ÇARPANLARA AYIRMA

Bir Polinomun Çarpanları

$P(x)$ polinomu, sabit olmayan ve derecesi $P(x)$ in derecesinden küçük olan polinomların çarpımı olarak yazılabiliyorsa bu polinomlardan her birine $P(x)$ polinomunun bir çarpanı denir.

Örnek:

$Q(x)=x+2$ ve $T(x)=x^2-1$ polinomlarının çarpımı olan $P(x)$ polinomunu bulalım.

$P(x)=(x+2).(x^2-1)=x^3+2x^2-x-2$ olur.

$Q(x)=x+2$ ve $T(x)=x^2-1$ polinomlarına
$P(x)=x^3+2x^2-x-2$ polinomunun çarpanları denir.

$P(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2).(x^2-1)$ şeklinde iki polinomun çarpımı olarak yazmaya $P(x)$ polinomunu çarpanlara ayırma denir.

Örnek:

x^2 ve x^2+2 polinomlarının çarpımı olan polinom,
$x^2.(x^2+2)=x^4+2x^2$ olduğundan.
x^2 ve x^2+2 polinomları x^4+2x^2 polinomunun çarpanlarıdır.

x^4+2x^2 polinomunun çarpanlara ayrılmış hali,

$x^4+2x^2=x^2.(x^2+2)$ dir.

Asal Polinom

Sabit olmayan ve birden fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan polinomlara **indirgenemeyen polinomlar** denir.

Sabit olmayan, baş katsayısı 1 olan ve kendisinden küçük dereceli polinomların çarpımı olarak yazılamayan polinomlara **asal polinom** denir.

Örnek:

$P(x)=x^2+6$, $Q(x)=3x^2+5$, $A(x)=x-8$ polinomları iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılamadığından indirgenemeyen polinomlardır.

Örnek:

$P(x)=x$, $Q(x)=x+7$, $A(x)=x^2+3$ polinomları asal polinomlardır.

$B(x)=2x+1$ polinomu baş katsayısı 1 den farklı olduğundan asal polinom değildir.

$R(x)=3x+7$ polinomu baş katsayısı 1 den farklı olduğundan asal polinom değildir.

$T(x)=x^2-9$ polinomu $x-3$ ve $x+3$ polinomlarının çarpımı olarak yazılabildiğinden asal değildir.

$K(x)=9$ polinomu sabit polinom olduğundan asal polinom değildir.

Örnek:

$x-3$ ve $x+3$ polinomlarının çarpımı olarak yazılabildiğinden asal değildir.

$2x^3+x$ polinomu x ve $2x^2+1$ polinomlarının çarpımı olarak yazılabildiğinden asal değildir.

$3x+6$ polinomu baş katsayısı 1 den farklı olduğundan asal polinom değildir.

$x+3$ polinomunun baş katsayısı 1 olup kendisinden küçük dereceli en az iki polinomun çarpımı olarak yazılamadığından asaldır.

Bir Polinomun Asal Çarpanları

Bir $P(x)$ polinomunun çarpanlarından her biri asal polinom ya da asal bir polinomun kuvveti ise bu polinomlara $P(x)$ polinomunun asal çarpanları denir.

Örnek:

$P(x) = (x-2).(x^2+2)$ ise $x-2$ ile x^2+2, $P(x)$ polinomunun asal çarpanlarıdır.

$Q(x) = (x+2)^2.(x+3)$ ise $x+3$ ile $x+2$, $Q(x)$ polinomunun asal çarpanlarıdır.

Örnek:

$P(x) = (x-1).(x^2+1)$ ise $x-1$ ile x^2+1, $P(x)$ polinomunun asal çarpanlarıdır.

$Q(x) = (x+3)^2.(x+1)$ ise $x+1$ ile $x+3$, $Q(x)$ polinomunun asal çarpanlarıdır.

$R(x) = (x^2+1)^5.(x-1)^3.x$ ise x^2+1, $(x-1)^3$ ile x, $R(x)$ polinomunun asal çarpanlarıdır.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

1. Ortak Çarpan Parantezine Alma

Ortak çarpan parantezine alarak çarpanlara ayırma yapılırken, çarpmanın toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğinden yararlanılır.

$$A(x).B(x) \mp A(x).C(x) = A(x).[B(x) \mp C(x)]$$

Örnek:

$ax^2 + ay = a.x^2 + a.y = a.(x^2+y)$

$4x - 12 = 4.x - 4.3 = 4.(x-3)$

$mx^2 + m^2x = m.x.x + m.m.x = mx.(x+m)$

$2x + 5y + 7x + 4y = 9x + 9y = 9.(x+y)$

Örnek:

$6x^3y^2 - 9x^2y^3 + 12xy^4$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

Bu üç terimli ifadenin her terimi, $3xy^2$ ifadesi ile bölünür. O halde,

$6x^3y^2 - 9x^2y^3 + 12xy^4 = 3xy^2.(2x^2 - 3xy + 4y^2)$ biçiminde çarpanlarına ayrılmış olur.

2. Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma

Verilen polinomun bütün terimlerinin ortak çarpanı bulunmayabilir. Ancak, polinomun terimlerini belirli gruplara ayırarak ortak çarpanlar bulabiliriz. Her gruptan elde edilen çarpanlar arasında ortak olanlar varsa, bu yöntem kolayca uygulanabilir.

Örnek:

$ax - ay - bx + by$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

Dört ya da daha fazla terimli ifadeleri çarpanlarına ayırırken, önce uygun şekilde gruplandırılır. Daha sonra da ortak çarpan parantezine alınır.

$$\begin{aligned} ax - ay - bx + by &= (ax - ay) - (bx - by) \\ &= a.(x-y) - b.(x-y) \\ &= (a-b).(x-y) \end{aligned}$$

Örnek:

$ma + na + mb + nb$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} ma + na + mb + nb &= (ma + na) + (mb + nb) \\ &= a.(m+n) + b.(m+n) \\ &= (m+n).(a+b) \end{aligned}$$

Örnek:

$t^3 - t^2 + t - 1$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$t^3 - t^2 + t - 1 = \left(t^3 - t^2\right) + (t-1) = t^2.(t-1) + 1.(t-1)$$

$$= (t-1).\left(t^2 + 1\right)$$

Örnek:

$a.(2b-1) - \left(2b - a^2\right)$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$a.(2b-1) - \left(2b - a^2\right) = 2ab - a - 2b + a^2$$

$$= (2ab - 2b) + \left(a^2 - a\right)$$

$$= 2b.(a-1) + a.(a-1)$$

$$= (a-1).(2b+a)$$

Örnek:

$x + y - xy - 1$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$x + y - xy - 1 = (x-1) - (xy - y)$$

$$= 1.(x-1) - y.(x-1)$$

$$= (x-1).(1-y)$$

Örnek:

$a - b = 3$ ve $a + c = 7$ olduğuna göre $ab - bc + ac - b^2$ toplamının sayısal değerini bulalım.

Çözüm:

$a - b = 3 \Rightarrow -a + b = -3$ ve $a + c = 7$ dir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa, $b + c = 4$ bulunur.

$$ab - bc + ac - b^2 = ab - b^2 + ac - bc$$

$$= b.(a-b) + c.(a-b) = (a-b).(b+c)$$

$$= 3.4 = 12$$

Uyarı

$x - y = -(y - x)$ tir.

Örnek:

$3 - 9 = -(9-3)$

$c.(a-b) + d(b-a) = c(a-b) - d(a-b) = (a-b).(c-d)$

$x(z-t) - y(t-z) = x(z-t) + y(z-t) = (x-y).(z-t)$

Uyarı

$n \in N$ olmak üzere,

$(x-y)^{2n} = (y-x)^{2n}$

$(x-y)^{2n-1} = -(y-x)^{2n-1}$ dir.

Örnek:

$(a-b)^2(b-c) + (b-a)(c-b)^2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$(a-b)^2 = (b-a)^2$ dir.

$(c-b)^2 = (b-c)^2$ dir.

$$(a-b)^2(b-c) + (b-a)(c-b)^2$$

$$= (b-a)^2(b-c) + (b-a)(b-c)^2$$

$$= (b-a).(b-a).(b-c) + (b-a)(b-c).(b-c)$$

$= (b-a).(b-c).[(b-a)+(b-c)]$

$= (b-a).(b-c).(2b-a-c)$

3. Özdeşlikler

$(x-3).(x+3) = x^2 - 9$ eşitliği,

$x = 0$ için $(0-3).(0+3) = 0^2 - 9 \Rightarrow -9 = -9$ doğrudur.

$x = 1$ için $(1-3).(1+3) = 1^2 - 9 \Rightarrow -8 = -8$ doğrudur.

$x = 2$ için $(2-3).(2+3) = 2^2 - 9 \Rightarrow -5 = -5$ doğrudur.

$(x-3).(x+3) = x^2 - 9$ eşitliği, x in her sayı değeri için doğrudur.

Bilinmeyenlere verilen her sayı değeri için sağlanan eşitliklere özdeşlik denir. $(x-3).(x+3) = x^2 - 9$ eşitliği, bir özdeşliktir.

Bazen verilen ifadeleri çarpanlarına ayırmak için özdeşliklerden kullanılır. Önemli özdeşliklerden bazıları şunlardır.

a. İki Kare Farkı Özdeşliği

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)}$$

özdeşliğine iki kare farkı özdeşliği denir. İki terimin toplamı ile farkının çarpımı, birinci terimin karesi ile ikinci terimin karesinin farkına eşittir

$x^2 - y^2 = (x-y).(x+y) \Rightarrow (x-y).(x+y) = x^2 - y^2$

dir.

Örnek:

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2).(x+2)$ dir.

$a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a-1).(a+1)$ dir.

$25n^2 - 4 = (5n)^2 - 2^2 = (5n-2).(5n+2)$ dir.

$7b^2 - 9 = (\sqrt{7}b)^2 - 3^2 = (\sqrt{7}b - 3).(\sqrt{7}b + 3)$ tür.

Örnek:

$4x^2 - \frac{9}{16} = (2x)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(2x - \frac{3}{4}\right).\left(2x + \frac{3}{4}\right)$ tür.

$5a^2 - 3b^2 = (\sqrt{5}a)^2 - (\sqrt{3}b)^2$

$= (\sqrt{5}a - \sqrt{3}b).(\sqrt{5}a + \sqrt{3}b)$

Örnek:

$(205)^2 - (195)^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$(205)^2 - (195)^2 = (205 - 195).(205 + 195)$

$= 10.400 = 4000$

Örnek:

$(0{,}7)^2 - (0{,}3)^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$(0{,}7)^2 - (0{,}3)^2 = (0{,}7 - 0{,}3).(0{,}7 + 0{,}3) = 0{,}4.1 = 0{,}4$

Örnek:

$140^2 - 132^2 = 272.a$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$140^2 - 132^2 = (140 - 132).(140 + 132) = 8.272$

$140^2 - 132^2 = 8.272 = 272.a \Rightarrow a = 8$ dir.

Örnek:

$x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)$
eşitliğinden yararlanarak 492.508 çarpımını iki kare farkı şeklinde yazalım.

Çözüm:

$\frac{508-492}{2} = 8$ olduğu için, $492 = 500 - 8$, $508 = 500 + 8$
şeklinde yazılabilir.

Buna göre,

$492.508 = (500-8).(500+8) = 500^2 - 8^2$ olur.

Örnek:

$\sqrt{25^2 - 22.28}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\sqrt{25^2 - 22.28} = \sqrt{25^2 - (25-3).(25+3)}$$

$$= \sqrt{25^2 - (25^2 - 3^2)} = \sqrt{25^2 - 25^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{3^2} = 3$$

Örnek:

$m = \sqrt{3} - 1$ olduğuna göre $m.(m+1).(m+2)$ çarpımının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$(\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}+1) = 3 - 1 = 2$ dir.

$$m.(m+1).(m+2) = (\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}-1+1).(\sqrt{3}-1+2)$$

$$= \sqrt{3}.(\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}$$

b. İki Terim Toplamının Karesi

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

özdeşliğine iki terim toplamının karesi özdeşliği (tam kare özdeşliği) denir.
İki terim toplamının karesi alınırken; birinci terimin karesi, birinci ile ikinci terim çarpımının iki katı, ikinci terimin karesi alınıp toplanır.

Örnek:

$$(x+2)^2 = x^2 + 2x.2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2.3x.2y + (2y)^2$$

$$= 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Örnek:

$$\left(x + \frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + 2.x.\frac{3}{x} + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2} + 6$$

Örnek:

13^2 ifadesini, 13 sayısını iki sayının toplamı biçiminde yazarak bulalım.

Çözüm:
$13 = 7 + 6$ olarak alalım,

$$13^2 = (7+6)^2 = 7^2 + 2.7.6 + 6^2 = 49 + 84 + 36 = 169$$

bulunur.

Örnek:

$x + \frac{1}{x} = 5$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x + \frac{1}{x} = 5$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5^2\Rightarrow x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=25$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=25\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=23 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$x^2+y^2=10$ ve $x.y=3$ olduğuna göre $x+y$ kaçtır?

Çözüm:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\Rightarrow(x+y)^2=10+2.3=16$$

$$(x+y)^2=16\Rightarrow x+y=4 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\dfrac{a^2+b^2}{a.b}=3$ olduğuna göre $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}$ kaçtır?

Çözüm:

$\dfrac{a^2+b^2}{a.b}=3\Rightarrow\dfrac{a^2}{a.b}+\dfrac{b^2}{a.b}=3\Rightarrow\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=3$ olur. Bu eşitlikte her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=3^2\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}+2.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}=9$$

$$\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}=9\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7 \text{ bulunur.}$$

c. İki Terim Farkının Karesi Özdeşliği

$$\boxed{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}$$

özdeşliğine iki terim farkının karesi özdeşliği (tam kare özdeşliği) denir.
İki terim farkının karesi alınırken; birinci terimin karesi ile ikinci terimin karesi toplamından, birinci terim ile ikinci terim çarpımının iki katı çıkarılır.

Örnek:

$$(x-2)^2=x^2-2x.2+2^2=x^2-4x+4$$

$$\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{2}y\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2.\frac{1}{2}x.\sqrt{2}y+\left(\sqrt{2}y\right)^2$$

$$=\frac{x^2}{4}-\sqrt{2}xy+2y^2$$

Örnek:

$$\left(\sqrt{3}-2\right)^2=\sqrt{3}^2-2.\sqrt{3}.2+2^2=3-4\sqrt{3}+4=7-4\sqrt{3}$$

Örnek:

30^2 ifadesini, 30 sayısını iki sayının farkı biçiminde yazarak bulalım.

Çözüm:

$13=40-10$ olarak alalım,

$$30^2=(40-10)^2=40^2-2.40.10+10^2$$

$$=1600-800+100=900 \text{ dür.}$$

Örnek:

$2a-\dfrac{1}{a}=5$ ise $4a^2+\dfrac{1}{a^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$2a-\dfrac{1}{a}=5$ eşitliğinin her iki tarafının karesini alalım,

$$\left(2a-\frac{1}{a}\right)^2=5^2\Rightarrow4a^2-2.2a.\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=25$$

$$4a^2 - 4 + \frac{1}{a^2} = 25 \Rightarrow 4a^2 + \frac{1}{a^2} = 25 + 4 = 29 \text{ bulunur}$$

d. Üç Terim Toplamının Karesi

$$\boxed{(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2.(xy + xz + yz)}$$

Üç terim toplamının karesi; terimlerin kareleri toplamına, terimlerin ikişer ikişer çarpımları toplamının iki katı eklenerek bulunur.

Örnek:

$$(x + 3 + y)^2 = x^2 + 3^2 + y^2 + 2.(x.3 + x.y + 3.y)$$

$$(x + 3 + y)^2 = x^2 + y^2 + 6x + 6y + 2xy + 9 \text{ dir.}$$

Örnek:

$(x - y - 2)^2$ ifadesinin özdeşini bulalım.

Çözüm:

$$(x - y - 2)^2$$

$$= x^2 + (-y)^2 + (-2)^2 + 2.[x.(-y) + x.(-2) + (-y).(-2)]$$

$$= x^2 + y^2 + 4^2 + 2.[-xy - 2x + 2y]$$

$$= x^2 + y^2 - 4x - 2xy + 4y + 16$$

Örnek:

$x + y + z = 13$, $xy + xz + yz = 54$ olduğuna göre

$x^2 + y^2 + z^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2.(xy + xz + yz)$$

olduğundan,

$$13^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2.54$$

$$169 = x^2 + y^2 + z^2 + 108$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 169 - 108 = 61$$

Örnek:

$$(a + 2 - \sqrt{3})^2 = a^2 + 2^2 + (-\sqrt{3})^2 + 2.(a.2 - a.\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$$
ifadesinin özdeşini bulalım.

Çözüm:

$$(a + 2 - \sqrt{3})^2 = a^2 + 4 + 3 + 2.(2a - a.\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$$

$$(a + 2 - \sqrt{3})^2 = a^2 + 4a - 2a\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 7 \text{ dir.}$$

Örnek:

$a^2 + b^2 + c^2 = 160$ ve $ac - ab - bc = 120$ olduğuna göre

$a - b + c$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.(-ab + ac - bc)$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.(ac - ab - bc)$$

$$(a - b + c)^2 = 160 + 2.120 = 160 + 240 = 400$$

$$(a - b + c)^2 = 400 \Rightarrow a - b + c = 20 \text{ bulunur.}$$

e. İki Terim Toplamının veya Farkının Küpü Özdeşliği

İki terim toplamının küpü özdeşliği,

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

İki terim farkının küpü özdeşliği.

$$\boxed{(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

Örnek:

$$(x+3y)^3 = x^3 + 3x^2.3y + 3x.(3y)^2 + (3y)^3$$

$$= x^3 + 9x^2 + 3x.9y^2 + 27y^3$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27xy^2 + 27y^3$$

Örnek:

$$\left(2x^2 - \sqrt{3}y\right)^3$$

$$= \left(2x^2\right)^3 + 3\left(2x^2\right)^2.\left(-\sqrt{3}y\right) + 3.2x^2.\left(-\sqrt{3}y\right)^2 + \left(-\sqrt{3}y\right)^3$$

$$= 8x^6 + 3.4x^4.\left(-\sqrt{3}y\right) + 3.2x^2.3y^2 - 3\sqrt{3}y^3$$

$$= 8x^6 - 12\sqrt{3}x^4y + 18x^2y^2 - 3\sqrt{3}y^3$$

Örnek:

$x + \frac{1}{x} = 2$ ise $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 2^3$$

$$x^3 + 3.x^2.\frac{1}{x} + 3.x.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 8$$

$$\Rightarrow x^3 + 3.x + 3.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 8$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3.\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3.2 = 8$$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = 8 - 6 = 2$ bulunur.

Örnek:

$x^3 + 3xy^2 = 51$ ve $y^3 + 3x^2y = 24$ olduğuna göre $x - y$ farkı kaçtır?

Çözüm:

Verilen birinci eşitlikten ikinci eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$$x^3 + 3xy^2 - \left(y^3 + 3x^2y\right) = 51 - 24$$

$$x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x^2y = 27$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3^3$$

$(x-y)^3 = 3^3 \Rightarrow x - y = 3$ bulunur.

f. İki Terimin Küplerinin Toplamı veya Farkı Özdeşliği

İki terimin küplerinin toplamı özdeşliği

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b).\left(a^2 - ab + b^2\right)}$$

İki terimin küplerinin farkı özdeşliği.

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b).\left(a^2 + ab + b^2\right)}$$

Örnek:

x^3+8 ifadesinin özdeşini yazalım.

Çözüm:

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2).(x^2-2x+4)$$

Örnek:

$8x^3-27y^3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$$

$$=(2x-3y).(4x^2+6xy+9y^2)$$

Örnek:

$$125m^3+64n^3=(5m)^3+(4n)^3$$

$$=(5m+4n).(25m^2-20mn+16n^2)$$

Örnek:

$x+y=4$ ve $x.y=2$ ise x^3+y^3 ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$\Rightarrow 4^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

$64=x^3+y^3+3.2.4 \Rightarrow x^3+y^3=64-24=40$ bulunur.

Örnek:

$3x-\dfrac{2}{x}=3$ ise $27x^3-\dfrac{8}{x^3}$ kaçtır?

Çözüm:

$$\left(3x-\frac{2}{x}\right)^3=(3x)^3-3.(3x)^2.\left(\frac{2}{x}\right)+3.3x.\left(\frac{2}{x}\right)^2-\left(\frac{2}{x}\right)^3$$

$$3^3=27x^3-54x+\frac{36}{x}-\frac{8}{x^3}=27x^3-\frac{8}{x^3}-18.\left(3x-\frac{2}{x}\right)$$

$27=27x^3-\dfrac{8}{x^3}-18.3 \Rightarrow 27x^3-\dfrac{8}{x^3}=27+54=81$ olur.

4. İki Terimliler İçin Genel Durum

$\boxed{x^n-y^n=(x-y).(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+y^{n-1})}$ dir.

Ve n tek sayı ise;

$\boxed{x^n+y^n=(x+y).(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...+y^{n-1})}$ dir.

Uyarı:

x^n+y^n ifadesinde n çift sayı ise x^n+y^n ifadesi çarpanlarına ayrılamaz. Ancak özdeşlikler şeklinde yazılabilir.

Örnek:

$$x^4-y^4=(x-y).(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$$

$$x^5+y^5=(x+y).(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$

x^4+y^4 ifadesinin terimleri, eşit tek kuvvetler şeklinde yazılamadığından ifadenin çarpanları yoktur.

Örnek:

$$x^5-y^5=(x-y).(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

$$x^6+y^6=(x^2)^3+.(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$

$$x^6 - y^6 = \left(x^3\right)^2 - \left(y^3\right)^2 = \left(x^3 + y^3\right)\left(x^3 - y^3\right)$$

$$= (x+y).\left(x^2 - xy + y^2\right)(x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Örnek:

$$x^4 - 1 = (x-1).\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 = (x+2).\left(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16\right)$$

Örnek:

$5x^5 + 5$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$5x^5 + 5 = 5.\left(x^5 + 1\right) = 5.(x+1).\left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\right)$$

Örnek:

$x^7 - 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$x^7 - 1 = (x-1).\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

5. Tam Kare Özdeşliğinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ve $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ özdeşliklerinden yararlanarak yapılan çarpanlara ayırmadır. İki terim toplamının karesi özdeşliği üç terimlidir. Üç terimli bir ifadede iki terimin karekökü alınabiliyor ve üçüncü terimi de bu iki karekökün çarpımının iki katından elde edilebiliyorsa bu ifade bir tam kare olarak yazılabilir.

Örnek:

$x^2 - 2xy + y^2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -2xy & +y^2 = (x-y)^2 \\ \text{1.Terim} & \text{2.Terim} & \text{3.Terim} \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ x & \longrightarrow \; 2xy \; \longleftarrow & y \end{array}$$

1. ve 3. terimler pozitif ise karekökleri alınır. Kareköklerin çarpımının 2 katı 2. terimi veriyorsa, ifade tam karedir. Tam karenin işareti 2. terimin işaretidir. Yani

$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ dir.

1. ve 3. terimler aynı işaretli değilse üç terimli, tam kare olamaz.

Örnek:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2.x.1 + 1^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2.3.x + 3^2 = (x-3)^2$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x)^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = (x+3y)^2$$

$$0{,}16 - 0{,}8y^2 + y^4 = (0{,}4)^2 - 2.0{,}4.y^2 + \left(y^2\right)^2 = \left(0{,}4 - y^2\right)^2$$

Örnek:

$x^2 - 8x + a + 3$ ifadesi tam karedir. Buna göre a nın değerini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 8x + a + 3$ ifadesi tam kare ise, x in katsayısının yarısının karesi $a + 3$ ifadesine eşittir.

Buna göre,

$$\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = a + 3 \Rightarrow 16 = a + 3 \Rightarrow a = 13 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$x = 32$ ve $y = 12$ olmak üzere $x^2 - 6xy + 9y^2$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 6xy + 9y^2 = x^2 - 2.x.3y + (3y)^2 = (x - 3y)^2$

$x = 32$ ve $y = 12$ için $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$ ifadesinin değeri; $(32 - 3.12)^2 = (-4)^2 = 16$ bulunur.

Örnek:

$x^2 - 6xy + 10y^2 + 2y + 5$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$x^2 - 6xy + 10y^2 + 2y + 54$

$= x^2 - 6xy + 9y^2 + y^2 + 2y + 1 +$

$x^2 - 6xy + 10y^2 + 2y + 5$

$= (x^2 - 6xy + 9y^2) + (y^2 + 2y + 1) + 4$

$x^2 - 6xy + 10y^2 + 2y + 5 = (x - 3y)^2 + (y + 1)^2 + 4$ tür.

$(x - 3y)^2$ ve $(y + 1)^2$ ifadelerinin alabileceği en çüçük değer sıfır olduğuna göre, $x^2 - 6xy + 10y^2 + 2y + 5$ ifadesinin en küçük değeri alabilmesi için $(x - 3y)^2 = 0$ ve $(y + 1)^2 = 0$ alınmalıdır.

Buna göre, verilen ifade en az; $0 + 0 + 4 = 4$ olur.

Örnek:

$A = 176^2 + 24.176$ ve $B = 24^2 + 24.176$ olduğuna göre $A + B$ toplamının sonucu kaçtır?

Çözüm:

$A + B = 176^2 + 24.176 + 24^2 + 24.176$

$A + B = 176^2 + 2.24.176 + 176^2$

$A + B = (176 + 24)^2 = 200^2 = 40000$ bulunur.

Örnek:

$9 - 6x - 4ab + x^2 - a^2 - 4b^2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$9 - 6x - 4ab + x^2 - a^2 - 4b^2$ ifadesini önce gruplandıralım.

$9 - 6x - 4ab + x^2 - a^2 - 4b^2$

$= (9 - 6x + x^2) - (a^2 + 4ab + 4b^2)$

$= (3^2 - 2.3.x + x^2) - (a^2 + 2.a.2b + (2b)^2)$

$= (3 - x)^2 - (a + 2b)^2$

$= (3 - x - a - 2b).(3 - x + a + 2b)$

6. $x^2 + bx + c$ Şeklindeki Üç Terimliyi Çarpanlara Ayırma.

$x^2 + bx + c$ üç terimlisini c sabit teriminden yararlanarak çarpanlarına ayıralım:

$c = m.n$ ve $b = m + n$ olacak biçimde m ve n sayılarını bulabilirsek,

$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + m.n = (x + m).(x + n)$ olur.

Örnek:

$x^2 + 4x + 3 = x^2 + (3 + 1)x + 3.1 = (x + 3).(x + 1)$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2.3 = (x+2).(x+3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + (-2-3)x + (-2).(-3)$$

$$= (x-2).(x-3)$$

$$x^2 + x - 6 = x^2 + (-2+3)x + (-2).3 = (x+3).(x-2)$$

$$a^2 - 11a + 24 = a^2 + (-3-8)a + (-3).(-8)$$

$$= (a-3).(a-8)$$

$$n^2 + 7n - 18 = n^2 + (-2+9)x + (-2).9$$

$$= (x-2).(x+9)$$

Örnek:

$x^{2a} - 3.x^a + 2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$x^{2a} - 3.x^a + 2 = (x^a)^2 - 3.(x^a) + 2$ eşitliğini yazabiliriz.

Bu eşitlikte $x^a = n$ alınırsa,

$$x^{2a} - 3.x^a + 2 = n^2 - 3n + 2 = n^2 + (-2-1)n + (-2).(-1)$$

$$= (n-1).(n-2) = (x^a - 1).(x^a - 2)$$

bulunur.

Örnek:

$(x^2 + 2x)^2 - 7.(x^2 + 2x) - 8$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

Bu ifadede $x^2 + 2x = a$ alınırsa,

$$(x^2 + 2x) - 7.(x^2 + 2x) - 8$$

$$= a^2 - 7a - 8 = a^2 + (-8+1) + (-8).1$$

$$= (a+1).(a-8) = (x^2 + 2x + 1).(x^2 + 2x - 8)$$

$$= (x^2 + 2.x.1 + 1^2).(x^2 + (-2+4)x + 4.(-2))$$

$$= (x+1)^2.(x-2).(x+4)$$

Örnek:

$(x^2 + 2)^2 - 5.(x^2 + 2) - 6$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$(x^2 + 2)^2 - 5.(x^2 + 2) - 6$$

$$= (x^2 + 2)^2 + (-6+1).(x^2 + 2) + (-6).1$$

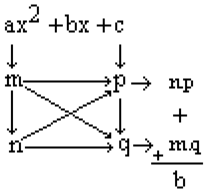
$$= (x^2 + 2 - 6).(x^2 + 2 + 1) = (x^2 - 4).(x^2 + 3)$$

$$= (x^2 - 2^2).(x^2 + 3) = (x+2).(x-2).(x^2 + 3) \text{ olur.}$$

7. $ax^2 + bx + c$ Şeklindeki Üç Terimliyi Çarpanlara Ayırma.

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ biçimindeki polinomlar çarpanlarına ayırırken a ve c nin çarpanlarına bakarız. $a = m.n$ ve $c = p.q$ olsun.

Şayet $b = mp + qn$ ise



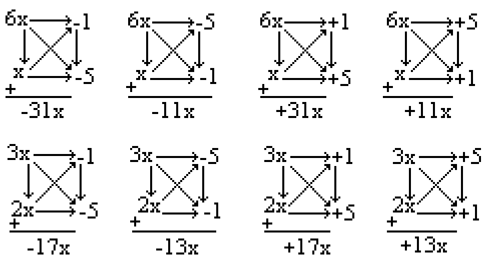
$ax^2 + bx + c = (mx + q).(nx + p)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır

Örnek:

$6x^2 - 13x + 5$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

Bulacağımız iki terimli çarpanların ilk terimleri $6x^2$ nin çarpanları, son terimleri ise 5 in çarpanlarıdır. Karşılıklı çarpımların toplamı da $-13x$ olacaktır. $6x^2$ ve 5 in çarpanlarından hangilerinin karşılıklı çarpımlarının $-13x$ ettiğini bulalım.



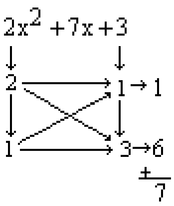
Şekle göre verilen koşullara uygun olarak

$6x^2 - 13x + 5 = (3x - 5).(2x - 1)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.

Örnek:

$2x^2 + 7x + 3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

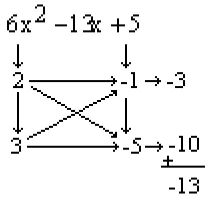


$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1).(x + 3)$

Örnek:

$6x^2 - 13x + 5$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

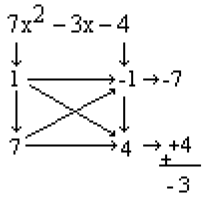


$6x^2 - 13x + 5 = (2x - 1).(3x - 5)$

Örnek:

$7x^2 - 3x - 4$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

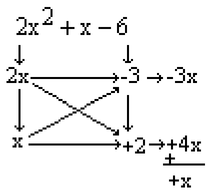


$7x^2 - 3x - 4 = (7x + 4).(x - 1)$

Örnek:

$2x^2 + x - 6$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:



$2x^2 + x - 6 = (2x - 3).(x + 2)$

8. Terim Ekleyip Çıkararak Çarpanlarına Ayırma

Verilen metotlarla çarpanlara ayrılamayan ifadelere, uygun terimler eklenip çıkarılarak, ifade bilinen özdeşliklere benzetilip çarpanlarına ayrılır.

Örnek:

$a^4 + a^2b^2 + b^4$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$a^4 + a^2b^2 + b^4$ ifadesi, bir tam kare değildir. Bu ifadenin tam kare olabilmesi için orta terim $2a^2b^2$ olması gerekir. İfadeyi tam kare yapmak için a^2b^2 ifadesini bir ekleyip bir çıkaralım.

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2$$

$$= a^4 + 2.a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$= \left[\left(a^2\right)^2 + 2.a^2.b^2 + \left(b^2\right)^2\right] - (ab)^2$$

$$= \left(a^2 + b^2\right)^2 - (ab)^2$$

$$= \left(a^2 + b^2 + ab\right)\left(a^2 + b^2 - ab\right)$$

Örnek:

$x^4 + 5x^2 + 9$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$x^4 + 5x^2 + 9$ ifadesini çarpanlarına ayırmak için x^2 ifadesini bir ekleyip bir çıkaralım.

$$x^4 + 5x^2 + 9 = x^4 + 5x^2 + 9 + x^2 - x^2$$

$$= x^4 + 6x^2 + 9 - x^2$$

$$= \left[\left(x^2\right)^2 + 2.x^2.3 + 3^2\right] - x^2$$

$$= \left(x^2 + 3\right)^2 - x^2$$

$$= \left(x^2 + 3 + x\right).\left(x^2 + 3 - x\right)$$

$$= \left(x^2 + x + 3\right)\left(x^2 - x + 3\right)$$

Örnek:

$x^2 + 2x - 24$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$x^2 + 2x - 24$ ifadesini çarpanlarına ayırmak için 1 sayısını bir ekleyip bir çıkaralım.

$$x^2 + 2x - 24 = x^2 + 2x - 24 + 1 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 25$$

$$= \left[x^2 + 2.x.1 + 1^2\right] - 5^2 = (x+1)^2 - 5^2$$

$$= (x + 1 + 5).(x + 1 - 5) = (x + 6).(x - 4)$$

Örnek:

$x^8 - 6x^4 + 1$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$x^8 - 6x^4 + 1$ ifadesini çarpanlarına ayırmak için $4x^4$ terimini bir ekleyip bir çıkaralım.

$$x^8 - 6x^4 + 1 = x^8 - 6x^4 + 1 + 4x^4 - 4x^4$$

$$= x^8 - 2x^4 + 1 - 4x^4$$

$$= \left[\left(x^4\right)^2 - 2.x^4.1 + 1^2\right] - (2x)^2 = \left(x^4 - 1\right)^2 - (2x)^2$$

$$= \left(x^4 - 1 + 2x\right)\left(x^4 - 1 - 2x\right)$$

$$= \left(x^4 + 2x - 1\right).\left(x^4 - 2x - 1\right)$$

9. Rasyonel İfadelerde Sadeleştirme

Rasyonel ifadenin payı ve paydası ayrı ayrı çarpanlarına ayrılır. Pay ve paydadaki ortak çarpanlar sadeleştirilir.

Örnek:

$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2).(x-3)}{(x-1).(x-2)}=\frac{x-3}{x-1} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\dfrac{(a-1)^2-1}{(a+1)^2-1}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{(a-1)^2-1}{(a+1)^2-1}=\frac{(a-1+1).(a-1-1)}{(a+1+1).(a+1-1)}=\frac{a.(a-2)}{(a+2).a}=\frac{a-2}{a+2}$$

bulunur.

Örnek:

$\dfrac{72^3+5^3}{72^2-335}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{72^3+5^3}{72^2-335}=\frac{(72+5).(72^2-72.5+5^2)}{72^2-335}$$

$$=\frac{77.(72^2-335)}{72^2-335}=77 \text{ olur.}$$

Örnek:

$\left(\dfrac{1}{x}-2\right):\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x-1}{x}\right)$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\left(\frac{1}{x}-2\right):\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1-2x}{x}:\left(\frac{x^2-(x-1)^2}{x.(x-1)}\right)$$

$$=\frac{1-2x}{x}.\frac{x.(x-1)}{(x-x+1).(x+x-1)}=\frac{1-2x}{x}.\frac{x.(x-1)}{1.(2x-1)}$$

$$=\frac{1-2x}{x}.\frac{x.(x-1)}{-1.(1-2x)}=-(x-1)=1-x \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sqrt[4]{2}+1=a$ olduğuna göre, $\dfrac{\sqrt{2}-4}{(\sqrt[8]{2}-\sqrt{2}).(\sqrt[8]{2}+\sqrt{2})}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{2}-4}{(\sqrt[8]{2}-\sqrt{2}).(\sqrt[8]{2}+\sqrt{2})}=\frac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt[8]{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{2}-2\right).\left(\sqrt[4]{2}+2\right)}{\sqrt[4]{2}-2}$$

$$=\sqrt[4]{2}+2=a+1$$

Örnek:

$\dfrac{x^5+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right).\left(x^3-x+\frac{1}{x}\right)}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^5+\frac{1}{x}}{(x+\frac{1}{x}).(x^3-x+\frac{1}{x})}=\frac{\frac{x^6+1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}.\frac{x^4-x^2+1}{x}}$$

$$=\frac{\frac{(x^2)^3+1^3}{x}}{\frac{(x^2+1).(x^4-x^2+1)}{x^2}}=\frac{\frac{(x^2+1).(x^4-x^2+1)}{x}}{\frac{(x^2+1).(x^4-x^2+1)}{x^2}}$$

$$=\frac{\frac{(x^2+1).(x^4-x^2+1)}{x}}{\frac{(x^2+1).(x^4-x^2+1)}{x^2}}=\frac{x^2}{x}=x$$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{m^2-m^{-1}}{m+m^{-1}+1}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{m^2-m^{-1}}{m+m^{-1}+1}=\frac{m^2-\frac{1}{m}}{m+\frac{1}{m}+1}$$

$$=\frac{m^3-1}{m^2+m+1}=\frac{(m-1).(m^2+m+1)}{m^2+m+1}=m-1$$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}:\dfrac{x^2+4x}{x^2+x}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}:\frac{x^2+4x}{x^2+x}=\frac{x^2-4^2}{(x-4).(x+1)}:\frac{x.(x+4)}{x.(x+1)}$$

$$=\frac{(x+4).(x-4)}{(x-4).(x+1)}.\frac{x+1}{x+4}=1$$

Örnek:

$\dfrac{a^2-b^2}{b}.\left(\dfrac{a^2}{a+b}-a+\dfrac{b^2}{a-b}+b\right)$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{a^2-b^2}{b}.\left(\frac{a^2}{a+b}-a+\frac{b^2}{a-b}+b\right)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{b}.\left(\frac{a^2-a^2-ab}{a+b}+\frac{b^2+ab-b^2}{a-b}\right)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{b}.\left(\frac{-ab}{a+b}+\frac{ab}{a-b}\right)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{b}.\frac{-a^2b+ab^2+a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2ab^2}{b}=2ab$$

Örnek:

$\dfrac{x^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).x+1}{x+\frac{a}{b}}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).x+1}{x+\frac{a}{b}}=\frac{x^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).x+\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}$$

$$=\frac{\left(x+\frac{a}{b}\right).\left(x+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{a}{b}}=x+\frac{b}{a}$$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{(a-b)^7+(b-a)^7+(a-b)^3}{a^2}:\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^3$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

n tek sayı olduğunda

$(a-b)^n = -(b-a)^n$ dir.

7 tek sayı olduğundan,

$(a-b)^7 = -(b-a)^7$ olup,

$$\frac{(a-b)^7+(b-a)^7+(a-b)^3}{a^2} : \left(1-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$= \frac{(a-b)^7-(a-b)^7+(a-b)^3}{a^2} . \left(\frac{a}{a-b}\right)^3$$

$$= \frac{(a-b)^3}{a^2} . \frac{a^3}{(a-b)^3} = a$$

Örnek:

$\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[3]{a}+1}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt[6]{a} = x$ olsun. Buna göre,

$\sqrt[3]{a} = x^2$ ve $\sqrt{a} = x^3$ olur. O halde,

$$\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[3]{a}+1} = \frac{x^3-1}{x+x^2+1} = \frac{(x-1).(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = x-1$$

$x = \sqrt[6]{a}$ değeri yerine yazılırsa,

$\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[3]{a}+1} = x-1 = \sqrt[6]{a}-1$ elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $x-y=4$ ve $y-z=3$ olduğuna göre $xy-xz+yz-y^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$xy-xz+yz-y^2 = x.(y-z)-y.(y-z)$$

$$= (x-y).(y-z) = 12$$

2. $a=\sqrt{3}+1$ ve $b=\sqrt{3}-1$ olduğuna göre a^3-b^3 ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$= a^3-b^3-3ab.(a-b)$$

$a-b = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1 = 2$ dir.

$a.b = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2-1^2 = 2$ dir.

$(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab.(a-b)$ ise,

$2^3 = a^3-b^3-3.2.2 \Rightarrow a^3-b^3 = 8+12 = 20$ bulunur.

3. $\dfrac{x^2+mx-12}{x-3}$ kesri sadeleşebilir bir kesirdir. Buna göre bu kesrin sadeleşmiş halini bulunuz.

Çözüm:

$\dfrac{x^2+mx-12}{x-3}$ kesri sadeleşebilir olduğuna göre

$x^2+mx-12$ nin bir çarpanı $x-3$ tür. Diğer çarpan $x-a$ olsun.

Buna göre,

$x^2+mx-12 = (x-3).(x-a)$ olur.

$(-a).(-3) = -12$ ise $a = -4$ tür. Bu durumda,

$$\frac{x^2 + mx - 12}{x - 3} = \frac{(x-3).(x-a)}{x-3}$$

$$= \frac{(x-3).(x+4)}{x-3} = x + 4 \text{ tür.}$$

4. $x = 1{,}2$ için $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 1$$

$$= (x-1)^3 - 1 \text{ dir.}$$

$x = 1{,}2$ için,

$$(x-1)^3 - 1 = (1{,}2 - 1)^3 - 1 = (0{,}2)^3 - 1$$

$$= 0{,}008 - 1 = -0{,}992 \text{ bulunur.}$$

5. Ardışık iki pozitif çift sayının karelerinin farkı 84 tür. Bu sayılardan büyük olanı kaçtır?

Çözüm:

Büyük sayı x olsun. Bu durumda küçük sayı x-2 olur. Verilenlere göre,

$$x^2 - (x-2)^2 = 84 \Rightarrow x^2 - (x^2 - 4x + 4) = 84$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 + 4x - 4 = 84 \Rightarrow 4x = 88 \Rightarrow x = 22 \text{ olur.}$$

6. $\left(\frac{a+b}{4}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{4}\right)^2$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\left(\frac{a+b}{4}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+b}{4} + \frac{a-b}{4}\right).\left(\frac{a+b}{4} - \frac{a-b}{4}\right)$$

$$= \frac{2a}{4}.\frac{2b}{4} = \frac{ab}{4}$$

7. $\frac{2x^4 + 2xy^3}{2x^2 + 2xy}$ kesrinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{2x^4 + 2xy^3}{2x^2 + 2xy} = \frac{2x.(x^3 + y^3)}{2x.(x+y)} = \frac{x^3 + y^3}{x+y}$$

$$= \frac{(x+y).(x^2 - xy + y^2)}{x+y} = x^2 - xy + y^2$$

bulunur.

8. $\frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} : \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$ kesrinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} : \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}.\frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$$

$$= \frac{x^3 + 2^3}{x^2 - 2x + 4}.\frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 2^3}$$

$$= \frac{(x+2).(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4}.\frac{x^2 + 2x + 4}{(x-2).(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \frac{x+2}{x-2}$$

9. $a = 3\sqrt{2} + 1$ olduğuna göre $a^2 - 2a + 3$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$a^2 - 2a + 3 = a^2 - 2.a.1 + 1 + 2 = (a-1)^2 + 2$ dir.

$a = 3\sqrt{2} + 1$ ise,

$(3\sqrt{2} + 1 - 1)^2 + 2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 = 18 + 2 = 20$

10. $m > 0$ olmak üzere $x^2 - (m-2)x + 25$ ifadesi bir tam kare olduğuna göre m değeri kaçtır?

Çözüm:

$x^2 - (m-2)x + 25$ ifadesi bir tam kare olduğuna göre,

$x^2 - (m-2)x + 25 = (x-5)^2$ veya

$x^2 - (m-2)x + 25 = (x+5)^2$ dir.

Buna göre,

$x^2 - (m-2)x + 25 = (x-5)^2$ ise,

$x^2 - (m-2)x + 25 = x^2 - 10x + 25$ olup,

$m - 2 = 10 \Rightarrow m = 12$ bulunur.

$x^2 - (m-2)x + 25 = (x+5)^2$ ise,

$x^2 - (m-2)x + 25 = x^2 + 10x + 25$ olup,

$m - 2 = -10 \Rightarrow m = -8$ bulunur.

Ancak $m > 0$ olduğundan $m = -8$ olamaz.

O halde $m = 12$ olur.

11. Bir dikdörtgenler prizmasının farklı kenar uzunlukları a cm, b cm ve c cm dir.

$a + b + c = 15$ ve $a^2 + b^2 + c^2 = 125$ olduğuna göre bu dikdörtgenler prizmasının alanı kaç cm^2 dir.

Çözüm:

Bir dikdörtgenler prizmasının farklı kenar uzunlukları a cm, b cm ve c cm ise,

$\text{Alan} = 2(ab + bc + ac)$ dir.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$ olduğundan,

$15^2 = 125 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow 2(ab + bc + ac) = 225 - 125$

$\Rightarrow 2(ab + bc + ac) = 100$ bulunur.

O halde,

$\text{Alan} = 2(ab + bc + ac) = 100$ dir.

12. $\dfrac{(a - a^2 + a^3)(a+1) - a}{a^5}$ kesrinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{(a - a^2 + a^3)(a+1) - a}{a^5} = \frac{a.(1 - a + a^2)(a+1) - a}{a^5}$$

$$= \frac{a.(1 + a^3) - a}{a^5} = \frac{a^4 + a - a}{a^5} = \frac{a^4}{a^5} = \frac{1}{a} \text{ bulunur.}$$

13. $5^x - 3^x = 2$ ve $15^x = 4$ olduğuna göre $125^x - 27^x$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$5^x - 3^x = 2$ ise $(5^x - 3^x)^2 = 4$ olup, buradan,

$(5^x)^2 + (3^x)^2 - 2.15^x = 4 \Rightarrow (5^x)^2 + (3^x)^2 - 2.4 = 4$

$\Rightarrow (5^x)^2 + (3^x)^2 = 12$ bulunur.

Buna göre,

$125^x - 27^x = (5^3)^x - (3^3)^x = (5^x)^3 - (3^x)^3$

$= (5^x - 3^x)\left[(5^x)^2 + 5^x.3^x + (3^x)^2\right]$

$= 2.\left[(5^x)^2 + (3^x)^2 + 15^x\right]$

$= 2.(12 + 4) = 2.16 = 32$

bulunur.

14. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ve $a^2 + ac - 2ab = 4$ olduğuna göre $a - b$ ifadesinin pozitif değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2$ dir.

$a^2 + ac - 2ab = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 4$

$\Rightarrow (a - b)^2 = 4 \Rightarrow a - b = 2$ veya $a - b = -2$ dir.

O halde $a - b$ ifadesinin pozitif değeri 2 dir.

15. $m = 3^x + 2$ ve $n = 1 - 9^x$ olduğuna göre n in m türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

$m = 3^x + 2 \Rightarrow 3^x = m - 2$ dir.

$n = 1 - 9^x = 1 - (3^2)^x = 1 - (3^x)^2$

$n = 1 - (m - 2)^2 = 1 - (m^2 - 4m + 4) = -m^2 + 4m - 3$ olur.

16. $(2x^5 - 3x^4 + 2x + 6)(5x^3 + 3x^2 - 6x + 1)$ çarpımı yapıldığında x^4 lü terimin katsayısı kaç olur?

Çözüm:

$(2x^5 - 3x^4 + 2x + 6)(5x^3 + 3x^2 - 6x + 1)$ çarpımı yapılırsa $-3x^4$ ile 1 in çarpımından ve $2x$ ile $5x^3$ ün çarpımından x^4 lü terimler oluşur.

$-3x^4.1 = -3x^4$ ve $2x.5x^3 = 10x^4$ ise,

$-3x^4 + 10x^4 = 7x^4$ olduğundan x^4 lü terimin katsayısı 7 dir.

17. $a^2 + 3a + 1 = 0$ olduğuna göre $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$a^2 + 3a + 1 = 0$ eşitliğinin her tarafını a ya bölelim.

$a + 3 + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = -3$ bulunur.

Buradan,

$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (-3)^2 = 9$ olur.

18. $m = \sqrt[3]{3} + 2$ ve $m = \sqrt[3]{3} - 2$ olduğuna göre $m^6 - 3m^4n^2 + 3m^2n^4 - n^6$ kaçtır?

Çözüm:

$m^6 - 3m^4n^2 + 3m^2n^4 - n^6$

$= (m^2)^3 - 3(m^2)^2 n^2 + 3m^2(n^2)^2 - (n^3)^2$

$= \left(m^2 - n^2\right)^3 = \left[(m-n).(m+n)\right]^3$

$= \left[\left(\sqrt[3]{3}+2-\sqrt[3]{3}+2\right).\left(\sqrt[3]{3}+2+\sqrt[3]{3}-2\right)\right]^3$

$= \left(4.2\sqrt[3]{3}\right)^3 = \left(8\sqrt[3]{3}\right)^3 = 512.3 = 1536$

19. $A = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ ve $B = x + \dfrac{1}{x}$ olduğuna göre, A nın B türünden eşiti nedir?

Çözüm:

$B = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow B^3 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3$

$B^3 = x^3 + 3x^2.\dfrac{1}{x} + 3.x.\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

$B^3 = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3.\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$B^3 = A + 3.B \Rightarrow A = B^3 - 3B$ olur.

20. $x^6 + 27$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$x^6 + 27 = \left(x^2\right)^3 + 3^3 = \left(x^2+3\right).\left(x^4 - 3x^2 + 9\right)$

21. $x^4 + 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

Verilen ifadeye $2x^2$ terimini ekleyip çıkarırsak,

$x^4 + 1 = \left(x^2\right)^2 + 2.x^2.1 + 1 - 2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2$

$= \left(x^2 + 1 - \sqrt{2}x\right).\left(x^2 + 1 + \sqrt{2}x\right)$

$= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right).\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$

22. $x + \dfrac{3}{x+2} = 5$ olduğuna göre $(x+2)^2 + \dfrac{9}{(x+2)^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Verilen eşitliğin her iki tarafına 2 ekleyip karesini alalım.

$x + \dfrac{3}{x+2} = 5 \Rightarrow x + 2 + \dfrac{3}{x+2} = 7$

$\Rightarrow \left(x + 2 + \dfrac{3}{x+2}\right)^2 = 7^2$

$\Rightarrow (x+2)^2 + 2.(x+2).\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{9}{(x+2)^2} = 49$

$\Rightarrow (x+2)^2 + 6 + \dfrac{9}{(x+2)^2} = 49$

$\Rightarrow (x+2)^2 + \dfrac{9}{(x+2)^2} = 49 - 6 = 43$

23. $a^2 - b^2 = 5$ ve $a.b = \sqrt{10}$ olduğuna göre $a^2 + b^2$ kaçtır?

Çözüm:

$\left(a^2 + b^2\right)^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2 + 4a^2b^2$ dir.

Buna göre,

$\left(a^2 + b^2\right)^2 = 5^2 + 4a^2b^2 = 25 + 4.(a.b)^2$

$= 25 + 4.\left(\sqrt{10}\right)^2 = 25 + 4.10 = 65$

$\left(a^2 + b^2\right)^2 = 65 \Rightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{65}$ bulunur.

24. $\dfrac{3^{x-1}+1}{3+3.2^x+3^x+6^x} : \dfrac{2}{4^x-1}$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm:

$$\frac{3^{x-1}+1}{3+3.2^x+3^x+6^x} : \frac{2}{4^x-1}$$

$$= \frac{\frac{3^x}{3}+1}{3\left(1+2^x\right)+3^x\left(1+2^x\right)}.\frac{4^x-1}{2}$$

$$= \frac{\frac{3^x+3}{3}}{\left(1+2^x\right)\left(3+3^x\right)}.\frac{\left(2^x\right)^2-1^2}{2}$$

$$= \frac{3^x+3}{3.\left(1+2^x\right)\left(3^x+3\right)}.\frac{\left(2^x+1\right)\left(2^x-1\right)}{2}$$

$$= \frac{2^x-1}{6}$$

25. $\dfrac{(0,35)^2-(0,05)^2}{0,4}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{(0,35)^2-(0,05)^2}{0,4} = \frac{(0,35+0,05).(0,35-0,05)}{0,4}$$

$$= \frac{0,4.0,3}{0,4} = 0,4$$

26. $\dfrac{2ab-2ac}{c-b}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{2ab-2ac}{c-b} = \frac{2a.(b-c)}{c-b} = -\frac{2a.(b-c)}{b-c} = -2a \text{ olur.}$$

27. $a=\sqrt{3}-1$ ve $b=\sqrt{3}+1$ olduğuna göre $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$ kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{a.b} = \frac{(a-b).(a+b)}{a.b}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}.(-2)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2} = -\frac{4\sqrt{3}}{3-1} = -\frac{4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

28. $\dfrac{a^2+b^2-x^2+2ab}{a+b+x}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{a^2+b^2-x^2+2ab}{a+b+x} = \frac{(a+b)^2-x^2}{a+b+x}$$

$$= \frac{(a+b+x).(a+b-x)}{a+b+x} = a+b-x$$

29. $5^{\frac{1}{9}}+1=n$ olduğuna göre $\dfrac{\left(5^{\frac{1}{18}}-1\right).\left(5^{\frac{1}{8}}+1\right)}{\frac{2}{5^9-1}}$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{\left(5^{\frac{1}{18}}-1\right).\left(5^{\frac{1}{8}}+1\right)}{\frac{2}{5^9-1}} = \frac{\left(5^{\frac{1}{18}}\right)^2-1^2}{\frac{2}{5^9-1}} = \frac{\frac{2}{5^9-1}}{\frac{2}{5^9-1}} = 1$$

bulunur.

30. $\dfrac{xy-ay+2ab-2xb}{a-x}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{xy-ay+2ab-2xb}{a-x}=\frac{y.(x-a)+2b.(a-x)}{a-x}$$

$$=\frac{-y.(a-x)+2b.(a-x)}{a-x}$$

$$=\frac{(a-x).(2b-y)}{a-x}=2b-y$$

31. $(2-x).(1-y)+xy-x.(y-1)-y.(x-2)$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$(2-x).(1-y)+xy-x.(y-1)-y.(x-2)$$

$$=(2-x).(1-y)+xy+x.(1-y)-y.(x-2)$$

$$=(1-y).(2-x+x)+y(x-x+2)$$

$$=2.(1-y)+2.y=2.(1-y+y)=2.1=2$$

32. $\dfrac{\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ kesrinin en sade şeklini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{m-n}{\sqrt{m}.\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{m}.\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{m-n}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}=\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n}).(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$$

$$=-\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n}).(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}=-\sqrt{m}-\sqrt{n}$$

33. $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}:\dfrac{x^5-1}{x-1}$ ifadesinin $x=\dfrac{1}{2}$ için değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}:\frac{x^5-1}{x-1}$$

$$=\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}.\frac{x-1}{x^5-1}$$

$$=\frac{x^5-1}{(x+1).(x^5-1)}=\frac{1}{x+1}$$

$x=\dfrac{1}{2}$ için, $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$ bulunur.

34. $\dfrac{3x^2+2x+2}{3x+2}+\dfrac{3x^2}{3x^2+2x}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{3x^2+2x+2}{3x+2}+\frac{3x^2}{3x^2+2x}=\frac{3x^2+2x+2}{3x+2}+\frac{3x^2}{x.(3x+2)}$$

$$=\frac{3x^2+2x+2}{3x+2}+\frac{3x}{3x+2}=\frac{3x^2+5x+2}{3x+2}$$

$$=\frac{(3x+2).(x+1)}{3x+2}=x+1$$

35. $a=1-b$ olduğuna göre $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ ifadesinin b türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

$a=1-b\Rightarrow a+b=1$ dir.

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b).(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$=a-b=1-2b$$

36. $4x^2+5xy=29$ ve $y^2+4=xy$ olduğuna göre $2x+y$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$4x^2+5xy=29$ ve $y^2+4=xy$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$4x^2+5xy+y^2+4=29+xy$

$\Rightarrow 4x^2+4xy+y^2=25$

$\Rightarrow (2x)^2+2.2x.y+y^2=5^2$

$\Rightarrow (2x+y)^2=5^2$

$\Rightarrow 2x+y=5$ veya $2x+y=-5$ bulunur.

37. $x=-\frac{3}{2}$ olduğuna göre $(x+2)^3-3(x+2)^2+3(x+2)-1$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$(x+2)^3-3(x+2)^2+3(x+2)-1$

$=(x+2-1)^3=(x+1)^3$

$x=-\frac{3}{2}$ olduğuna göre

$(x+1)^3=\left(-\frac{3}{2}+1\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$ bulunur.

38. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=5$ ve $a-b=10$ olduğuna göre a^2+b^2 kaçtır?

Çözüm:

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=5\Rightarrow\frac{b-a}{a.b}=5\Rightarrow-\frac{a-b}{a.b}=5$

$\Rightarrow-\frac{10}{a.b}=5\Rightarrow a.b=-2$ olur.

Buna göre,

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=10^2+2.(-2)=100-4=96$ dır.

39. $x^2-x+1=0$ olduğuna göre x^5-1 ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x^2-x+1=0\Rightarrow x^2=x-1$ dir.

$x^5-1=\left(x^2\right)^2.x-1=(x-1)^2.x-1$

$=\left(x^2-2x+1\right)x-1=(x-1-2x+1).x-1$

$=-x.x-1=-x^2-1=-(x-1)-1$

$=-x+1-1=-x$

40. $\frac{x^2+2mx+7}{x^2+6x+5}$ kesri sadeleştiğinde $\frac{x+7}{x+5}$ elde ediliyor. Buna göre m kaçtır?

Çözüm:

$x^2+2mx+7$ çarpanlarından biri $x+7$ dir.

$x^2+6x+5=x^2+(5+1)x+5.1=(x+5).(x+1)$ dir.

Buna göre $x^2+2mx+7$ ile x^2+6x+5 ifadesinin ortak çarpanı $x+1$ dir.

$x^2+2mx+7=(x+7).(x+1)$ dir.

$x^2+2mx+7=(x+7).(x+1)=x^2+8x+7$ olup,

$2mx=8x \Rightarrow m=4$ bulunur.

41. $x-y=5$ ve $x.y=10$ olduğuna göre x^3-y^3 ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$=x^3-y^3-3xy.(x-y)$

$(x-y)^3=x^3-y^3-3xy.(x-y)$ ifadesinde verilen değerler yerlerine yazılırsa,

$5^3=x^3-y^3-3.10.5 \Rightarrow x^3-y^3=125+150=275$ bulunur.

42. $a-\frac{1}{a}=2\sqrt{5}$ olduğuna göre $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$ tür.

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2+4=4.5+4=24$ tür.

43. $x+\frac{1}{x}=3$ olduğuna göre $x^2-\frac{1}{x^2}$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$x+\frac{1}{x}=3$ ise $x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=9$

$\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=9 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$ olur.

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2\ \frac{1}{x^2}-2=7-2=5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=5 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ veya $x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$ tir.

Buna göre,

$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right).\left(x-\frac{1}{x}\right)=3.\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ veya

$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right).\left(x-\frac{1}{x}\right)=3.\left(-\sqrt{5}\right)=-3\sqrt{5}$ tir.

44. $x^2+5x-1=0$ olduğuna göre, $x^2-\frac{1}{x^2}$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$x^2+5x-1=0$ eşitliğinin her tarafını x ile bölelim.

$\Rightarrow x+5-\frac{1}{x} \Rightarrow x-\frac{1}{x}=-5$ olur.

Bu son eşitliğin karesini alırsak,

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(-5)^2 \Rightarrow x^2-2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=25$

$x^2-2+\frac{1}{x^2}=25 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=25+2=27$ bulunur.

KONU BİTMİŞTİR