6$ ve $m = 4$ ile mümkündür. O halde,

$s(A) + s(B) = 6 + 4 = 10$ bulunur.

Örnek:

A nın kuvvet kümesinin alt küme sayısı 2^{32} ise, A nın eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

A nın eleman sayısı $s(A) = n$ olsun.

A nın kuvvet kümesinin eleman sayısı $s(P(A)) = 2^n$

A nın kuvvet kümesinin alt küme sayısı, 2^{32} ise

$2^{2^n} = 2^{32} \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$ tir.

Örnek:

$A = \{a, b, \{c, d\}, 1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor. A kümesinin:

a. Kaç tane alt kümesi ve öz alt kümesi vardır?

b. 3 elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?

c. 3 ten az elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?

d. İçinde a elemanı olmayan kaç tane 4 elemanlı alt kümesi vardır?

e. İçinde 2 bulunan kaç tane 4 elemanlı alt kümesi vardır?

Çözüm:

a. $s(A) = 6$ olduğundan

A kümesinin alt küme sayısı, $2^6 = 64$ tür.

A kümesinin öz alt küme sayısı, $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ tür.

b. A kümesinin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı,

$C(6,3) = \dfrac{6!}{(6-3)!.3!} = 20$ dir.

c. A kümesinin 3 ten az elemanlı alt kümeleri sayısı, 2 elemanlı alt kümeleri sayısı ile 1 elemanlı alt kümeleri sayısı ile 0 elemanlı alt kümeleri sayısının toplamına eşit olup bu toplam,

$C(6,2) + C(6,1) + C(6,0) = 15 + 6 + 1 = 22$ tanedir.

d. A kümesinin içinde a elemanı olmayan 4 elemanlı alt kümelerini bulmak için a elemanı dışındaki diğer elemanlardan oluşan $\{b, \{c, d\}, 1, 2, 3\}$ kümesinin

elemanları ile $2^5 = 32$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin hiç birinde a elemanı bulunmaz.

e. A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinde 2 elemanı mutlaka bulunacağına göre geriye kalan 3 eleman $\{a, b, \{c, d\}, 1, 3\}$ kümesinden,

$C(5,3) = \dfrac{5!}{(5-3)!.3!} = 10$ farklı alt küme oluşturulabilir.

Bu kümelerin her birine 2 elemanı eleman olarak eklenirse, A kümesinin içinde 2 bulunan 4 elemanlı alt kümeleri sayısı 10 olur.

Örnek:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. A kümesinin tüm alt kümelerinin kaç tanesinde,

a. 4 ve 5 elemanlarından hiçbiri bulunmaz?

b. 4 ve 5 elemanlarından biri veya ikisi bulunur?

c. 4 ve 5 elemanlarından yalnız biri bulunur?

d. 4 ve 5 elemanlarından her ikisi de bulunur?

Çözüm:

a. A kümesinin 4 ve 5 elemanlarının bulunmadığı alt kümeleri, $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin alt kümeleri olup

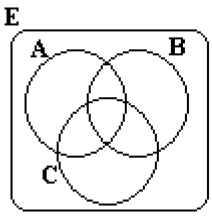
$2^4 = 16$ tanedir.

b. A kümesinin $2^6 = 64$ tane alt kümesi vardır, a şıkkında bulduğumuz 16 tane alt küme çıkarılırsa, istenilen duruma uyan 48 tane alt küme bulunmuş olur.

c. Yalnız 5 elemanının bulunduğu alt küme sayısı 16, yalnız 4 elemanının bulunduğu alt küme sayısı 16 olduğundan 4 ve 5 elemanlarından yalnız birinin bulunduğu alt küme sayısı 16 + 16 = 32 tanedir.

d. Hem 5 hem de 4 ün bulunduğu alt kümelerin sayısı 16 dır.

Evrensel Küme

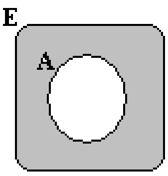


Üzerinde işlem yapılan bütün kümeleri kapsayan en geniş kümeye evrensel küme denir. Evrensel küme E harfi ile gösterilir.

Bir Kümenin Tümleyeni

Bir A kümesi E evrensel kümesinin alt kümesi olsun. Evrensel kümeye ait olup A kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A' ya da $\overline{A}$ ile gösterilir.

$$A' = \{x /\ x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$



Şekilde taralı bölge A kümesinin tümleyeni olan A' kümesidir.

Şekilden de görüldüğü gibi A kümesi ile tümleyeninin birleşimi E evrensel kümeye eşittir.

Yani $A \cup A' = E$ dir. O halde $s(A) + s(A') = E$ dir.

Örnek:
E evrensel küme olmak üzere $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ve $A = \{1,3,5,7\}$ olduğuna göre A' kümesini bulalım.

Çözüm:

Evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanlar 2,4,6,8 dir. Buna göre A kümesinin tümleyeni,

$A' = \{2,4,6,8\}$ dir.

Örnek:

E evrensel kümesi $E = \{x /\ x \in N \text{ ve } x \leq 20\}$ ve $A = \{x /\ x \in N \text{ ve } x < 10\}$ kümesi veriliyor. Buna göre A kümesinin tümleyenini bulunuz.

Çözüm:

$E = \{x /\ x \in N \text{ ve } x \leq 20\} = \{0,1,2,3,...,18,19,20\}$ dir.

$A = \{x /\ x \in N \text{ ve } x < 10\} = \{1,2,3,...,8,9\}$ dur.

Evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanlar 10,11,12,…,20 dir. Buna göre A kümesinin tümleyeni,

$A' = \{10,11,12,...,20\}$ dir. Yani A kümesinin tümleyeni,

$A' = \{x /\ x \in N \text{ ve } 10 \leq x \leq 20\}$ dir.

Örnek:

E evrensel kümesi $E = \{x /\ x \in N \text{ ve } 0 < x < 9\}$ ve $A = \{2,4,6,7\}$ kümesi veriliyor. Buna göre A kümesinin tümleyenini bulunuz.

Çözüm:

$E = \{x /\ x \in N \text{ ve } 0 < x < 9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dir.

$A = \{2,4,6,7\}$ olduğuna göre evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanlar 1,3,5,8 dir.
Buna göre A kümesinin tümleyeni, $A' = \{1,3,5,8\}$ dir.

Örnek:

$E = \{x /\ x \in N \text{ ve } 0 \leq x \leq 9\}$ ve
$A' = \{x /\ x \in N \text{ ve } 4 \leq x < 6\}$ olduğuna göre A kümesini bulalım.

Çözüm:

$E = \{x /\ x \in N \text{ ve } 0 \le x \le 9\} = \{0,1,2,..,8,9\}$ dur.

$A' = \{x /\ x \in N \text{ ve } 4 \le x < 6\} = \{4,5,6\}$ dır.

Buna göre evrensel kümede olup A nın tümleyeninde olmayan elemanlar,

$A = \{0,1,2,3,7,8,9\}$

$A = \{x / x \in N, 0 \le x \le 3 \text{ veya } 7 \le x \le 9\}$ dur.

Örnek:

A ve B kümeleri aynı evrensel kümenin alt kümeleri olmak üzere $s(A) + s(B') = 13$ ve $s(B) + s(A') = 17$ olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A) + s(B') = 13$ ve $s(B) + s(A') = 17$ eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$s(A) + s(B') + s(B) + s(A') = 13 + 17$

$s(A) + s(A') + s(B') + s(B) = 30$

$s(E) + s(E) = 30 \Rightarrow 2.s(E) = 30 \Rightarrow s(E) = 15$ bulunur.

Örnek:

A ve B kümeleri aynı evrensel kümenin alt kümeleri olmak üzere $s(A) + s(B') = 19$ ve $s(B) + s(A') = 13$ olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A) + s(B') = 19$ ve $s(B) + s(A') = 13$ eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$s(A) + s(B') + s(B) + s(A') = 19 + 13$

$s(A) + s(A') + s(B') + s(B) = 32$

$s(E) + s(E) = 32 \Rightarrow 2.s(E) = 32 \Rightarrow s(E) = 16$ bulunur.

Tümlemenin Özellikleri

I. Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisidir.

$(A')' = A$ dır.

II. Bir küme ile tümleyeninin kesişimi boş kümedir.

$A \cap A' = \phi$ tur.

III. Boş kümenin tümleyeni evrensel kümedir. $\phi' = E$ dir.

IV. Evrensel kümenin tümleyeni boş kümedir. $E' = \phi$ tur.

V. $A \subset B$ ise $B' \subset A'$ dir.

Örnek:

$E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$

kümeleri veriliyor. $B' \subset A'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$A' = \{0,4,5,6\}$ ve $B' = \{0,6\}$ dır. B' kümesindeki her eleman A' kümesinde olduğundan B' kümesi A' kümesinin alt kümesidir. Bu durumda

$B' \subset A'$ dır. $B' \subset A'$ ise $A \subset B$ dir.

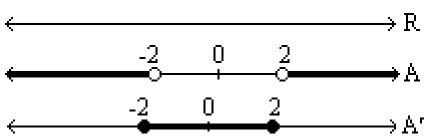
Örnek:

E evrensel kümesi reel sayılar kümesi olmak üzere $A = \{x / x \in R, |x| > 2\}$ kümesinin tümleyeninin bulalım.

Çözüm:

$|x| > 2$ ise $x > 2$ veya $x < -2$ dir.

A kümesi ve A' kümesi sayı doğrusunda koyu kalın çizgi ile gösterilmiştir.



Buna göre $A' = \{x / |x| \le 2,\ x \in R\}$ dir.

Örnek:

E evrensel kümesi içinde verilen A, B ve C kümeleri için,
$s(A)+s(B')=20$, $s(B)+s(A')=24$ ve $s(C')=10$
olduğuna göre $s(C)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A)+s(B')=20$ ve $s(B)+s(A')=24$ eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$s(A)+s(B')+s(B)+s(A')=20+24$

$s(A)+s(A')+s(B')+s(B)=44$

$s(E)+s(E)=44 \Rightarrow 2.s(E)=44 \Rightarrow s(E)=22$ bulunur.

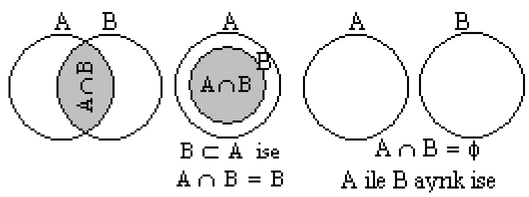
$s(C)=s(E)-s(C')=22-10=12$ dir.

KÜMELERDE YAPILAN İŞLEMLER

Kümelerde Kesişim İşlemi

A ve B iki küme olmak üzere A ile B nin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.

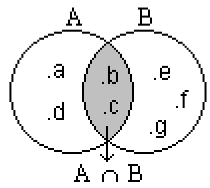
$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ ve } x \in B\} \text{ dir.}$$



Örnek:

$A=\{a,b,c,d\}$ ve $B=\{b,c,e,f,g\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesini liste biçiminde yazıp venn şemasında gösterelim.

Çözüm:

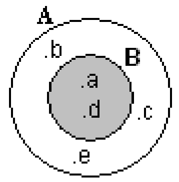


$A \cap B = \{b,c\}$ dir.

Örnek:

$A=\{a,b,c,d,e\}$ ve $B=\{a,d\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesini liste biçiminde yazıp venn şemasında gösterelim.

Çözüm:



$A \cap B = \{a,d\} = B$ dir.

$B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

Uyarı

$A \cap B$ kümesinin eleman sayısının en fazla olduğu durum $A \subset B$ olduğu durumdur.

Örnek:

$A=\{1,2,3,5\}$ ve $B=\{0,4,6\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesini bulalım.

Çözüm:

A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığından $A \cap B = \phi$ dir. Bu örnekte olduğu gibi ortak elemanı olmayan kümelere ayrık kümeler denir.

Örnek:

$s(A)=4$ ve $s(B)=5$ olmak üzere $A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı en az ve en fazla kaçtır?

Çözüm:

$A \cap B$ kümesinin alt küme sayısının en az olması için $A \cap B = \phi$ olmalıdır. Bu durumda

$s(A \cap B)=0$ olup alt küme sayısı en az $2^0=1$ olur.

$A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı en fazla olması için $A \subset B$ olmalıdır. Buna göre $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ olup,

$s(A \cap B) = s(A) = 4$ olacağından $A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı en fazla, $2^4 = 16$ olur.

Kesişme İşlemi ile İlgili Özellikler

a. Değişme özelliği.

$A \cap B = B \cap A$

b. Tek kuvvet özelliği.

$A \cap A = A$

c. Birleşme özelliği.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

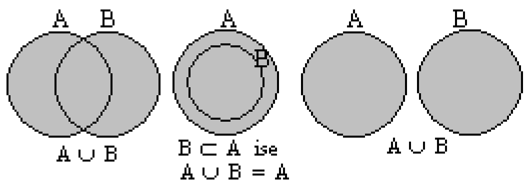
d. Yutan eleman özelliği.

$A \cap \phi = \phi$

Kümelerde Birleşme İşlemi

A ile B iki küme olmak üzere. Bu iki kümedeki bütün elemanlardan meydana gelen kümeye A ile B nin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

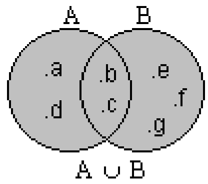
$A \cup B = \{x / x \in A \text{ veya } x \in B\}$ dir.



Örnek:

$A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{b, c, e, f, g\}$ kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesini liste biçiminde yazıp venn şemasında gösterelim.

Çözüm:

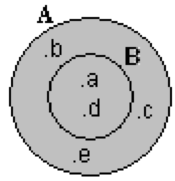


$A \cap B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dir.

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{a, d\}$ kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesini liste biçiminde yazıp venn şemasında gösterelim.

Çözüm:



$A \cup B = \{a, b, c, d, e\} = A$ dır.

$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

Örnek:

$A = \{x / x \in N \text{ ve } 3 \le x \le 5\}$ ve

$B = \{x / x \in N \text{ ve } x^2 = 25\}$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesini liste biçiminde yazalım.

Çözüm:

$A = \{3,4,5\}$ ve $B = \{5\}$ olup $A \cup B = \{3,4,5\}$ tir.

Uyarı

$A \cup B$ kümesinin eleman sayısının en az olduğu durum $A \subset B$ olduğu durum, en fazla olduğu durum ise A ile B nin ayrık, yani $A \cap B = \phi$ olduğu durumdur.

Örnek:

$s(A) = 4$ ve $s(B) = 5$ olmak üzere $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı en az ve en fazla kaçtır?

Çözüm:

$s(A) = 4$ ve $s(B) = 5$ ise $A \subset B$ olduğunda $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının en az,

$A \cap B = \phi$ olduğunda $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının en fazla olur.

$A \subset B \Rightarrow s(A \cup B) = s(B) = 5$ tir

$A \cap B = \phi \Rightarrow s(A \cup B) = s(\phi) = 0$ dır.

Buna göre $0 \le s(A \cup B) \le 5$ olup, $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı en az $2^0 = 1$ ve en fazla $2^5 = 32$ dir.

Örnek:

$A = \{3,4,6,8,9\}$ ve $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ise yazılabilecek B kümesi kaç tanedir?

Çözüm:

$A = \{3,4,6,8,9\}$ ve $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ise,

B kümesinin en az olma durumu $(A \cap B = \phi)$
$B = \{1,2,5,7\}$ dir.

B kümesinin en fazla olma durumu $(A \subset B)$
$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dir.

Bu durumda B kümesi,

$\{1,2,5,7\} \subset B \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olmalıdır. Bu şartın sağlanabilmesi için $\{3,4,6,8,9\}$ kümesinin alt kümeleri kadar B yazılabilir.

O halde, yazılabilecek B kümesinin sayısı $2^5 = 32$ dir.

Birleşim İşlemi ile İlgili Özellikler

1. Değişme özelliği.

$A \cup B = B \cup A$

2. Tek kuvvet özelliği

$A \cup A = A$

3. Birleşme özelliği.

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. Birim eleman özelliği

$A \cup \phi = A$

5. De Morgan Kuralları

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6. Kesişimin birleşim üzerine dağılma özellikleri

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

7. Birleşimin kesişim üzerine dağılma özellikleri

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Örnek:

$A \cap B = \{b, c, f\}$ ve $A \cap C = \{a, b\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesini bulalım.

Çözüm:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{a, b, c, f\}$

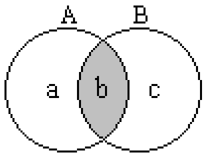
Örnek:

$A \cup B = \{1,2,3,4\}$ ve $A \cup C = \{1,3,5,6\}$ olduğuna göre $A \cup (B \cap C)$ kümesini bulalım.

Çözüm:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,3\}$

İki Kümenin Birleşiminin Eleman Sayısı



$s(A) = a + b$, $s(B) = b + c$

$s(A \cup B) = a + b + c$

$s(A \cap B) = b$

$s(A \cup B) = a + b + c = (a + b) + (b + c) - b$

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ dir.

Örnek:

$s(A \cup B) = 30$, $s(A) = 12$, $s(A \cap B) = 5$ ise $s(B)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ ise,

$30 = 12 + s(B) - 5 \Rightarrow s(B) = 23$ bulunur.

Örnek:

$A \cup (A \cup B')'$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$A \cup (A \cup B')' = A \cup (A' \cap B)$$

$$= (A \cup A') \cap (A \cup B)$$

$$= E \cap (A \cup B) = A \cup B$$

Örnek:

$s(A) = 5$, $s(B) = 3$ ve $s\left[(A' \cup B')'\right] = 2$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B$ dir.

$s\left[(A' \cup B')'\right] = 2$ ise $s(A \cap B) = 2$ dir.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$= 5 + 3 - 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

30 kişilik bir sınıftaki öğrencilerden 18 tanesi İngilizce ve 20 tanesi de bilgisayar kursuna gitmektedir. Bu iki kurstan hiçbirine gitmeyen öğrenci olmadığına göre, bu sınıfta hem İngilizce hem de bilgisayar kursuna gidenlerin sayısını bulalım.

Çözüm:

İngilizce kursuna gidenlerin kümesi İ, bilgisayar kursuna gidenlerin kümesi B olsun. Hem İngilizce hem de bilgisayar kursuna gidenlerin kümesi $İ \cap B$ olur.
Sınıftaki öğrenciler, İngilizce veya bilgisayar kurslarından en az birine katıldığına göre $s(İ \cup B) = 30$ olur. Soruda verilenlere göre, $s(İ) = 18$ ve $s(B) = 20$ dir. Buna göre,

$s(İ \cup B) = s(İ) + s(B) - s(İ \cap B)$ olup,

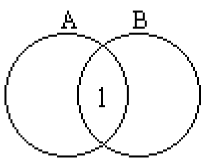
$30 = 18 + 20 - s(İ \cap B) \Rightarrow s(İ \cap B) = 38 - 30 = 8$ bulunur.

Örnek:

$s(A) = 7$, $s(B) = 4$ ve $A \cup B \neq \phi$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm:

$s(A \cap B)$ en küçük iken $s(A \cup B)$ en büyük değeri alır.



$A \cup B \neq \phi$ olduğuna göre

$s(A \cap B)$ en az 1 olur.

Buna göre,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$s(A \cup B) = 7 + 4 - 1 = 10 \text{ olur.}$$

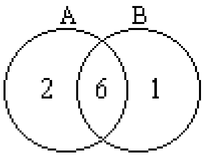
Örnek:

A ve B gibi iki kümeden A nın 2, B nin 1 elemanı $A \cap B$ kümesinin elemanı değildir. $A \cap B$ kümesinin öz alt küme sayısı 63 olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

$A \cap B$ kümesinin eleman sayısı n olsun. Öz alt küme sayısı 63 olduğuna göre

$2^n - 1 = 63 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$ olup



$A \cap B$ kümesinin eleman sayısı 6 dır. O halde $s(A) = 2 + 6 = 8$ ve $s(B) = 1 + 6 = 7$ dir. Buna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 8 + 7 - 6 = 9$ olur.

Örnek:

$s(A) = 3$ ve $s(B) = 5$ ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

a. $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı 16 dır.

b. $A \cup B$ kümesinin öz alt küme sayısı 31 dir.

c. $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı 64 tür.

d. $A \cup B$ kümesinin öz alt küme sayısı 127 dir.

e. $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı 256 dır.

Çözüm:

$s(A) = 3$ ve $s(B) = 5$ ise $A \subset B$ olduğunda $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının en az olma durumu gerçekleşir.
$A \subset B$ ise $s(A \cup B) = 5$ tir.

$A \cap B = \phi$ olduğunda $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının en fazla olma durumu gerçekleşir.
$A \cap B = \phi$ ise $s(A \cup B) = 3 + 5 = 8$ dir.

Demek ki,

$5 \le s(A \cup B) \le 8$ olur.

O halde

$2^5 \le \text{Alt Kume Sayisi} \le 2^8$

$\Rightarrow 32 \le \text{Alt Kume Sayisi} \le 128$ dir.

$2^5 - 1 \le \text{Öz Alt Kume Sayisi} \le 2^8 - 1$

$\Rightarrow 31 \le \text{Öz Alt Kume Sayisi} \le 127$ dir

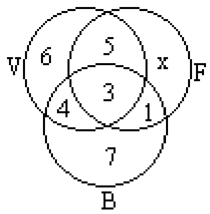
Buna göre A şıkkı yanlıştır.

Örnek:

Bir spor salonunda bulunan bütün sporcuların 8'i voleybol ve futbol, 7'si voleybol ve basketbol, 4'ü futbol ve basketbol, 3'ü hem voleybol hem futbol hem basketbol, 18'i voleybol, 15'i basketbol oynamaktadır. Bütün sporcuların sayısı 35 olduğu bilindiğine göre, sadece futbol oynayanların sayısını bulalım.

Çözüm:

Voleybol oynayanların kümesini V, futbol oynayanların kümesini F, basketbol oynayanların kümesini B ile gösterelim.



Çözüme, üç kümenin de kesişiminin eleman sayısı yazılarak başlanır. Sonra ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayıları, daha sonra her kümenin eleman sayıları elde edilecek şekilde boş kalan yerler doldurulur.

Bütün sporcuların sayısı 35 olduğundan; sadece futbol oynayanların sayısı $35 - (6 + 5 + 4 + 3 + 1 + 7) = 9$ bulunur.

Örnek:

1 den 300 e kadar (1 ve 300 dahil) olan doğal sayılardan kaç tanesi 3 veya 5 ile bölünür?

Çözüm:

1 den 300 e kadar olan doğal sayılardan 3 ile bölünebilen sayılar; $A = \{3,6,9,...,300\}$ olup bunların sayısı,

$\frac{300 - 3}{3} + 1 = 100$ tanedir. $s(A) = 100$ dür.

1 den 300 e kadar olan doğal sayılardan 5 ile bölünebilen sayılar; $B = \{5,10,15,...,300\}$ olup bunların sayısı,

$\frac{300-5}{5} + 1 = 60$ tanedir. $s(B) = 60$ tır.

1 den 300 e kadar olan doğal sayılardan hem 3 ile hem de 5 ile bölünebilen sayılar; $A \cap B = \{15,30,45,...,300\}$ olup bunların sayısı,

$\frac{300-15}{15} + 1 = 20$ tanedir. $s(A \cap B) = 20$ dir.

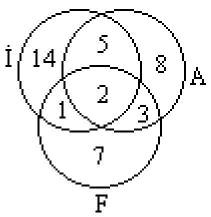
O halde 1 den 300 e kadar (1 ve 300 dahil) olan doğal sayılardan, 3 veya 5 ile bölünebilenlerin sayısı,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$s(A \cup B) = 100 + 60 - 20 = 140$ tanedir.

Örnek:

Bir sınıftaki öğrencilerden İngilizce bilenler İ, Almanca bilenler A ve Fransızca bilenler ile gösterilerek aşağıdaki şemada gösterilmiştir. Buna göre sınıftaki öğrencilerden,



a. Üç dil bilenlerin sayısı; $s(\dot{I} \cap A \cap F) = 2$ dir.

b. Sadece bir dil bilenlerin sayısı; $14 + 8 + 7 = 29$ dur.

c. En az bir dil bilenlerin sayısı;

$s(\dot{I} \cup A \cup F) = 40$ tır

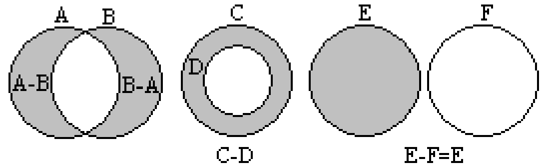
d. En çok bir dil bilenlerin sayısı; $14 + 8 + 7 + 0 = 29$ dur.

e. En az iki dil bilenlerin sayısı; $5 + 3 + 1 + 2 = 11$ dir

Kümelerde Fark İşlemi

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B kümesi denir ve A-B ile gösterilir.

$$A - B = \{x / x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$



Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ ve $B = \{3,5,6\}$ olduğuna göre $A - B$ kümesini bulalım.

Çözüm:

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlar 1, 2, 4 tür. Buna göre, $A - B = \{1,2,4\}$ tür.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ ve $B = \{3,5,6\}$ olduğuna göre $B - A$ kümesini bulalım.

Çözüm:

B kümesinde olup A kümesinde olmayan eleman 6 dır Buna göre, $B - A = \{6\}$ dır.

Örnek:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ ve $C = \{3,5\}$ olduğuna göre $C - A$ kümesini bulalım.

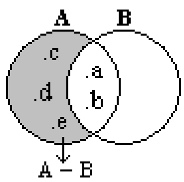
Çözüm:

C kümesinde olup A kümesinde olmayan eleman yoktur. Buna göre, $C - A = \phi$ dir.

Örnek:

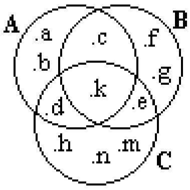
$A = \{a,b,c,d,e\}$ ve $A \cap B = \{a,b\}$ olduğuna göre $A - B$ kümesini bulalım.

Çözüm:



Yandaki şemayı inceleyerek, $A - B = A - (A \cap B)$ olduğunu görürüz. Buna göre, $A - B = \{c,d,e\}$ olur.

Örnek:



Yandaki şemaya göre $A-B$, $B-A$, $A-C$, $C-A$, $B-C$ ve $C-B$ kümelerini liste şeklinde yazalım.

Çözüm:

Şemadan $A=\{a,b,c,d,k\}$, $B=\{c,f,k,e,g\}$ ve $C=\{d,k,e,h,n,m\}$ olup, buna göre,

$A-B=\{a,b,d\}$, $B-A=\{e,f,g\}$, $A-C=\{a,b,c\}$,

$C-A=\{e,h,n,m\}$, $B-C=\{c,f,g\}$, $C-B=\{d,h,n,m\}$ bulunur.

Örnek:

A ve B iki kümedir. $s(A)=2.s(B)$, $s(A-B)=10$ ve $A\cap B$ kümesinin alt kümelerinin sayısı 64 olduğuna göre B kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

$A\cap B$ kümesinin alt kümelerinin sayısı 64 olduğuna göre, $A\cap B$ nin eleman sayısı,

$2^n=64 \Rightarrow 2^n=2^6 \Rightarrow n=6$ bulunur.

$s(A)=s(A-B)+s(A\cap B)=10+6=16$ olur.

$s(A)=2.s(B) \Rightarrow 2.s(B)=16 \Rightarrow s(B)=8$ dir.

Örnek:

50 kişilik bir sınıfın öğrencilerinden 21 i İngilizce, 20 si Almanca, 19u Fransızca biliyor. Bu sınıfta, 9 öğrenci İngilizce ve Almanca, 7 öğrenci İngilizce ve Fransızca, 8 öğrenci Almanca ve Fransızca biliyor. 9 öğrenci de bu üç dilden hiçbirini bilmiyor. Buna göre her üç dili bilen kaç öğrenci olduğunu bulalım.

Çözüm:

9 öğrenci hiçbir dili bilmediğinden,

$s(İ\cup A\cup F)=50-9=40$ olur. Her üç dili de bilen öğrenci sayısı x olsun. $s(İ\cap A\cap F)=x$ olur.

$$s(İ\cup A\cup F)=s(İ)+s(A)+s(F)-s(İ\cap A)-s(İ\cap F)$$
$$-s(A\cap F)+s(İ\cap A\cap F)$$

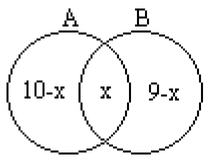
$41=21+20+19-9-7-8+x$

$41=60-24+x \Rightarrow x=5$ bulunur.

Örnek:

$s(A)=10$, $s(B)=9$, $s(A\cup B)=15$ ise $s(A-B)$ yi bulalım.

Çözüm:



$s(A\cap B)=x$ olsun.

$s(A\cup B)=s(A)+s(B)-s(A\cap B)$

$15=10+9-x \Rightarrow x=4$ olur.

$s(A-B)=10-x=10-4=6$ bulunur.

Fark İşlemi ile İlgili Özellikler

1. E ile F ayrık kümeler ise $E-F=E$ dir.
2. $A\subset B$ ise $A-B=\phi$ dir.
3. $A-B=A\cap B'$ dir.
4. $E-A=A'$ ve $E-A'=A$ dır.
5. $s(A\cup B)=s(A-B)+s(B-A)+s(A\cap B)$ dir.

Örnek:

$(A-B)\cup(A\cap B)$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

1.Yol:

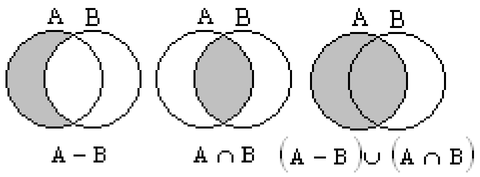
$A - B = A \cap B'$ olduğu için,

$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B)$

$= A \cap (B \cup B') = A \cap E = A$ olur.

2.Yol

Aşağıdaki şekilde 1. şekilde $A - B$ kümesi, 2. şekilde $A \cap B$ kümesi, 3. şekilde $(A - B) \cup (A \cap B)$ kümesi taralı olarak verilmiştir.



Buna göre, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ dır.

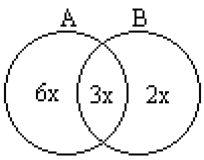
Örnek:

$s(A \cup B) = 33$, $s(A \cap B') = 2.s(A \cap B) = 3.s(B - A)$ olduğuna göre $s(B)$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$s(A \cap B') = s(A - B) = 6x$ ise,

$s(A \cap B) = 3x$ ve $s(B - A) = 2x$ olur.



Verilenlere uygun şema yanda gösterilmiştir.

$s(A \cup B) = 6x + 3x + 2x = 11x$ ise,

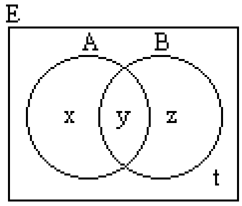
$11x = 33 \Rightarrow x = 3$ tür.

$s(B) = 3x + 2x = 5x = 5.3 = 15$ bulunur.

Örnek:

$s(A') = 7$ ve $s(A' \cup B') = 15$ olduğuna göre $A - B$ nin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:



Yandaki şemada x, y, z, t bulundukları bölgenin eleman sayılarını göstermektedir.

Soruda verilenlere göre,
$s(A') = z + t = 7$,

$s(A' \cup B') = s\left[(A \cap B)'\right] = x + z + t = 15$

$s(A - B) = x$ olur. Buna göre

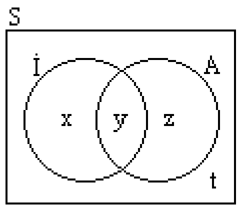
$x + z + t = 15 \Rightarrow x + 7 = 15 \Rightarrow x = 8$ bulunur. O halde

$s(A - B) = 8$ dir.

Uyarı

Küme problemlerinin çözümünde aşağıdaki pratik şema yöntemini kullanabiliriz.

Şemada x, y, z, t bulundukları bölgenin eleman sayılarını göstermektedir. İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A ve sınıftaki bütün öğrencilerin kümesi S olsun.



Sadece İngilizce bilenlerin sayısı, $s(İ - A) = x$ tir.

Sadece Almanca bilenlerin sayısı, $s(A - İ) = z$ dir.

Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı, $s(İ \cap A) = y$ dir.

İngilizce bilenlerin sayısı, $s(İ) = x + y$ dir.

İngilizce bilmeyenlerin sayısı, $s(İ') = z + t$ dir

İngilizce veya Almanca bilenlerin sayısı,
$s(İ \cup A) = x + y + z$ dir.

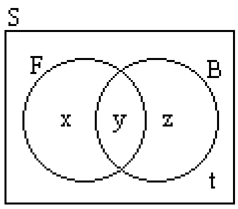
İngilizce veya Almanca dillerinden en az birini bilenlerin sayısı, $s(\dot{I} \cup A) = x + y + z$ dir.

Bu sınıfta en çok bir dil bilenlerin sayısı, $x + z + t$ dir.

Örnek:

Bir sınıfta; futbol veya basketbol oyunlarından sadece birini oynayan 12, en az birini oynayan 18 ve en çok birini oynayan 16 öğrenci vardır. Buna göre sınıfın mevcudu kaçtır?

Çözüm:



Sadece bir oyun oynayanların sayısı, $x + z = 12$ dir.

En az bir oyun oynayanların sayısı $x + y + z = 18$ dir.

En çok bir oyun oynayanların sayısı $x + z + t = 16$ dır.

$x + z = 12$ ve $x + z + t = 16$ olduğuna göre,

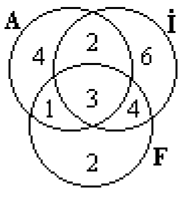
$12 + t = 16 \Rightarrow t = 16 - 12 = 4$ bulunur. Buna göre sınıfın

mevcudu, $x + y + z + t = 18 + 4 = 22$ dir.

Örnek:

Almanca, İngilizce ve Fransızca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu bir toplulukta; Almanca bilenlerin sayısı 10, İngilizce bilenlerin sayısı 15, Fransızca bilenlerin sayısı 10, Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı 5, İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı 7, Fransızca ve Almanca bilenlerin sayısı 4, Üç dili de bilenlerin sayısı 3 tür. Buna göre bu toplulukta kaç kişi vardır?

Çözüm:



Almanca bilenlerin sayısı 10, İngilizce bilenlerin sayısı 15, Fransızca bilenlerin sayısı 10, Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı 5, İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı 7, Fransızca ve Almanca bilenlerin sayısı 4, Üç dili de bilenlerin sayısı 3 tür.

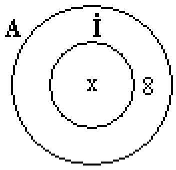
Verilen eleman sayılarını sondan başlayarak başa doğru şemada belirtelim. Şemadaki sayılar bulundukları bölgelerin eleman sayılarını göstermektedir. Bu sayıların toplamı topluluktakilerin sayısına eşittir. Buna göre bu topluluktaki kişi sayısı,

$4 + 2 + 6 + 1 + 3 + 4 + 2 = 22$ dir.

Örnek:

İngilizce ve Almanca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu 13 kişilik bir grupta İngilizce bilenlerin hepsi Almanca bilmektedir. Yalnız Almanca bilenlerin 8 kişi olduğu bu grupta İngilizce bilenlerin kaç kişi olduklarını bulalım.

Çözüm:



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir.

$x + 8 = 13 \Rightarrow x = 5$ tir.

Buna göre bu grupta İngilizce bilenlerin sayısı 5 tir.

Uyarı

Küme ile ilgili problem tipindeki soruların çözümünde

a. Soru ifadesi en az, en çok, sadece gibi kelimeleri içeriyorsa şema yapıp, değişkenler kullanılarak çözüme gidilir.

b. Soru ifadesinde kümelerin kesişimlerine ve birleşimlerine ait bilgiler olumlu cümlelerle verilmişse, kümeler şema ile gösterilir. Bilgiler sondan başa doğru şemada yazılarak çözüme gidilir.

c. b şıkkına uyan sorular ve kümelerin eleman sayıları arasında bağıntılar verilen soruların çözümünde formülden yararlanılır.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$ $\qquad (A - B = A \cap B')$

$= A \cap (B' \cap C')$ $\qquad$ (De Morgan Kuralı)

$= (A \cap A) \cap (B' \cap C')$ (Tek Kuvvet Özel.)

$= (A \cap B') \cap (A \cap C')$ (Birleşme Özelliği)

$= (A - B) \cap (A - C)$ bulunur.

2. $(A - B)'$ kümesinin $A' \cup B$ kümesine eşit olduğunu bulalım.

Çözüm:

$A - B = A \cap B'$ olduğundan,

$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$ bulunur.

3. $(A \cap B') \cup (A \cap B)$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm:

$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap E = A$ bulunur.

4. $A = \{x / -6 \le x \le 4 \text{ ve } x \in Z\}$ ve
$B = \{x / 0 \le x \le 6 \text{ ve } x \in Z\}$ olduğuna göre $A \cap B'$ kümesini belirtelim.

Çözüm:

$A = \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ ve

$B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ olup,

$A \cap B' = A - B = \{-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$ dır.

5. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$

$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$

$= (A - B) \cup (A - C)$

6. Alt küme sayısı ile öz alt küme sayısının toplamı 127 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

Bu kümenin eleman sayısı n olsun. Buna göre kümenin alt küme sayısı 2^n ve öz alt küme sayısı $2^n - 1$ dir.

O halde,

$2^n + 2^n - 1 = 127 \Rightarrow 2.2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$

bulunur.

7. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin, alt kümelerinden kaç tanesinde c elemanı bulunur; e elemanı bulunmaz?

Çözüm:

e elemanını daha sonra yazmak için, c elemanını da hiç yazmamak üzere, A kümesinden ayıralım.

$\{a, b, d, f, g\}$ kümesinin elemanları ile $2^5 = 32$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin her birine c elemanı eklenir ve e elemanı eklenmezse istenen şartlarda 32 tane alt küme yazılabilir.

8. Bir basamaklı asal sayılardan oluşan kümenin alt küme sayısı kaçtır?

Çözüm:

Bir basamaklı asal sayıların kümesi, $A = \{2,3,5,7\}$ dir.

$s(A) = 4$ olduğundan alt küme sayısı, $2^4 = 16$ dır.

9. A, $A \cap B$, B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 64, 8, 32 olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

Çözüm:

A, $A \cap B$, B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 64, 8, 32 olduğu için,

$2^{s(A)} = 64 = 2^6 \Rightarrow s(A) = 6$ dır.

$2^{s(A \cap B)} = 8 = 2^3 \Rightarrow s(A \cap B) = 3$ tür.

$2^{s(B)} = 32 = 2^5 \Rightarrow s(A) = 5$ tir.

Buna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ ise,

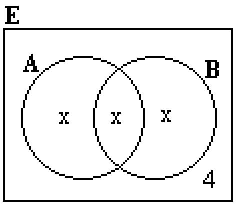
$s(A \cup B) = 6 + 5 - 3 = 8$ dir. $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı,

$2^{s(A \cup B)} = 2^8 = 256$ bulunur.

10. $s(A \cap B') = s(A \cap B) = s(B \cap A')$, $s(B') = 7$ ve $s(A' \cap B') = 4$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A \cap B') = s(A - B)$ ve $s(B \cap A') = s(B - A)$ dır.
$s(A - B) = s(A \cap B) = s(B - A) = x$ olsun.



$s(A' \cap B') = s[(A \cup B)]' = 4$

$s(B') = x + 4 = 7 \Rightarrow x = 3$ tür.

Buna göre,

$s(A \cup B) = x + x + x = 9$ dur.

11. $s(A) = x + 2$, $s(B) = 3x - 1$, $s(A \cup B) = 2x + 5$ ve $A \cap B \neq \phi$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

Çözüm:

Verilenlere göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$2x + 5 = x + 2 + 3x - 1 - s(A \cap B)$

$s(A \cap B) = 4x + 1 - (2x + 5) = 2x - 4$ olur.

$A \cap B \neq \phi$ ise $s(A \cap B) > 0$ dır.

$2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$ dir. Buradan x, en az 3 tür.

Buna göre $s(A \cup B)$ nin en küçük değeri,

$s(A \cup B) = 2.3 + 5 = 11$ dir.

12. $s(A) = 9$ ve $s(B) = 5$ olduğuna göre $s(A \cap B)$ nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$s(A \cap B)$ en büyük değerini $B \subset A$ olduğunda alır. $B \subset A$ seçilirse,

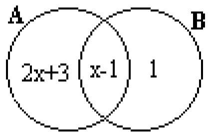
$s(A \cap B) = s(B) = 5$ olur.

13. $B \not\subset A$ olmak üzere $s(A) = x + 2$ ve $s(B) = x$ dir. $s(A \cap B)$ nin alabileceği en büyük değer 5 olduğuna göre $s(A - B)$ kaçtır?

Çözüm:

$B \subset A$ iken $s(A \cap B)$ en büyük olur. Ancak soruda $B \not\subset A$ verildiği için $B - A$ nın eleman sayısı en az 1 olmalıdır.

$s(A \cap B)$ nin alabileceği en büyük değer 5 olduğuna göre,



$x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6$ dır.

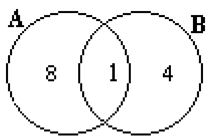
Buna göre,

$s(A - B) = 2x + 3 = 2.6 + 3 = 15$ bulunur.

14. $s(A) = 9$, $s(B) = 5$ ve $A \cap B \neq \phi$ olduğuna göre, $s(A \cup B)$ nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$A \cap B \neq \phi$ olduğu için $s(A \cap B) = 1$ iken $s(A \cup B)$ en büyük olur.



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir.
Buna göre $s(A \cup B)$ nin alabileceği en büyük değer,

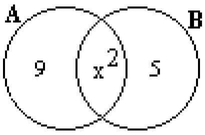
$s(A \cup B) = 8 + 1 + 4 = 13$ tür.

15. $s(A \cap B') = 9$, $s(A \cap B) = x^2$, $s(A) = 6x$ ve $s(A' \cap B) = 5$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A \cap B') = s(A - B) = 9$ dur.

$s(A' \cap B) = s(B - A) = 5$ tir. Verilenlere uygun şema yapılırsa,



$s(A) = x^2 + 9 \Rightarrow 6x = x^2 + 9$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ tür.

Buna göre $s(A \cup B) = 9 + x^2 + 5 = 14 + 3^2 = 23$ olur.

16. A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere $(A \cup B') \cap \left[A \cup (A \cup B')'\right]$ kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$(A \cup B') \cap \left[A \cup (A \cup B')'\right]$

$= (A \cup B') \cap [A \cup (A' \cap B)]$

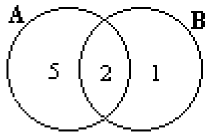
$= (A \cup B') \cap [(A \cup A') \cap (A \cup B)]$

$= (A \cup B') \cap [E \cap (A \cup B)] = (A \cup B') \cap (A \cup B)$

$= A \cup (B' \cap B) = A \cup \phi = A$

17. A ve B kümeleri için $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $s(A \cup B) = 8$, $s(A \cap B) = 2$ olduğuna göre, A kümesinde en çok kaç tane eleman olabilir?

Çözüm:



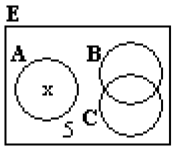
$B \not\subset A$ ise A nın eleman sayısının en çok olabilmesi için $s(B - A) = 1$ olmalıdır.

$s(A \cup B) = 8$ olduğuna göre, $s(A) = 7$ olur.

18. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \phi$, $s(B' \cap C') = 8$ ve $s\left[(A \cup B \cup C)'\right] = 5$ olduğuna göre $s(A)$ kaçtır?

Çözüm:

E evrensel küme ve $s(A) = x$ olsun.
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) = \phi$ olacak şekilde verilenlere uygun şema çizilirse,



$s(B' \cap C') = s\left[(B \cup C)'\right] = x + 5$ tir.

$s(B' \cap C') = 8$ olduğundan,

$x + 5 = 8 \Rightarrow x = 8 - 5 = 3$ olur.

Buradan, $s(A) = x = 3$ bulunur.

19. A,B ve C kümeleri için evrensel küme E olmak üzere, $s(A) + s(B') = 8$, $s(A') + s(B) = 10$, $s(C') = 5$ olduğuna göre $s(C)$ kaçtır?

Çözüm:

$s(A) + s(B') = 8$ ve $s(A') + s(B) = 10$ eşitliğinin taraf tarafa toplarsak,

$s(A) + s(B') + s(A') + s(B) = 8 + 10$

$s(A) + s(A') + s(B') + s(B) = 18 \Rightarrow s(E) + s(E) = 18$

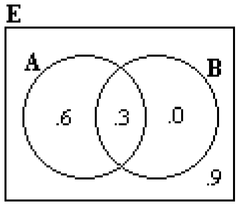
$\Rightarrow 2.s(E) = 18 \Rightarrow s(E) = 9$ dur.

$s(C) + s(C') = s(E)$ olduğundan,

$s(C) + 5 = 9 \Rightarrow s(C) = 9 - 5 = 4$ bulunur.

20. A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere,
$E = \{x / x = 3k,\ x < 12,\ k \in N\},\ A = \{3,6\},$
$B' = \{9,6\}$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesini bulunuz.

Çözüm:



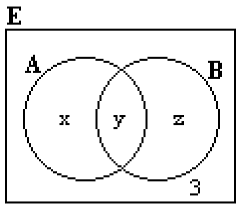
$E = \{0,3,6,9\}$ olup verilenlere uygun şema çizilirse,
Buna göre $A \cap B = \{3\}$ bulunur.

21. A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere
$s(A' \cap B') = 3$, $s(A' \cup B') = 30$ ve $s(A) + s(B) = 47$
olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

Çözüm:

$$s(A' \cap B') = s\left[(A \cup B)'\right] = 3$$

$$s(A' \cup B') = s\left[(A \cap B)'\right] = 30$$



Yandaki şemada verilenlere göre,
$s\left[(A \cap B)'\right] = 30$ ise,

$x + z + 3 = 30 \Rightarrow x + z = 27$

$s(A) + s(B) = 47$ ise,

$x + y + y + z = 47 \Rightarrow x + z + 2y = 47 \Rightarrow 27 + 2y = 47$

$\Rightarrow 2y = 47 - 27 = 20 \Rightarrow y = 10$ dur. Buna göre,

$s(E) = x + y + z + 3 = 27 + 10 + 3 = 40$ tır.

22. $A = \{x / x = 4k,\ x < 300,\ k \in Z^+\}$ ve
$B = \{x / x = 6k,\ x < 350,\ k \in Z^+\}$ kümeleri veriliyor.
Buna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

Çözüm:

A kümesindeki elemanlar 300 den küçük 4 ün katı olan pozitif tam sayılardır.

B kümesindeki elemanlar 350 den küçük 6 nın katı olan pozitif tam sayılardır.

4 ile 6 nın e.k.o.k. u 12 olduğuna göre $A \cap B$ kümesindeki elemanlar 300 den küçük 12 nin katı olan pozitif tam sayılardır.

$A \cap B = \{x / x = 12k,\ x < 300,\ k \in Z^+\}$ dir.
elemanlar 300 den küçük 12 nin katı olan pozitif tam sayıları; 12,24,48,…,288 olup bunların sayısı

$\dfrac{288 - 12}{12} + 1 = \dfrac{276}{12} + 1 = 23 + 1 = 24$ olduğundan,

$s(A \cap B) = 24$ tür.

23. $A = \{x / x = 3k,\ x \le 100,\ k \in Z^+\}$ ve
$B = \{x / x = 5k,\ x \le 150,\ k \in Z^+\}$ kümeleri veriliyor.
Buna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm:

A kümesinin elemanları $[1,100]$ aralığındaki 3 ün katı olan 3,6,9,…,99 pozitif tam sayıları olup bunların sayısı,

$\dfrac{99 - 3}{3} + 1 = \dfrac{96}{33} + 1 = 32 + 1 = 33$ olduğundan, $s(A) = 33$ tür.

B kümesinin elemanları $[1,150]$ aralığındaki 5 in katı olan 5,10,15,…,150 pozitif tam sayıları olup bunların sayısı,

$\dfrac{150 - 5}{5} + 1 = \dfrac{145}{5} + 1 = 49 + 1 = 50$ olduğundan,
$s(B) = 50$ dir.

3 ile 5 in e.k.o.k. u 15 olduğuna göre $A \cap B$ kümesindeki elemanlar $[1,100]$ aralığındaki 15 in katı olan 15,30,45,…,90 pozitif tam sayıları olup bunların sayısı,

$\dfrac{90 - 15}{15} + 1 = \dfrac{75}{5} + 1 = 5 + 1 = 16$ olduğundan,
$s(A \cap B) = 16$ dır.

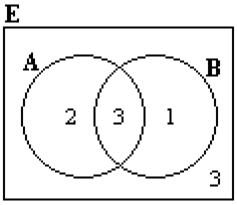
O halde,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 33 + 50 - 6 = 57$ bulunur.

24. E evrensel küme olmak üzere $s(E) = 9$, $s(A \cap B) = 3$, $s(A \cup B) = 6$ ve $s(B) = 4$ olduğuna göre, A kümesinin tümleyeni olan A' kümesinin kaç tane elemanı vardır?

Çözüm:



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir.

$s(B) = s(A \cap B) + s(B - A)$ ise,

$4 = 3 + s(B - A)$ olup

$s(B - A) = 4 - 3 = 1$ bulunur.

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B) \Rightarrow 6 = s(A - B) + 4$

$s(A - B) = 6 - 4 = 2$ bulunur.

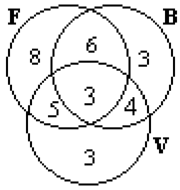
$s(E) = s(A \cup B) + s\left[(A \cup B)'\right]$ ise,

$9 = 6 + s\left[(A \cup B)'\right] \Rightarrow s\left[(A \cup B)'\right] = 9 - 6 = 3$ bulunur.

Buna göre, $s(A') = s(B - A) + s\left[(A \cup B)'\right] = 1 + 3 = 4$ bulunur.

25. Futbol, basketbol ve voleybol oynayanlardan oluşan bir sporcu kafilesinde futbol oynayanlar 22, basketbol oynayanlar 16, voleybol oynayanlar 15, futbol ve basketbol oynayanlar 9, futbol ve voleybol oynayanlar 8, basketbol ve voleybol oynayanlar 7, üç oyunu da oynayanlar 3 kişidir. Buna göre bu kafilede kaç kişi vardır?

Çözüm:



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir. Şemadaki sayılar bulundukları bölgenin eleman sayısını göstermektedir. Buna göre kafilede,

$s(F \cup B \cup V) = 8 + 6 + 3 + 5 + 3 + 4 + 3 = 32$ kişi vardır.

26. $A = \{\text{Gözlüklüögrenciler}\}$, $B = \{\text{Ceketli ögrenciler}\}$, $C = \{\text{Erkek ögrenciler}\}$, $D = \{\text{Kiz ögrenciler}\}$ olduğuna göre $(C \cap A) - (B \cup D)$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

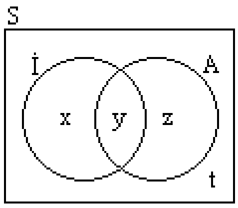
$C \cap D = \{\text{Gözlüklü erkek ögrenciler}\}$

$B \cup D = \{\text{Ceketli veyakiz ögrenciler}\}$

$(C \cap A) - (B \cup D) = \{\text{Ceketli olmayan gözlüklüögrenciler}\}$

27. 30 kişilik bir sınıfta İngilizce kursuna giden 16 öğrenci, Almanca kursuna gitmeyen 15 öğrenci ve hem İngilizce hem de Almanca kursuna giden 5 öğrenci olduğuna göre, sadece Almanca kursuna giden kaç öğrenci vardır?

Çözüm:



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir. Şemadaki sayılar bulundukları bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

Buna göre,

Sınıf mevcudu, $x + y + z + t = 30$

İngilizce kursuna giden öğrenci sayısı, $x + y = 16$

Almanca kursuna gitmeyen öğrenci sayısı, $x + t = 15$

İngilizce ve Almanca kursuna giden öğrenci sayısı, $y = 5$ tir.

$x + y = 16 \Rightarrow x + 5 = 16 \Rightarrow x = 11$ dir.

$x + t = 15 \Rightarrow 11 + t = 15 \Rightarrow t = 4$ tür.

$x + y + z + t = 30 \Rightarrow 16 + z + 4 = 30 \Rightarrow z = 30 - 20 = 10$

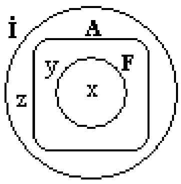
Buna göre, sadece Almanca kursuna giden öğrenci sayısı,

$z = 10$ dur.

28. En az bir yabancı dil bilenlerin bulunduğu bir sınıfta, Fransızca bilenlerin hepsi Almanca, Almanca bilenlerin hepsi İngilizce bilmektedir. Almanca bilenler 9, Fransızca bilmeyenler 8, Fransızca bilenlerle sadece İngilizce bilenler toplamı 5 kişi olduğuna göre, bu sınıfın mevcudu kaçtır?

Çözüm:

Yabancı dil bilmeyen olmadığı için $F \cup A \cup İ$ kümesi evrensel kümedir.



Fransızca bilenlerin hepsi Almanca, Almanca bilenlerin hepsi İngilizce bildiği için $F \subset A \subset İ$ dir.

Almanca bilenlerin sayısı, $x + y = 9$ dur.

Fransızca bilmeyenlerin sayısı, $y + z = 8$ dir.

Fransızca bilenlerle sadece İngilizce bilenler toplamı, $x + z = 5$ tir.

Bu üç eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$x + y + y + z + x + z = 9 + 8 + 5$

$2x + 2y + 2z = 22 \Rightarrow x + y + z = 11$ dir.

Buna göre bu sınıfın mevcudu, $x + y + z = 11$ kişidir.

29. n elemanlı bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Buna göre n kaçtır?

Çözüm:

n elemanlı bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit ise,

$\binom{n}{5} = \binom{n}{3} \Rightarrow n = 5 + 3 = 8$ dir.

30. $A = \{a, b, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur, ama b elemanı bulunmaz?

Çözüm:

İstenen koşullara uygun 4 elemanlı alt kümeleri oluşturmak için A kümesinden a ve b elemanlarını ayırıp kalan 6 elemanla üç elemanlı alt kümeler oluşturmalıyız. Oluşan alt kümelerin hepsine a elemanını yazmalıyız. Buna göre 6 elemanlı $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!.3!} = \frac{6.5.4}{3!} = 20$ dir.

Bu durumda A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin 20 tanesinde a bulunur, ama b bulunmaz.

31. Bir sınıfta matematik dersinde başarı gösterenlerin sayısı sınıf mevcudunun % 80 i, matematik dersinden 3' ün üzerinde not alanların sayısı, başarı gösterenlerin sayısının % 20 sidir. Aynı sınıfta, fizik dersinde başarı gösterenlerin sayısı sınıf mevcudunun % 90 ı dır. Bu sınıfta fizik dersinde başarı gösterenlerden matematik notu 3'ün üzerinde olanların sayısı, sınıf mevcudunun en az yüzde kaçıdır?

Çözüm:

Sınıfta 100 öğrenci bulunduğunu kabul edersek,

Matematikte başarı gösterenlerin sayısı,

$100.\frac{80}{100} = 80$ kişidir.

Matematikten 3'ün üzerinde not alan kişi sayısı,

$80.\frac{20}{100} = 16$ kişidir.

Fizik dersinde başarı gösterenlerin sayısı,

$100.\frac{90}{100} = 90$ kişidir.

Fizik dersinde başarı gösterenlerden matematik notu 3'ün üzerinde olanların sayısının en az olması için matematikten 3'ün üzerinde not alan 16 kişinin en çoğunun Fizikten başarısız olmasını düşünmeliyiz. 100 kişilik sınıfta Fizikten başarısız olan 10 kişi olduğuna göre matematikten 3'ün üzerinde not alan 16 kişiden 10 tanesi Fizikten başarısız olmuş olsa en az $16 - 10 = 6$ kişi hem fizikten başarılı olup hem de matematikten 3'ün üzerinde not almış olacaktır. Buna göre istenen cevap % 6 dır.

32. Eleman sayıları farkı 3 olan iki kümenin alt küme sayıları toplamı 72 olduğuna göre, bu iki kümenin eleman sayıları toplamı kaçtır?

Çözüm:

Bir kümenin eleman sayısı x + 3 ise diğer kümenin eleman sayısı x tir. Alt küme sayıları toplamı 72 olduğuna göre,

$$2^{x+3} + 2^{x} = 72 \Rightarrow 2^{3}.2^{x} + 2^{x} = 72$$

$$\Rightarrow 8.2^{x} + 2^{x} = 72 \Rightarrow 9.2^{x} = 72$$

$$\Rightarrow 2^{x} = 8 = 2^{3} \Rightarrow 2^{x} = 2^{3} \Rightarrow x = 3$$

bulunur.

Buna göre iki kümenin eleman sayıları toplamı,

$x + 3 + x = 3 + 3 + 3 = 9$ dur.

33. 4 elemanlı bir kümenin en az 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

Çözüm:

İstenen; 3 elemanlı ve 4 elemanlı alt kümelerin sayıları toplamıdır. Buna göre,

$\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + = 5$ tir.

34. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinden kaç tanesinde en az bir tane tek sayı bulunur?

Çözüm:

7 elemanlı A kümesinin 3 elemanlı bütün alt kümeleri sayısı,

$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!.3!} = \frac{7.6.5}{6} = 35$ tanedir.

Bu 35 tane alt kümenin bazılarında hiç tek sayı yoktur (Hepsi çift sayıdır). Bunların sayısı $\{2,4,6\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı kadardır.

$\binom{3}{3} = 1$ olduğuna göre,

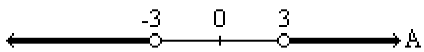
$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin

$35 - 1 = 34$ tanesinde en az bir tek sayı vardır.

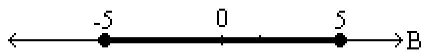
35. $A = \{x / x \in R, |x| > 3\}$ ve $B = \{x / x \in R, |x| \leq 5\}$ olduğuna göre, $A \cap B$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

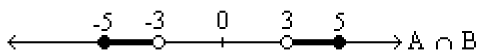
$|x| > 3$ ise $x > 3$ veya $x < -3$ tür. Buna göre A kümesi şekilde kalın koyu çizgi ile gösterilmiştir.



$|x| \leq 5$ ise $-5 \leq x \leq 5$ tir. Buna göre A kümesi şekilde kalın koyu çizgi ile gösterilmiştir.



Buna göre $A \cap B$ kümesi koyu kalın çizgi ile şemada gösterilmiştir.



O halde

$A \cap B = [-5,-3) \cup (3,5]$ tir.

36. A kümesinin alt kümelerinden 4 tanesi aynı zamanda B kümesinin de alt kümesidir. $s(A' \cap B) = 4$ ve $s(A - B) = 3$ olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm:

A kümesinin alt kümelerinden 4 tanesi aynı zamanda B kümesinin de alt kümesi ise, $A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı 4 tür. Buna göre,

$2^{s(A \cap B)} = 4 = 2^2 \Rightarrow s(A \cap B) = 2$ dir.

$s(A' \cap B) = s(B - A) = 4$ tür.

$s(A - B) = 3$, $s(A \cap B) = 2$ ve $s(B - A) = 4$ olduğundan,

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$

$s(A \cup B) = 3 + 3 + 4 = 9$ bulunur.

37. A kümesinin alt kümelerinden 6 tanesi B kümesinin alt kümesi değildir. B kümesinin alt kümelerinden 30 tanesi A kümesinin alt kümesi değildir. $A \cup B$ kümesinin alt kümelerinden 2 tanesi hem A kümesinin hem de B kümesinin elemanı olduğuna göre $s(A) + s(B)$ kaçtır?

Çözüm:

$A \cup B$ kümesinin alt kümeleri; hem A kümesinin hem de B kümesinin alt kümeleridir.

A kümesinin alt kümelerinden 6 tanesi B kümesinin alt kümesi değilse, A kümesinin bütün alt kümeleri sayısından $A \cap B$ kümesinin alt kümeleri sayısı çıkarılırsa sonuç 6 dır.

Buna göre, $2^{s(A)} - 2^{s(A \cap B)} = 6$ dır.

B kümesinin alt kümelerinden 30 tanesi A kümesinin alt kümesi değilse, B kümesinin bütün alt kümeleri sayısından $A \cap B$ kümesinin alt kümeleri sayısı çıkarılırsa sonuç 30 dur.

Buna göre, $2^{s(B)} - 2^{s(A \cap B)} = 30$ dır.

$A \cup B$ kümesinin alt kümelerinden 2 tanesi hem A kümesinin hem de B kümesinin elemanı olduğuna göre, $A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı 2 dir.

O halde,

$2^{s(A \cap B)} = 2 = 2^1 \Rightarrow s(A \cap B) = 1$ dir.

Bu sonuç yukarıdaki eşitliklerde değerlendirilirse,

$2^{s(A)} - 2^1 = 6 \Rightarrow 2^{s(A)} = 8 \Rightarrow s(A) = 3$ tür.

$2^{s(B)} - 2^1 = 30 \Rightarrow 2^{s(B)} = 32 \Rightarrow s(B) = 5$ tir.

Buna göre $s(A) + s(B) = 3 + 5 = 8$ dir.

38. A ve B kümeleri için evrensel küme $E = \{x / x \in N, x^2 < 36\}$ dir. $A' = \{1,3,4\}$ ve $B = \{2,4\}$ olduğuna göre $A \cap B'$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

$E = \{0,1,2,3,4,5\}$ olup $A' = \{1,3,4\}$ ise $A = \{0,2,5\}$ tir.

$B = \{2,4\}$ ise $B' = \{0,1,3,5\}$ tir. Buna göre

$A \cap B' = \{0,5\}$ bulunur.

39. A ve B kümeleri için evrensel küme $E = \{x / x \in Z^+, 2^{x-1} < 33\}$ tür. $A' = \{1,2\}$ ve $B' = \{2,3\}$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$ olup $A' = \{1,2\}$ ise $A = \{3,4,5,6\}$ dır.
$B' = \{2,3\}$ ise $B = \{1,4,5,6\}$ tir. Buna göre
$A \cup B = \{1,3,4,5,6\}$ bulunur.

40. $A \neq \phi$ olmak üzere, öz alt küme sayısı n olan bir A kümesinin eleman sayısı 2 katına çıkarılırsa öz alt küme sayısı kaç katına çıkar?

Çözüm:

$s(A) = x$ olsun. A nın öz alt küme sayısı n ise,

$2^x - 1 = n \Rightarrow 2^x = n + 1$ dir.

A kümesinin eleman sayısı 2 katına çıkarılırsa yani,
$s(A) = 2x$ olursa öz alt küme sayısı,

$$2^{2x}-1=\left(2^x\right)^2-1=(n+1)^2-1$$

$$=(n+1-1).(n+1+1)=n.(n+2)$$

olur. Buna göre, öz alt küme sayısı n nin n + 2 katıdır.

41. $A=\{a,b,c\}$ ve $D=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümeleri veriliyor. $A\subset B\subset D$ şartını sağlayan en çok kaç tane B kümesi vardır?

Çözüm:

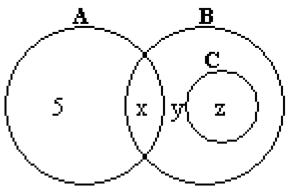
$A\subset B\subset D$ şartını sağlayan B kümesinin eleman sayısı en çok $D-A$ nın alt küme sayısına eşittir.

$A=\{a,b,c\}$ ve $D=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ olduğuna göre,
$D-A=\{d,e,f,g\}$ ve $s(D-A)=4$ tür.

O halde istenen koşullara uygun $2^4=16$ tane küme vardır.

42. E evrensel küme olmak üzere $A\cup B\cup C=E$, $C\subset B$, $A\cap C=\phi$, $s(A-B)=5$, $s(B)=10$ ve $s(C')=12$ olduğuna göre $s(C)$ kaçtır?

Çözüm:



Verilenlere uygun şema tanda verilmiştir. Şemadaki sayılar bulunduğu bölgenin eleman sayısını göstermektedir.

$s(C')=x+y+5=12\Rightarrow x+y=7$ dir.

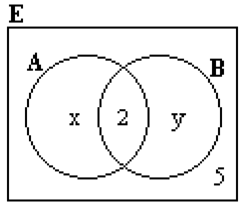
$s(B)=x+y+z=10\Rightarrow 7+z=10\Rightarrow z=10-7=3$ tür.

Buna göre, $s(C)=z=3$ bulunur.

43. A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere $s(A'\cup B')=8$, $s(A'\cap B')=5$ ve $s(A\cap B)=2$ olduğuna göre $s(A\cup B)$ kaçtır?

Çözüm:

Soruda verilenlere uygun şema aşağıdadır.



$$s(A'\cup B')=s\left[(A\cap B)'\right]=8$$

$$s(A'\cap B')=s\left[(A\cup B)'\right]=5$$

$x+y+5=8\Rightarrow x+y=3$ tür. Buna göre,

$s(A\cup B)=x+y+2=3+2=5$ tir.

44. A ve B kümeleri için, $s(A)=3.s(B)=4.s(A\cap B)$, $s(A')=5$ ve $s(B')=21$ olduğuna göre $s(A-B)$ kaçtır?

Çözüm:

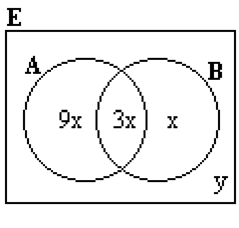
$s(A\cap B)=3x$ ve $s\left[(A\cup B)'\right]=y$ olsun. Buna göre,

$s(A)=3.s(B)=4.s(A\cap B)$ olduğundan,

$s(A)=12x$ ve $s(B)=4x$ tir.

$s(A)=s(A-B)+s(A\cap B)=12x$ ise,

$s(A-B)=12x-3x=9x$ tir.



$s(B)=s(B-A)+s(A\cap B)=4x$ ise,

$s(B-A)=4x-3x=x$ tir.
Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir.

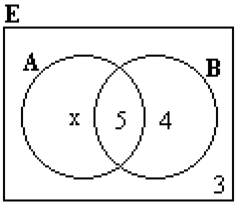
$s(A')=x+y=5$ ve

$s(B')=9x+y=21$ eşitliklerinden $x=2$ ve $y=3$ bulunur.

Buna göre, $s(A-B)=9x=9.2=18$ bulunur.

45. A ve B kümeleri için E evrensel küme olmak üzere, $s(E)=18$, $s(A'-B)=3$, $s(A-B')=5$ ve $s(A'-B')=4$ olduğuna göre, $s(B'-A')$ kaçtır?

Çözüm:



$s(A' - B) = s(A \cup B)' = 3$

$s(A - B') = s(A \cap B) = 5$

$s(B' - A') = s(A - B) = x$

olsun.

$s(E) = x + 5 + 4 + 3 = 18 \Rightarrow x = 6$ dır. O halde,

$s(B' - A') = 6$ bulunur.

46. 3 veya 4 ile tam bölünebilen iki basamaklı kaç tane doğal sayı vardır?

Çözüm:

10 dan 99 a kadar olan doğal sayılardan 3 ile bölünebilen sayılar; $A = \{12,15,18,...,99\}$ olup bunların

sayısı, $\frac{99-12}{3} + 1 = 30$ tanedir. $s(A) = 30$ dur.

10 dan 99 a kadar olan doğal sayılardan 4 ile bölünebilen sayılar; $B = \{12,16,20,...,96\}$ olup bunların

sayısı, $\frac{96-12}{4} + 1 = 22$ tanedir. $s(B) = 22$ dir.

10 dan 99 a kadar olan doğal sayılardan hem 3 ile hem de 4 ile bölünebilen sayılar; $A \cap B = \{12,24,36,...,96\}$ olup bunların

sayısı, $\frac{96-12}{12} + 1 = 8$ tanedir. $s(A \cap B) = 8$ dir.

O halde 10 dan 99 a kadar (10 ve 99 dahil) olan doğal sayılardan, 3 veya 4 ile bölünebilenlerin sayısı,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 30 + 22 - 8 = 44$ tanedir.

47. Bir topluluktaki insanların 12 tanesi hasta, 24 tanesi hasta değildir. Bu toplulukta yaşlı veya hasta olanların sayısı 28 olduğuna göre, hasta olmayan gençlerin sayısı kaçtır? (Gençlerin kümesi yaşlı olmayanların kümesidir.)

Çözüm:

Bu topluluktaki genç (yaşlı olmayan) insanları G, yaşlı insanları Y, hasta insanları H ve hasta olmayanları H' ile gösterelim. Bu kümeler aşağıdaki gibi olsun.

	G	Y
H	x	y
H'	z	t

Bu toplulukta 12 insan hasta ise, $x + y = 12$ dir.

Bu toplulukta 12 insan hasta değilse, $z + t = 24$ tür.

Bu toplulukta 28 insan yaşlı veya hasta ise, $x + y + t = 28$ dir.

$x + y + t = 28 \Rightarrow 12 + t = 28 \Rightarrow t = 16$ olur.

$z + t = 24 \Rightarrow z + 16 = 24 \Rightarrow z = 24 - 16 = 8$ olur. Buna göre, hasta olmayan gençlerin sayısı $z = 8$ dir.

48. Bir sınıftaki öğrencilerin % 50 si matematikten, %60 ı kimyadan başarılı ve % 20 si ise iki dersten de başarılıdır. Sadece matematikten başarılı olan öğrenciler 12 kişi olduğuna göre, iki dersten de başarılı olan kaç öğrenci vardır?

Çözüm:

Bu sınıfın mevcudu $s(S) = 10x$ olsun. Her iki dersten de başarılı olanlar sınıfın % 20 si olduğuna göre,

$s(M \cap K) = 10x.\frac{20}{100} = 2x$ tir.

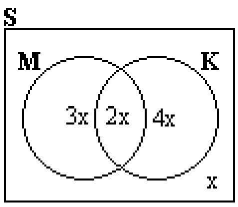
Matematikten başarılı olanlar sınıfın % 50 si ise,

$s(M) = 10x.\frac{50}{100} = 5x$ tir.

Kimyadan başarılı olanlar sınıfın % 60 ı ise,

$s(K) = 10x.\frac{60}{100} = 6x$ tir.

Verilenlere uygun olarak şema düzenleyelim.



Sadece Matematikten başarılı olanların sayısı 12 olduğundan, $3x = 12 \Rightarrow x = 4$ tür.
Buna göre, iki dersten de başarılı olan öğrenci sayısı,

$s(M \cap K) = 2x = 2.4 = 8$ kişidir.

KONU BİTMİŞTİR.